

М. Ю. ПАНТАЕВ

М. Ю. Пантаев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ГЕРБАРИЙ АБИТУРИЕНТА

Более
700 задач
с решениями

Алгебра

во всем ее блеске
и многообразии

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ГЕРБАРИЙ
АБИТУРИЕНТА



АЛГЕБРА
во всем ее блеске
и многообразии



М. Ю. Пантаев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ГЕРБАРИЙ АБИТУРИЕНТА

**Алгебра во всем ее блеске
и многообразии**

Издание стереотипное



**URSS
МОСКВА**

Пантаев Михаил Юрьевич

Математический гербарий абитуриента: Алгебра во всем ее блеске и многообразии. Изд. стереотип. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 784 с.

В жизни каждого молодого человека неизбежно наступает день, когда ему придется сдавать экзамен по математике. Можно ли помочь отроку пережить этот день, и не просто пережить, а более-менее успешно перейти в следующий? То есть сдать экзамен. Существует ли рецепт успеха?

По авторитетному мнению, экзамен — не что иное, как кодовый замок, и чтобы его открыть, нужно знать шифр. Но особенность данного замка в том, что шифров — много: не единственная последовательность решенных задач ведет к цели, а многие и многие и многие. Но... У всех таких последовательностей есть нечто общее.

В настоящей книге показана в действии одна из подобных «последовательностей», которая, по мнению автора, вполне достаточна для успешной подготовки по алгебре в любой вуз. Пособие представляет собой сборник задач с немелкими решениями, предназначенный для повторения той части школьного курса алгебры, которая востребована на выпускных и вступительных экзаменах. Эта книга — путеводитель по задачам разной степени трудности: тут есть и абсолютно стандартные задачи «базового» уровня, и более сложные «профильного» уровня, и задачи «с изюминкой», которые должен знать каждый абитуриент, не желающий относиться к тому, чем занимается, формально-прагматически. Книга обращена прежде всего к таким ученикам старших классов, которые честно изучали математику в школе, но кое-какие подробности за давностью лет подзабыли. Каждый, кто готовится к экзаменам, верит, что существуют могущественные приемы, ищет сильные методы и принимает за таковые все неизвестное прежде. Автор постарался не обмануть эти благородные ожидания, поделившись с читателями всеми тонкостями, которые узнал от своих учителей, коллег и учеников.

Формат 60×90/16. Печ. л. 49. Доп. тираж. Зак. № АЛ-314.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-4030-9

© ЛЕНАНД, 2013, 2016

21222 ID 221691



9 785971 040309

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Моим ученикам...

*Эта книга не для тех острых голов,
которые с одного взгляда всё знают
и разумеют, а для истинно ищущих истины,
которые допускают вести себя,
чтобы после идти самим.*

М. Осоргин

Содержание

Предисловие	6
Глава 1. Воспоминания детства, <i>или</i> Числа и алгебраические преобразования	11
§ 1. Поговорим о целых числах	11
§ 2. Преобразования алгебраических выражений	31
§ 3. Числа рациональные и иррациональные. Действия с иррациональностями	57
Глава 2. Алгебра во всем ее блеске и великолепии	94
§ 4. Алгебраические уравнения	94
§ 5. Иррациональные уравнения	161
§ 6. Системы уравнений	202
§ 7. Неравенства	243
§ 8. Уравнения, неравенства и системы с модулем	276
Глава 3. Тригонометрия, <i>или</i> Неравный брак	316
§ 9. Проверь себя, <i>или</i> 60 разминочных вопросов	318
§ 10. Тригонометрические преобразования	332
§ 11. Обратные тригонометрические функции	364
§ 12. Тригонометрические уравнения	385
§ 13. Две дюжины уравнений с обратными тригонометрическими функциями	448
§ 14. Тригонометрические неравенства	474
§ 15. Системы тригонометрических уравнений	509
Глава 4. Логарифмы и несть им конца	546
§ 16. Преобразования и вычисления	546
§ 17. Уравнения и их системы	567
§ 18. Неравенства	613
Глава 5. Тематическая смесь, <i>или</i> Ресторан господина Септима	658
§ 19. Только параметры, <i>или</i> Привет от Тристрама Шенди	658
§ 20. Хитрые задачи, <i>или</i> Голь на выдумки быстра	659
§ 21. Трудные задачи, <i>или</i> Без паники, майор Кардош!	677
§ 22. Наш Декамерон, <i>или</i> Десять дней на повторение	715

§ 23. Appendix, или 33 задачи без изюминки	744
§ 24. Теоремы, или Долги наши	747
Приложение 1. Поступальник для абитуриентов (по Д. Самойлову и не только)	770
Приложение 2. Слово о человеке	773
Послесловие	775
Список использованной литературы	778

Предисловие*

Учитель Карл Иванович из толстовского «Детства» заметил в грустную минуту, что из всех наших пороков самый ужасный — неблагодарность. Но как не впасть в него, если те, кого ты хочешь отблагодарить, волею судьбы удалены от тебя, ушли, и следы их потеряны? Кажется, есть только один способ — сделать кому-то, кто в этом нуждается, то, что когда-то сделали для тебя.

В жизни молодого человека неизбежно наступает день, когда ему приходится сдавать экзамен по математике. Можно ли помочь отроку пережить этот день, и не просто пережить, а более-менее успешно перейти в следующий? Т.е. сдать экзамен. Существует ли рецепт успеха?

По авторитетному мнению, экзамен — не что иное, как кодовый замок, и чтобы его открыть, нужно знать шифр. Но особенность данного замка в том, что шифров — много: не единственная последовательность (решенных задач) ведет к цели, а многие, и многие, и многие. Однако... У всех таких последовательностей есть нечто общее...

Не станем углубляться в рассуждения, нам предстоит иное — показать в действии только одну из этих бесчисленных последовательностей, а именно ту, что в свое время привела к цели нашего приятеля, «второклассника и второгодника» НН.

Был у него когда-то... не совсем правильно сказать: «репетитор»; ибо ни «повторением», ни «помощью в приготовлении домашних заданий» не занимался этот... едва ли «педагог», а скорее «вечный студент», знавший, по видимому, некий, почти сократовский метод, направленный — в данном случае — на то, чтобы разъяснить отроку столь в общем-то обычную и не особенно интересную область, как абитуриентская математика. Он умел говорить об уравнениях так, словно речь шла по меньшей мере о квантовой механике, и это завораживало. В результате отрок вззошел по той лестнице Ламарка, которую ему предложили, от простого к не очень и достиг... А заветную последовательность сохранил в памяти как гербарий, засушил лучшие образцы...

Конечно, книга не может заменить человека (как и человек — книгу), но она может попытаться донести его доступный дух. Мне бы хотелось воскресить его голос, толкующий — пусть! — о логарифмических уравнениях, раз не представился случай сказать о другом. Разумеется, я не помню всех примеров,

* «Но зато в искусстве предисловий мы в самое короткое время сделали столько успехов, что едва ли не обогнали на этом поприще все народы земного шара». (М. Е. Салтыков-Щедрин, «Скрежет зубовный». Цит. по: Эйхенбаум Б. М., «Маршрут в бессмертие».) Этого мало. «Я не люблю предисловий, в которых объясняется последующее содержание произведения. Чаше всего это бывает, когда последующего содержания нет. Надеюсь, что это не тот случай». (Д. Самойлов, «В кругу себя».)

которые он давал мне — поэтому пришлось добавить кое-что из собственного позднего опыта — примеры, которые, возможно, добавил бы и он, если бы был жив и учил меня сегодня, как тогда... А я склонялся над тетрадкой, как сегодня мои ученики склоняются над своими тетрадками.

Гербарий — это собрание с частичной упорядоченностью экспонатов по отделам. Упорядоченность нужна, она удобна, благодаря ей можно читать книгу с разных мест; но и — последовательность великая вещь, один неостановочный ход мысли. Возможность прочесть книгу, не переводя дыхания, — качество, ценимое марафонцами...

Гербарий — это опавшие листья, которые уже не дрожат на ветвях, которые уже никого не заставят содрогнуться. Но когда-то... они были во всей силе...

Гербарий — еще и потому, что славные дни абитуриентской математики сочтены: ЕГЭ шагает победоносно. Что будет с приемными комиссиями, десятилетиями оттачивавшими свое мастерство на бедных абитуриентах? Но это не наша забота...

Данная книга не ставит своей целью *подавить количеством* (задач — разобранных и «предложенных» для самостоятельного решения). Она — всего лишь — приглашает не слишком усидчивого мученика науки к периодическим беседам при свете лампы — перед тем, как ему погрузиться в блаженный сон.

Чтобы извлечь пользу из хороших книг для поступающих, нужна прежде всего железная воля. Предлагаемая книга этого не требует. Она ищет собеседника, которого А. П. Чехов называл «широкой натурой», т. е. человека, который согласен послушать учителя — но лишь до того момента, когда ему не станет скучно. Тогда учителю надлежит уйти...

Всем понятно, что математике можно научиться, только решая задачи. Но книга, хотя бы и по математике, способна служить и целям чтения, а не только быть сборником задач.

Почему выбрана именно такая форма изложения, и какую пользу я принесу, если решу 1000 задач? Которые уже давно решены без меня? Кому нужны эти показательные выступления?

Но ведь сказано: «Каждый из нас есть то, что он читает» (И. Ильин, «Поющее сердце»). Решения нужны, чтобы ученик имел образец для подражания. Пусть видит, как задачи решаются, а не только ставятся. Покажем же. Большие решим сами, чем оставим бедному мученику... Разумеется, решения невероятно увеличивают объем книги. Но как без них? Мне бы хотелось думать, что сей «Гербарий» абитуриент может взять с собой на дачу, чтобы почитать при случае. И решения очень даже не помешают ему — хотя бы краткие. Читатель-абитуриент ждет, чтобы к нему отнеслись с пониманием, разобрали побольше примеров «очевидных», а не только «повышенной трудности». И попытка восполнить этот пробел породила настоящую книгу. Говоря словами М. Кучерской, это — текст для *утешительного* чтения. Ведь сборник задач хорошо читается лишь до тех пор, пока задачи получаются. У первой же нерешенной книга захлопывается навсегда: «Ах, так!..» И летит в печку...

Основная «смысловая нагрузка» ложится, таким образом, на примеры, разобранные в тексте. Но рано или поздно их обсуждение прекращается, чтобы

продолжиться в другое время и в другом месте — на привале, где предлагается решить какое-то количество задач, к каждой из которых имеется ответ и более-менее подробные комментарии. (Всем знакомо это гадостное чувство: промучившись над задачей, заглядываем в конец книги, — а там даже ответа нет. Стараюсь не делать другим того, чего когда-то не хотел, чтобы делали мне.)

В пособии не ставится цель натаскивания: бойцовых псов и так предостаточно. «Встретились, поговорили...» — вот звон путеводной ноты. Если в результате разумный отрок окажется у дверей вуза, это совсем не так плохо. Надеюсь...

К середине 11 класса учащемуся становится ясно: дорога в рай — это дорога в вуз. Хотел бы я, чтобы моя книга попала к такому читателю: я не обману его ожидания, я сам в детстве так же смотрел на книги для поступающих.

«Гербарий» состоит из нескольких разделов, но деление в большой степени условно, поскольку никто не пытается строго классифицировать задачи по темам. Главное — мышление. Ведь благое намерение последовательного изучения какого-либо раздела математики часто разбивается о камень, называемый «единством всего сущего»: в процессе решения тригонометрическое уравнение, к примеру, иной раз сводится к системе таких уравнений, а система — к тригонометрическому неравенству. И какой же из этих трех разделов изучать первым? Поэтому мы не столько «проходим» материал, сколько просто решаем задачи, для удобства отнесенные к тому или иному разделу, и обсуждаем мелочи абитуриентской жизни. Но нам на первых же страницах может понадобиться что угодно — и нужное привлекается в предположении, что читатель *уже всё знает* (хотя и подзабыл). Т. е. ему дается возможность повторить известное. Да, по-видимому, пособие предназначено для повторения. И поэтому я исправляю название книги: Математический гербарий абитуриента *старшего возраста*. Так что, если в разделе, посвященном алгебраическим уравнениям, читатель вдруг столкнется с необходимостью решать неравенства, которые он еще не повторял (увы) и забыл, он может либо перескочить через непонятное место туда, где повествование движется более линейно, либо (что разумнее) вспомнить, как решаются неравенства (и для этого, скажем, заглянуть в соответствующий параграф). Ведь времени до экзаменов осталось так мало! То же касается и тригонометрии с логарифмами, которые возникают и в §§ 3–4, задолго до того, как их объявят законным порядком.

Возможно, кому-то покажется, что отдельные решения грешат длиннотами или *нерациональны*. Это требует разъяснений. При написании книги рано или поздно начинаешь представлять себе предполагаемого читателя. И кто он, читатель «Гербария»? Нет, это не «человек-машина», способный сразу увидеть идею решения любой задачи. Нет. Но это и не абсолютный «чайник», который не знает, что такое однородное уравнение. Мой читатель — честный человек: он знает то, что положено знать ученику, изучавшему математику в школе. И поэтому я смотрю на задачу глазами такого ученика, т. е. пытаюсь найти *честное* решение, пусть и не всегда самое короткое. Разумеется, если это честное решение оказывается *очень громоздким*, я думаю, можно мягко указать и на более

рациональное. Но принцип: «Элементарно, Ватсон!» заведомо не был руководящим... в принципе. Я пытался показывать, как можно было бы *решать* задачу; не в том состояла цель, чтобы максимально кратко *изложить* решение, до которого додуматься мог только ее составитель или будущий лауреат.

Так, в конце каждого раздела подробно разбирается несколько задач с параметром. Конечно, читать их решения скучновато, но желающий самостоятельно написать подобный текст на экзамене должен иметь в виду, что, скорее всего, у него получится нечто в том же роде. Мы далеки еще от того идеала, — решение в две строчки — которого ждут приемные комиссии. Каждый, кто проверял ребяческие тетрадки, знает, какой длины решения бывают, сколь они еще «нерациональны», хоть мы и бьемся над этим...

И все же: для кого эта книга? Почему я пишу ее? Трудно объяснить. Если бы я был Довлатовым... Помните?..

«Горбовский, многодетный отец, рассказывал: — Иду вечером домой. Смотрю — в грязи играют дети. Присмотрелся — мои...»

Не гоже представлять книгу по математике как некий священный текст, чтение которого — залог вечного блаженства. С другой стороны, абитуриент, по самой сути своей, это *человек, который надеется и верит*. И поэтому, скорее всего, будет обманут. Нет, книга — это некий вадемукум и ничего больше: т. е. путеводитель, предполагающий, что читатель одновременно и «шагатель», что он будет и ногами двигать (т. е. мозгами), иначе красоты, о которых рассказывает гид, так и останутся для него только на бумаге.

Большинство задач, разбираемых в книге, когда-либо предлагалось на каких-либо экзаменах. Однако ни один конкретный вуз не был выбран в качестве единственного поставщика. На то он и «Гербарий», его принцип — «понемногу отовсюду».

Учителя нередко употребляют в своей речи выражения: «красивая задача», «интересная задача»... Но встанем на место ученика: способен ли он оценить красоту и интерес задачи, которая занесена над ним как топор? Едва ли. Поэтому в данном сборнике попадают и задачи «с изюминкой», не обгаренные кровью младенцев, т. е. не предлагавшиеся на экзаменах, хотя по тематике — подходящие; они служат делу подогревания интереса.

Возможно, кому-то покажется «случайным» подбор примеров; на это трудно что-либо возразить: если бы существовал некий «неслучайный», теоретически выверенный набор необходимого, он, без сомнения, давно вошел в интеллектуальную копилку абитуриента, и никаких новых книг по данной тематике не появлялось, а их авторам пришлось искать себе иные пастбища для пропитания. Но поелику этого еще нет...

Так называемые «нестандартные задачи» не выделяются в отдельный раздел и вообще никак не отмечаются: ученику нет дела до нашей классификации; чего он не знает, то и есть для него нестандартная задача. *Методы решения* — дело другое, их можно и нужно выделять и обсуждать. И тогда то, что вчера было нестандартным, становится стандартным с накоплением опыта.

Отглядывая назад, приходится признать, что принцип неуклонного возрастания сложности (внутри параграфов и тем более в книге в целом), хотя

и выдерживается, где возможно, но не подчиняет себе всё. Гербарий собирается последовательно, и то, что было сочтено достойным экспонатом, уже не перемещается со своего места.

То, что автор книги, как правило, *переполнен материалом*, как пчела, собравшая слишком много меда, — причина того, что примеры для упражнений почти не дублируют материал основной части параграфов.

В книге нет геометрии. Почему? Разве она не нужна поступающим? Попробую ответить. Геометрии нет, прежде всего, наверное, потому, что Геометрия — искусство слишком высокое, чтобы заниматься им второпях, как это неизбежно при подготовке к экзаменам. Если уж абитуриенту посчастливится близко познакомиться с геометрией, это останется с ним надолго. Кроме того, трудно было бы держаться невидимой линии, отделяющей геометрию, так сказать, абитуриентскую, от геометрии вообще. А ограничиваться какими-либо « типовыми задачами » не хотелось. Не говоря уже про объем сего « Гербария », который и без того получился немалый. Итак, за геометрией надо отправляться к И. Ф. Шарыгину и его ученикам. В добрый путь!

Заканчиваю вступление словами « отца географии » Страбона: « Если и я решил писать о предмете, который многие уже разрабатывали до меня, то я вовсе не заслуживаю порицания, если не докажу, что изложил предмет в той же манере, как и мои предшественники... И если я смогу прибавить даже немного к сказанному ими, то это должно считаться достаточным оправданием моего начинания ». Остается только добавить: воистину так!

Глава 1

Воспоминания детства, или Числа и алгебраические преобразования

Отправная точка вымысла и размышления всегда произвольна. Что было в начале, никто не знает. Сказка? Слово?.. Или даже буква?.. И какого языка?.. А может быть, в начале было число?..

Конечно, это было давно и благополучно позабыто взрослыми людьми, готовящимися к поступлению в вуз, но... «Всё есть число», — утверждали греки, и от этого никуда не деться,

Потому что все оттенки смысла
Умное число передает, —

по словам поэта Н. Гумилева.

§ 1. Поговорим о целых числах

Начинать с чисел, наверное, естественно. Еще Сократ определял математику как науку о числах и фигурах. Алгебра начинается с чисел. И первый класс чисел — натуральные, которые даны нам свыше. А всё прочее люди создали сами. Но что они создали? Да ничего, кроме комбинации натуральных чисел. Разве десятичная дробь — это не набор всё тех же натуральных чисел? Пусть и взятых в бесконечном количестве?

Натуральные числа появились в процессе счета, и, считая, мы видим, сколько раз одно число повторяется в другом: *делится* ли одно число на другое и каково частное.

Задачи на делимость учат математике. Поскольку ответом здесь всегда являются целые числа, его во многих случаях можно (хотя бы частично) угадать-подобрать перебором; и крайне важно *доказать*, что перебор окончен, что других вариантов нет. Доказательство — мозг математики — присутствует здесь в самом буквальном виде.

Важно знать, что если два целых числа m и n связаны равенством $m = nq + r$, где $0 \leq r < |n|$ (все числа целые), то это равенство выражает факт *деления с остатком* первого числа на второе. Соответственно числа q и r — это *частное* (или *неполное частное*) и *остаток*. Если остаток равен 0, то говорят, что число m *делится на n* (и иногда используют обозначение $m:n$). Если мы имеем в виду натуральные m и n , то можно писать просто $0 \leq r < n$ (без модуля).

1. Некоторое число при делении на 2 дает остаток 1, а при делении на 3 — остаток 2. Какой остаток дает это число при делении на 6?

◀ Рассмотрим три подхода к решению этой задачи.

Ученики седьмых-восьмых классов обычно рассуждают так. Найдем наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи. 1, 2, 3, 4 отпадают, а 5 подходит. При делении на 6 это число дает остаток 5, поскольку $5 = 6 \cdot 0 + 5$ в свете данного выше определения. Значит, так оно и должно быть. На всякий случай посмотрим дальше. Снова: 6, 7, 8, 9, 10 отпадают, а 11 подходит; и остаток опять-таки 5; только теперь $11 = 6 \cdot 1 + 5$.

Ученики девятых-десятых классов понимают, что всё это хорошо, но нужно *настоящее* доказательство. И они дополняют изложенные рассуждения. Пусть x — данное число; поскольку нас интересует остаток при делении на 6, запишем x в виде $x = 6q + r$, где q и r — целые числа, причем, во-первых, $1 \leq r \leq 5$, а во-вторых, как следует из условия, $r \neq 2, 3, 4$; иначе x делился бы на 2 или 3 без остатка. Значит, либо $r = 1$, либо $r = 5$. Если $r = 1$, то $x = 6q + 1$ и это число при делении на 3 дает остаток 1. Если же $r = 5$, то $x = 6q + 5$, и все условия задачи выполнены. Итак, остаток равен 5.

Ученики одиннадцатых классов знают, что наряду с рассуждениями, учитывающими особенности данной задачи, есть еще и общие методы, применяемые при решении задач определенного типа. И данная задача сводится к решению уравнения в целых числах.

Действительно, по условию, данное число x , с одной стороны, можно представить в виде $x = 2n + 1$, а с другой — в виде $x = 3m + 2$. Таким образом, $2n + 1 = 3m + 2$ или $2n - 3m = 1$. Задача состоит в том, чтобы найти все такие целые числа m и n , которые удовлетворяют этому уравнению. Находить эти числа можно по-разному. Например, переписать уравнение в виде $2n - 2m = m + 1$; тогда станет ясно, что число $m + 1$ должно быть четным, т. е. $m + 1 = 2k$, где k — целое, откуда $m = 2k - 1$. Значит,

$$x = 3m + 2 = 6k - 1 \quad \text{или} \quad x = 6(k - 1 + 1) - 1 = 6(k - 1) + 5 = 6q + 5.$$

Таким образом, остаток при делении числа x на 6 равен 5. ▶

🔑 **Ответ:** 5.

2. Какое трехзначное число при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 5 — остаток 3, при делении на 7 — остаток 2?

◀ Обозначив искомое число через x , запишем условия задачи в виде равенств $x = 3n + 2 = 5m + 3 = 7k + 2$ (числа, обозначаемые буквами n, m, k, t, p, q, r здесь и ниже, если не оговорено противное, считаются целыми). Условие $3n +$

$2 = 7k + 2$ дает $3n = 7k$; правая часть этого равенства делится на 7, значит, и левая должна делиться на 7 и, таким образом, $n = 7t$. Значит,

$$x = 21t + 2 = 5m + 3$$

и надо решать уравнение (в целых числах) $21t - 5m = 1$ (*). Рассмотрим способ, отличный от предложенного в предыдущем примере. А именно: начнем с того, что подберем *частное решение* данного уравнения, иными словами — найдем какую-нибудь пару целых чисел (t_0, m_0) , ему удовлетворяющую. Это не очень трудно: например, $t_0 = 1$, $m_0 = 4$, поскольку $21 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = 1$. Теперь вычтем последнее равенство из равенства (*); мы получим $21(t - 1) - 5(m - 4) = 0$ или $21(t - 1) = 5(m - 4)$. Это равенство возможно, только если $t - 1 = 5p$, т. е. $t = 1 + 5p$; тогда $m = 4 + 21p$. Вот мы и получили общий вид решения уравнения $21t - 5m = 1$. Чтобы закончить решение задачи, найдем $n = 7t = 7 + 35p$ и тогда $x = 3n + 2 = 23 + 105p$. Поскольку искомое число трехзначное, p может принимать значения 1, 2, ..., 9. ►

❧ **Ответ:** 128, 233, 338, 443, 548, 653, 758, 863, 968.

Заметим, что по ходу дела мы вывели важное общее утверждение, а именно: решение уравнения $ax + by = c$ (с неизвестными целыми числами x и y), если числа a, b, c взаимно просты (т. е. никакие два из них не имеют общих делителей), дается формулами $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, где (x_0, y_0) — некоторое частное решение данного уравнения, а t — произвольное целое число.

Если числа a и b имеют общий делитель $q \neq 1$, а c не делится на q , то уравнение $ax + by = c$ решений не имеет. Если же c на q делится, то уравнение допускает сокращение на q , и после этого решается по указанной формуле.

(Как правило, мы не будем формулировать теоремы, на которых всё в математике основано, и тем более — немедленно доказывать их. Решение задач обычно состоит в последовательном пользовании этими теоремами, которые «всем известны». Из этого обширного «банка данных» мы по мановению волшебной палочки извлекаем нужный факт и применяем его в своих целях. Что касается пытливого ума, то все общие утверждения будут доказаны — или прокомментированы — в § 24, который так и называется: «Теоремы»).

3. Решить уравнения в целых числах: а) $25x + 13y = 8$; б) $60x - 77y = 1$.

◀ а) Частное решение: $x_0 = 5$, $y_0 = -9$; поэтому $x = 5 + 13t$, $y = -9 - 25t$.

б) Подбор частного решения всегда можно облегчить предварительной заменой переменной (или несколькими заменами). Перепишем уравнение так: $60x - 60y - 17y = 1$ или $60z - 17y = 1$, где $z = x - y$. Частное решение $z_0 = 2$, $y_0 = 7$; тогда $x_0 = 9$ и $x = 9 - 77t$, $y = 7 - 60t$. ►

❧ **Ответ:** а) $x = 5 + 13t$, $y = -9 - 25t$; б) $x = 9 - 77t$, $y = 7 - 60t$, $t \in \mathbb{Z}$.

4. Решить в целых числах уравнения: а) $xy = 20 - 3x + y$; б) $x^2 - 3y^2 = 17$.

◀ Это уравнения иного типа и для решения нужно использовать соображения делимости в чистом виде. В случае а) можно выразить одно неизвестное через другое, а именно

$$x = \frac{y + 20}{y + 3} = 1 + \frac{17}{y + 3}$$

(поскольку при $y = -3$, получается неверное равенство $-3x = 20 - 3x - 3$, делаем вывод, что $y \neq -3$ и деление на $y + 3$ законно).

Так как 17 — число простое, то $17/(y + 3)$ будет целым числом, только если $y + 3$ равно ± 1 или ± 17 . Это дает нам четыре пары решений: $(-16; -4)$, $(18; -2)$, $(2; 14)$, $(0; -20)$. На первом месте по традиции пишется значение x , на втором — y .

б) С точки зрения делимости на 3, число x можно представить либо в виде $x = 3n$ (если x делится на 3), либо в виде $x = 3n \pm 1$. (Запись $x = 3n - 1$ равносильна $x = 3(n - 1) + 2$ и означает, что x при делении на 3 дает остаток 2.) Первый вариант невозможен, так как правая часть уравнения не делится на 3. Если же $x = 3n \pm 1$, то, подставив, имеем

$$(3n \pm 1)^2 - 3y^2 = 17 \Leftrightarrow 9n^2 \pm 6n - 3y^2 = 16.$$

И это равенство невозможно, поскольку левая часть делится на 3, а правая — нет. Итак, решений нет. ▶

🔍 **Ответ:** а) $(-16; -4)$, $(18; -2)$, $(2; 14)$, $(0; -20)$, б) $\emptyset$

5. Пусть x, y, z — натуральные числа. Найти хотя бы одно решение уравнения $x^3 + y^4 = z^5$.

◀ Здесь слово «найти» надо понимать буквально, поскольку метода решения таких задач не существует. Ну и вот, так как в случае $a = 2$ имеет место формула $a^n + a^n = a^{n+1}$, например, $2^{24} + 2^{24} = 2^{25}$, т. е. $(2^8)^3 + (2^6)^4 = (2^5)^5$, то решение дает тройка $x = 2^8 = 256$, $y = 2^6 = 64$, $z = 2^5 = 32$. ▶

🔍 **Ответ:** $(256; 64; 32)$.

Конечно, задачи на делимость почти всегда являются «головоломками для интеллектуалов» (говоря словами старой книжки Айзенка «Проверьте свои способности»). Поэтому слишком углубляться в них едва ли стоит, учитывая нашу тему, — иначе можно развить комплекс неполноценности в тех читателях, которые такие задачи не любят. Но эти задачи хороши в качестве «дивертисмента»,

некоей интеллектуальной паузы или введения, иными словами, — как острая приправа к «нормальной» пище.

А нормальная пища (в применении к абитуриентской математике) включает в себя такую вещь, как *разложение на множители* и родственные операции над числами (а потом и буквами, точнее — буквенными выражениями).

6. Разложить на простые множители числа: а) 78; б) 783; в) 869; г) 1599.

◀ Разложение на простые множители предполагает, что у нас имеется достоверная информация о том, какие числа простые, а какие — нет. Поскольку простые числа — по определению — это натуральные числа, большие 1, делящиеся без остатка только на себя и на 1, ряд простых чисел начинается так: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... Ряд этот бесконечен (ниже мы поговорим об этом), и рутинный (не всегда единственный!) способ разложения состоит в том, чтобы последовательно делить данное число на каждое из указанных...

К примеру а) он вполне применим: число небольшое, к тому же — чётное; поэтому быстро находим: $78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$.

Разложение не сводится к банальному перебору, если мы знаем простейшие *признаки делимости*, то есть сразу видим, что число делится, скажем, на 3, 5, 9, 11.

Признаки делимости на 3 и 9 формулируются одинаково: число делится на 3 (на 9), если на 3 (на 9) делится его сумма цифр. Почему? Возьмем, например, произвольное трёхзначное число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ и представим его так:

$$(99a + 9b) + (a + b + c).$$

Первая скобка делится как на 3, так и на 9, значит, число будет делиться на 3 (на 9), если этим свойством будет обладать вторая скобка, то есть $a + b + c$ — *сумма цифр* числа $\overline{abc}$.

(Доказательство для общего случая см. в § 24).

В примере б) сумма цифр числа 783 равна 18; значит, 783 делится на 9; получаем $783 = 9 \cdot 87$; но 87 делится на 3, поэтому $783 = 3 \cdot 9 \cdot 29 = 3^3 \cdot 29$. Число 29 простое (см. выше), значит, разложение завершено.

Признак делимости на 11 менее известен, но почти столь же прост. Снова возьмем произвольное трёхзначное число $\overline{abc}$ и представим его так:

$$(99a + 11b) + (a - b + c).$$

Первая скобка делится на 11, значит, *число делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма цифр, стоящих на нечетных местах, минус сумма цифр, стоящих на четных местах* (Или наоборот — сумма цифр, стоящих на четных местах, минус сумма цифр, стоящих на нечетных, если число знаков самого числа четно. Доказательство для общего случая см. в § 24).

В примере в) $8+9-6=11$, значит, 869 делится на 11, и $869=11 \cdot 79$. Число 79 простое (мы ведь помним, что его нет в школьной таблице умножения!), значит, разложение закончено.

Переходя к примеру г) мы, зная признак делимости на 3, можем, конечно, получить $1599=3 \cdot 533$, но что дальше? Перебирать числа 7, 11, 13,...? Кроме признаков делимости помощь может оказать... выход в соседнюю дисциплину — алгебру: нам же известна формула «разность квадратов» $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Так вперед:

$$1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1^2 = (40 - 1)(40 + 1) = 39 \cdot 41 = 3 \cdot 13 \cdot 41. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$; $783 = 3^3 \cdot 29$; $869 = 11 \cdot 79$; $1599 = 3 \cdot 13 \cdot 41$.

Если учителю нужно надолго занять класс, он может предложить своим подопечным разложить на простые множители какое-нибудь зубо- и калькулятородобительное число, например, 124 973. Но среди учеников обязательно найдется маленький любитель, который: а) заметит, что

$$124\,973 = 125\,000 - 27 = 50^3 - 3^3;$$

б) знает и формулу «разность кубов» $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Поэтому

$$124\,973 = (50 - 3)(50^2 + 50 \cdot 3 + 3^2) = 47 \cdot 2659.$$

Число 47, конечно, простое, а вот 2659... оказывается, тоже, но чтобы убедиться в этом, приходится перебрать все простые числа вплоть до $\sqrt{2659}$ (по недостатку), то есть опять же до 47. (Если число $N = ab$, то одно из чисел a и b меньше либо равно $\sqrt{N}$).

Еще раз напомним, что если целые числа a и b не имеют общих делителей, то они называются *взаимно простыми*. (Иногда используется обозначение: $(a, b) = 1$.) Это понятие никак не связано с простотой самих чисел. Например, числа 6 и 25 взаимно просты (хотя ни одно из них не является простым). К доисторической древности относятся понятия *наибольшего общего делителя* (НОД) и *наименьшего общего кратного* (НОК) двух чисел.

Обычный способ нахождения НОД(a, b) и НОК(a, b) состоит в разложении a и b на простые множители, т.е. данные числа надо представить в виде

$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} \dots, \quad b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3} \dots,$$

где показатели степени — натуральные числа или 0. Набор простых множителей — это индивидуальный код натурального числа, столь же неповторимый, как наши отпечатки пальцев. Чтобы по этому коду определить интересующие нас НОК и НОД, надо снова составить выражение вида $2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3} \dots$. При этом НОК получится, если в качестве чисел $c_1, c_2, c_3, \dots$ мы возьмем большие из каждой пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots$, а НОД — если меньшие. Другими

словами,

$$\text{НОД}(a, b) = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3} \dots, \text{ где } c_k = \min(a_k, b_k);$$

$$\text{НОК}(a, b) = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3} \dots, \text{ где } c_k = \max(a_k, b_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Разложение на простые множители показывает, что имеет место равенство

$$\text{НОД}(a, b) \times \text{НОК}(a, b) = ab.$$

7. Найти НОД и НОК чисел: а) 36 и 20; б) 360 и 756.

◀ а) Имеем $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $20 = 2^2 \cdot 5$. Поэтому

$$\text{НОК}(36, 20) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180, \quad \text{НОД}(36, 20) = 2^2 = 4.$$

б) В этом случае $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$. Поэтому

$$\text{НОК}(360, 756) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560, \quad \text{НОД}(360, 756) = 2^2 \cdot 3^2 = 36. \quad \blacktriangleright$$

☞ **Ответ:** а) 180 и 4; б) 7560 и 36.

8. Найти все пары чисел, НОД которых равен 5, а НОК равно 105.

◀ Пусть x и y — искомые числа. По условию $x = 5n$, $y = 5m$ и таким образом $5n \cdot 5m = 105 \cdot 5$. Отсюда $nm = 21$ и тогда либо $n = 1$, $m = 21$, либо $n = 3$, $m = 7$. В первом случае получаем $x = 5$, $y = 105$, во втором случае $x = 15$, $y = 35$. ▶

☞ **Ответ:** 5 и 105 или 15 и 35.

При нахождении наибольшего общего делителя можно пользоваться и методом, который называется «алгоритмом Евклида». Вот в чем он состоит.

Пусть $a_1 > a_2$. Чтобы найти $\text{НОД}(a_1, a_2)$ надо: разделить a_1 на a_2 и найти остаток a_3 ; затем, деля a_2 на a_3 , найти остаток a_4 ; деля a_3 на a_4 , получить остаток a_5 , и так далее до тех пор, пока некоторое число a_n не разделится нацело на a_{n+1} . Записать процедуру можно так:

$$a_1 = a_2 q_1 + a_3, \quad a_2 = a_3 q_2 + a_4, \dots, a_{n-1} = a_n q_{n-1} + a_{n+1}, \quad a_n = a_{n+1} q_n.$$

Тогда $\text{НОД}(a_1, a_2) = a_{n+1}$. Иными словами, $\text{НОД}(a_1, a_2)$ — это последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида.

9. Найти НОД чисел: а) 756 и 360; б) 1365 и 1225.

◀ а) Имеем $756 = 2 \cdot 360 + 36$, $360 = 10 \cdot 36$. Значит, $\text{НОД}(756, 360) = 36$. (Другой способ решения задачи 7 б)).

б) Пишем:

$$1365 = 1225 \cdot 1 + 140, \quad 1225 = 140 \cdot 8 + 105, \quad 140 = 105 \cdot 1 + 35, \quad 105 = 35 \cdot 3.$$

Значит, $\text{НОД}(1365, 1225) = 35$. ▶

🔑 **Ответ:** а) 36; б) 35.

Заметную роль в теме «делимость» играют соображения, связанные с «арифметикой остатков».

10. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первый раз получили в остатке 4, а во второй — 18. На какое число делили?

◀ Запишем условия задачи в виде равенств

$$100 = xq + 4, \quad 90 = xp + 18.$$

Тогда $10 = x(q - p) - 14$ или $24 = x(q - p)$. Значит, x — делитель 24, больший 18, т. е. $x = 24$. ▶

🔑 **Ответ:** на 24.

11. а) Найти остаток от деления 14^{256} на 17; б) доказать, что $53^{53} - 33^{33}$ делится на 10.

◀ Используем следующее соображение. Число $(ab + c)^n$ при делении на a дает такой же остаток, что и число c^n (все числа целые, а n — натуральное). Почему это так? А потому, что при раскрытии скобок возникнет только одно слагаемое, не содержащее степени a — слагаемое c^n .

Действительно, представим себе, что мы раскрываем скобки в выражении $(ab + c)^n$, т. е. перемножаем $(ab + c)(ab + c) \dots (ab + c)$. Что при этом происходит? Мы из каждой скобки берем либо ab , либо c , и составляем произведение n множителей (считаем ab за один множитель). Потом к этому произведению мы прибавляем следующее, устроенное по тому же принципу. Если хотя бы из одной скобки мы взяли ab , полученное произведение неизбежно делится на a . Единственное исключение составляет число c^n . Таким образом, число c^n при делении на a дает тот же остаток, что и исходное.

Данные рассуждения можно считать предварительной заготовкой для темы «бином Ньютона», который на правах некоего Кентервильского привидения проходит по периферии школьного курса и о котором нам рано или поздно придется сказать несколько слов. Бином Ньютона — это формула (правило) для возведения в любую целую положительную степень двучлена $a + b$, т. е. для явного вида выражения $(a + b)^n$. Известные формулы квадрата и куба суммы суть частные случаи формулы бинома Ньютона.

Возвращаемся к решению задачи.

а) Число 14^{256} можно представить в виде $196^{128} = (187 + 9)^{128}$ и поскольку 187 делится на 17, искомый остаток равен остатку от деления на 17 числа

$$9^{128} = 81^{64} = (68 + 13)^{64}.$$

Это число дает при делении на 17 тот же остаток, что и $13^{64} = 169^{32} = (170 - 1)^{32}$. Но это последнее при делении на 17 дает, очевидно, остаток 1.

б) Поскольку данное число представляется в виде

$$A = (50 + 3)^{53} - (30 + 3)^{33},$$

а 50 и 30 на 10 делятся, остаток от деления A на 10 равен остатку от деления на 10 числа $B = 3^{53} - 3^{33}$. Но

$$B = 3^{33}(3^{20} - 1) = 3^{33}((3^4)^5 - 1) = 3^{33}(81^5 - 1),$$

что делится на 10, так как число 81 в любой степени оканчивается на 1, а число $81^5 - 1$ — соответственно на 0. ►

❧ **Ответ:** а) 1.

12. Наугад берутся 8 целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 7.

◀ Произвольное целое число может дать один из 7 остатков при делении на 7, именно 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. А теперь включается так называемый *Принцип Дирихле*, хорошо известный любителям занимательных задач. Одна из его формулировок такова: *если в семи клетках сидят восемь зайцев, то хотя бы в одной клетке сидят два зайца*. В применении к нашей задаче это означает, что из 8 целых чисел два числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 7, т. е. $a = 7q_1 + r$, $b = 7q_2 + r$. Но тогда их разность $a - b = 7(q_1 - q_2)$ делится на 7 без остатка. ►

Принцип Дирихле может многое — в частности, объяснить явление, описанное в рассказе Д. Хармса «Сонет»:

Удивительный случай случился со мной: я вдруг позабыл, что идет раньше — 7 или 8. Я отправился к соседям и спросил их, что они думают по этому поводу.

Каково же было их и мое удивление, когда они вдруг обнаружили, что тоже не могут вспомнить порядок счета. 1, 2, 3, 4, 5 и 6 помнят, а дальше забывают.

Мы все пошли в коммерческий магазин «Гастроном», что на углу Знаменской и Бассейной улицы, и спросили кассиршу о нашем недоумении. Кассирша грустно улыбнулась, вынула изо рта маленький молоточек и, слегка подвигав носом, сказала: «По-моему, семь идет после восьми в том случае, когда восемь идет после семи».

Мы поблагодарили кассиршу и с радостью выбежали из магазина. Но тут, вдумываясь в слова кассирши, мы опять приуныли, так как ее слова показались нам лишненными всякого смысла. Что нам было делать? Мы пошли в Летний сад и стали там считать деревья. Но, дойдя в счете до 6-ти, мы остановились и начали спорить: по мнению одних, дальше следовало 7, а по мнению других — 8. Мы спорили очень долго, но, по счастью, тут со скамейки свалился какой-то ребенок и сломал себе обе челюсти. Это отвлекло нас от нашего спора.

А потом мы разошлись по домам.

В качестве награды за пройденный путь пополним свои знания о признаках делимости.

13. Число n делится на 4, если на 4 делится число, образованное двумя последними значащими цифрами n .

Иными словами, $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ делится на 4 $\Leftrightarrow a_1 a_0$ делится на 4.

◀ Любое число

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

можно, вынося за скобку 100, делящееся на 4, представить в виде

$$n = 10^2 \cdot m + (10 a_1 + a_0).$$

Но $10 a_1 + a_0$ это и есть число $a_1 a_0$.

Например, число 123 456 делится на 4, поскольку на 4 делится 56, а число 7 891 074 на 4 не делится, потому что на 4 не делится число 74. ▶

При символической записи целого числа не обязательно писать $n = \bar{a}_k \bar{a}_{k-1} \dots$ — можно просто $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ (как и сделано выше). Внимательный читатель не спутает это с произведением $a_k \cdot a_{k-1} \cdot \dots$. Ведь когда мы пишем 323 никто не думает, что это $3 \cdot 2 \cdot 3$. Так?

14. Число $n = a_k a_{k-1} \dots a_0$ делится на 7 (или на 13) тогда и только тогда, когда на 7 (или на 13) делится число $a_2 a_1 a_0 - a_5 a_4 a_3 + a_8 a_7 a_6 - \dots$

◀ Здесь уже кустарных методов недостаточно. Нам потребуется нечто большее, а именно — дающий путь к решению (пусть и не в виде немедленного ответа) признак Паскаля, который формулируется так. Число

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + a_0$$

делится на p , если на p делится число $m = a_k r_k + a_{k-1} r_{k-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0$, где r_1 — остаток от деления на p числа 10 , r_2 — остаток от деления на p числа 10^2 и т.д. r_k — остаток от деления 10^k на p .

Доказательство признака Паскаля можно посмотреть в § 24, а сейчас мы сразу займемся выводением из него нужных нам следствий.

Поскольку $7 \cdot 11 \cdot 13 - 1 = 1000$, представим число n в виде

$$n = 1000^k b_k + 1000^{k-1} b_{k-1} + \dots + b_0$$

и рассмотрим остатки r_k от деления на $p = 7$ чисел вида 1000^k . Признак Паскаля сохраняет свою силу и для такого разложения (см. § 24), т.е. число n делится на 7, если на 7 делится число

$$m = b_k r_k + b_{k-1} r_{k-1} + \dots + b_1 r_1 + b_0. \quad (*)$$

Теперь займемся остатками r_k . Заметим, прежде всего, что если число a дает при делении на число b остаток $b - 1$, то $a = bq + b - 1 = b(q + 1) - 1$, т.е. можно написать $a = b\tilde{q} - 1$ и считать остатком -1 . Это — так называемый *приведенный остаток*, который может быть и отрицательным. В некоторых случаях рассмотрение таких остатков удобно. Но тогда

$$1000 = 7q_1 - 1, \quad 1000^2 = 7q_2 + 1, \quad 1000^3 = 7q_3 - 1$$

и т.д. Таким образом, $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$ и т.д. (Вообще-то в равенстве $(*)$ настоящие остатки равны попеременно 6 и 1, но там, где получается 6, мы пишем $6 = 7 - 1$, множитель, кратный 7 отбрасываем, и в результате учитывается только $-b_k$).

Значит, $m = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots$. Но что такое числа $b_0, b_1, \dots$? Если

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + a_0 = 1000^k b_k + 1000^{k-1} b_{k-1} + \dots + b_0,$$

то

$$b_0 = a_0 + 10a_1 + 100a_2, \quad b_1 = a_3 + 10a_4 + 100a_5$$

и т.д. Иными словами, $b_0 = a_2 a_1 a_0$, $b_1 = a_5 a_4 a_3$, $b_2 = a_8 a_7 a_6$, и т.д. Значит, n делится на 7, если делится на 7 число

$$m = b_0 - b_1 + b_2 - \dots = a_2 a_1 a_0 - a_5 a_4 a_3 + a_8 a_7 a_6 - \dots$$

Например, число 319 886 делится на 7, так как $m = 886 - 319 = 567 = 7 \cdot 81$, а число 456 123 на 7 не делится, так как $m = 123 - 456 = -333 = -7 \cdot 48 + 3$.

Если число разрядов в исходном числе не кратно 3, то вместо последнего трехзначного числа $a_r a_{r-1} a_{r-2}$ берется двузначное или однозначное. Например, число 8960 делится на 7, так как на 7 делится число $m = 960 - 8 = 952 = 7 \cdot 136$.

Если в вышеприведенных рассуждениях заменить 7 на 13 (или 11) то ничего не изменится. (Однако в случае 11 мы уже раньше получили более простой признак, которым обычно и пользуются). И, кроме того, они позволяют легко получить *неполный признак делимости на 7, 11, 13*, а именно: *число $n = 1000A + B$ делится на 7, 11, 13 тогда и только тогда, когда на 7, 11, 13 делится число $B - A$,*

т. е. разность между числом, образованным тремя последними цифрами числа n , и числом, составленным из остальных цифр.

Действительно,

$$n = 1000A + B = 1001A + (B - A),$$

а 1001, как мы видели, делится на 7, 11 и 13.

«Неполным» этот признак приходится называть потому, что исходное число может быть не 6-значным, а 25-значным, и для получения результата придется применять правило повторно, несколько раз, что, конечно, не криминал. ►

Уделив должное внимание числам, которые на что-то делятся, не забудем про числа, которые почти ни на что не делятся и за это называются, как мы помним, *простыми*.

Всем известно, что *наибольшего простого числа не существует*. Как это доказывается? Со времен Евклида это делается так. Предположим противное, а именно, что p — наибольшее простое число. Рассмотрим число $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$. Оно, конечно, больше p , кроме того, оно не может делиться ни на 2, ни на 3, и т. д. вплоть до p (при делении на каждое из этих чисел оно дает остаток 1). Тогда число q либо само является простым, либо делится на какое-то простое число, большее p . И тот, и другой случай противоречат предположению о том, что p — наибольшее простое число. Значит, наибольшего простого числа нет.

Русский поэт с римским именем Валерий предупреждает:

Но пред Эдипом загадка Сфинкса:
Простые числа всё не разгаданы.

15. Найти все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями простых.

◀ По виду такую задачу можно принять за одну из нерешенных проблем теории чисел. Это означает, что ответом, скорее всего, является одно-единственное число (ну, может быть, два).

Действительно, если p — число, удовлетворяющее условию задачи, то $p = p_1 + 2 = p_2 - 2$, где $p_{1,2}$ — простые. Другого второго слагаемого, кроме 2, быть не может, так сумма и разность всех остальных простых чисел (нечетных) будет четным числом, значит, и p придется быть четным, т. е. $p = 2$. Но это число не есть сумма простых, поскольку 1 не является простым числом, а другой возможности представить 2 в виде суммы натуральных чисел нет.

Итак, $p_1 = p - 2$, $p_2 = p + 2$. Но из трех чисел $p - 1$, p , $p + 1$ одно должно делиться на 3. Само число p на 3 не делится (оно ведь простое; случай же $p = 3$ невозможен по той же причине, что и случай $p = 2$). Значит, на 3 делится либо $p - 1$, либо $p + 1$. Но тогда либо $p - 2$, либо $p + 2$ будет составным числом

(если $p - 1 = 3k$, то $p + 2 = 3k + 3$; если $p + 1 = 3k$, то $p - 2 = 3k - 3$), кроме того случая, когда $p - 2 = 3$, т.е. при $p = 5$. Это — единственное число, удовлетворяющее условию. ►

☛ **Ответ:** $p = 5$.

16. Найти все простые p , такие что $p^2 + 11$ имеет ровно шесть различных делителей (включая 1 и самое себя).

◀ Любое простое $p \geq 5$ можно представить в виде $p = 6k \pm 1$. (Мы уже косвенно пользовались этим в примере 1; это значит, что при делении на 6 простое число дает остаток 1 или 5. Отсюда, конечно, не следует, что любое число вида $p = 6k \pm 1$ является простым!) Но тогда число

$$p^2 + 11 = 12(3k^2 \pm k + 1),$$

т.е. имеет больше шести делителей, поскольку 12 имеет шесть делителей (1, 2, 3, 4, 6, 12). Значит, $p < 5$. Но тогда $p = 2$ или $p = 3$. Если $p = 2$, то $p^2 + 11 = 15$. У этого числа только четыре делителя (1, 3, 5, 15). Число $p = 3$ удовлетворяет условию, поскольку $p^2 + 11 = 20$ делится на 1, 2, 4, 5, 10, 20. ►

☛ **Ответ:** $p = 3$.

Целочисленная тематика традиционно включает в себя также задачи на сравнение чисел без помощи калькулятора, что требует некоторого ориентирования в мире чисел, которое можно считать полезной мозговой гимнастикой перед отправкой в путь для встречи с Серьезными Задачами.

17. Сравнить числа 202^{303} и 303^{202} .

◀ Для записи решения задач такого рода придумана специальная процедура. Сравниваемые числа, например, a и b , соединяются знаком « $\vee$ » (говорящим, что мы пока не знаем, « $<$ » это или « $>$ »). Затем над выражением $a \vee b$ производятся тождественные преобразования, т.е. преобразования, не меняющие знак неравенства, как то: домножение (деление) обеих частей на положительное число, перенос какого-либо слагаемого из одной части неравенства в другую с противоположным знаком и т.д. В результате таких действий должны получиться числа, знак между которыми очевиден. Они соединяются этим знаком, т.е. « $<$ » или « $>$ », который, таким образом, нужно поставить и между числами a и b . Итак:

$$\begin{aligned} 202^{303} \vee 303^{202} &\Leftrightarrow 2^{303} \cdot 101^{303} \vee 3^{202} \cdot 101^{202} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8^{101} \cdot 101^{303} \vee 9^{101} \cdot 101^{202} \Leftrightarrow 8^{101} \cdot 101^{101} \vee 9^{101}. \end{aligned}$$

Знак, очевидно « $>$ », поскольку $808^{101} > 9^{101}$. Значит, $202^{303} > 303^{202}$. ►

18. Сравнить числа 31^{11} и 17^{14} .

◀ Конечно, здесь должна «бросаться в глаза» близость чисел 31 и 17 к степеням двойки, причем $31 < 32 = 2^5$, $17 > 16 = 2^4$. Поэтому $31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$, тогда как $17^{14} > 16^{14} = 2^{56}$, следовательно, $17^{14} > 31^{11}$. ▶

Наконец, бывают задачи, которые приходится решать элементарным перебором, сокращая его по мере возможности.

19. Найти все трехзначные числа, большие суммы квадратов своих цифр на 517.

◀ Пусть $n = 100a + 10b + c$ — данное число (целые числа a , b и c изменяются в пределах от 1 до 9). Для решения задачи нам надо решить уравнение

$$100a + 10b + c = 517 + a^2 + b^2 + c^2.$$

Из условия следует, что a может принимать значения 5, 6, 7, 8, 9. Если $a = 5$, то, подставляя, получим $c^2 - c + (b - 5)^2 + 17 = 0$ или $c(c - 1) + (b - 5)^2 + 17 = 0$, чего быть не может, поскольку $c \geq 1$. Пусть $a = 6$. Тогда приводим уравнение к виду $b(b - 10) + c(c - 1) = 47$.

Поскольку $b(b - 10) < 0$; произведение $c(c - 1) > 47$, поэтому c может равняться 8 или 9.

Если $c = 8$, то для нахождения b имеем уравнение $b(b - 10) + 9 = 0$, откуда $b_1 = 1$, $b_2 = 9$. Таким образом, мы получили два числа, удовлетворяющие условию: 698 и 618.

Если $c = 9$, то имеем $b(b - 10) + 25 = 0$, откуда $b = 5$. Имеем еще одно решение: 659.

Пусть теперь a равно 7, 8 или 9. Это приводит нас к уравнениям $b(b - 10) + c(c - 1) = 132$, $b(b - 10) + c(c - 1) = 219$ и $b(b - 10) + c(c - 1) = 302$ соответственно, которые при данных ограничениях на числа b и c удовлетворить невозможно. ▶

☛ **Ответ:** 618, 659 и 698.

В таких задачах, как следующая, лица посвященные почувствуют желание применить метод математической индукции, однако это не обязательно.

20. Доказать, что при любом натуральном n число: а) $2^{5n+1} + 5^{n+2}$ делится на 27; б) $n^5 - n$ делится на 30.

◀ а) Поскольку

$$2^{5n+1} + 5^{n+2} = 2 \cdot (32)^n + 25 \cdot 5^n = 2(27 + 5)^n + 25 \cdot 5^n,$$

это число при делении на 27 даст тот же остаток, что и число

$$2 \cdot 5^n + 25 \cdot 5^n = 27 \cdot 5^n,$$

которое на 27 делится.

б) Разложение на множители даст нам равенство

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

или

$$n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1).$$

Произведение $(n - 1)n(n + 1)$ делится на 2 и на 3, так как одно из двух последовательных чисел четное, а одно из трех последовательных делится на 3. Поскольку $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, остается доказать делимость на 5. Если ни $n - 1$, ни n , ни $n + 1$ не делится на 5, то n можно представить либо в виде $n = 5k + 2$, либо в виде $n = 5k + 3$. (Т.е. n дает при делении на 5 остаток 2 или 3. Если бы остаток был 1 или 4, то в первом случае на 5 делилось бы число $n - 1$, а во втором — $n + 1$.)

Если $n = 5k + 2$, то $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$ — это число делится на 5. Аналогично, если $n = 5k + 3$, то $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 10$ — также делится на 5. ►

Все чаще нам приходится прибегать к преобразованиям алгебраических выражений. Это значит, что назрел момент для перехода к следующему параграфу. Надеюсь, небольшой оздоровительный курс арифметики, который мы предприняли, окажется небесполезен для дальнейшего движения вперед. Почему мы именно здесь оканчиваем разговор? Или мы считаем, что разобранных примеров достаточно для полного овладения темой?

Храни нас Бог от такого невежества. Нет, мы не можем дать никому никаких гарантий. Всякое мимолетное приобретение знания — уже удача немалая, ее надо ценить и смаковать. Тогда приобретенное, возможно, и уляжется прочным фундаментом. Так или иначе — предлагаем еще помедлить в следующем разделе:



Задачи для самостоятельного решения, или Привал зачарованных охотников

- Остаток от деления числа n на 6 равен 4, а от деления на 15 равен 7. Найдите остаток от деления n числа на 30.
- Представьте число 271 в виде разности кубов натуральных чисел.
- Решите уравнения в целых числах:
 - $69x - 91y = 1996$;
 - $x^2 - xy + 2x - 3y = 0$.

4. Стрелок выбил 100 очков, сделав более 11 выстрелов и выбивая только 8, 9 или 10 очков. Сколько выстрелов он сделал, и какие были попадания?
5. Найдите все трехзначные числа, которые в 25 раз больше суммы своих цифр.
6. Найдите четырехзначное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.
7. Найдите два натуральных числа, если их сумма равна 85, а НОК равно 102.
8. Найдите два натуральных числа a и b , т. ч. $a + b = 667$, $\text{НОК}(a, b) : \text{НОД}(a, b) = 120$.
9. Какое число стоит в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... на 6-м? на 2009-м месте?
10. Докажите, что число, записываемое шестью одинаковыми цифрами, делится на 3, 7, 11, 13 и 37.
11. Найдите наименьшее натуральное число, большее 10, дающее при делении на 24, 45 и 56 остаток 1.
12. Докажите, что $2^{50} + 1$ делится на 125.
13. Докажите, что число $n = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ делится на 8, если делится на 8 число $a_2 a_1 a_0$. Сформулируйте и докажите признак делимости на 16.
14. Сравните числа:
 - а) 2^{91} и 5^{35} ;
 - б) $2010^{2008} \cdot 2008^{2010}$ и 2009^{4018} .
15. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?
16. Докажите, что при любом натуральном n число: а) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133; б) $7^n + 3^n - 2$ делится на 8.
17. Найдите десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого по одному разу использованы все цифры.
18. Числа от 1 до 100 выписаны по порядку. Первое, третье, пятое и т. д. числа вычеркиваются. Из оставшихся чисел снова вычеркивают первое, третье и т. д. Эту операцию повторяют до тех пор, пока не останется одно число. Какое?
19. Найдите все простые числа, представимые в виде суммы кубов двух натуральных чисел.
20. Найдите все простые числа p , для которых числа $20p^2 + 1$ — тоже простые.
21. (Задача-шутка) Расставьте в равенстве

$$1 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 - 10 \cdot 11 = 2010$$

скобки так, чтобы это равенство стало верным.

Советы, решения, ответы

Звонит парень и говорит, что он завалил экзамен по алгебре. Отвечаю ему по привычке: убей себя.

(Ч. Паланик. Уцелевший)

Хочу не учить, а душевно беседовать, размышлять сообща и догадываться.

(М. М. Пришвин. Дневник)

Устройство данного раздела таково. Он содержит как достаточно полные решения, так и более-менее развернутые указания-руководства к действию. Чаще всего здесь происходит некий обмен с читателями, решившими задачу, *приятными воспоминаниями*. «А вот, помните, после разложения на множители...» Или: «Если же домножить на сопряженное, то...» Опуская подробности, очевидные для обеих сторон. Когда говорится: «Делая то-то, получаем то-то», подразумевается, конечно, получаем *после преобразований*, а не прямо сразу само-собой. Как правило, разъяснения оканчиваются в тот момент, когда решение доведено до стадии квадратного уравнения. Если написано «корень $x = x_0$ не входит в ОДЗ», а сама ОДЗ предварительно не найдена, это означает, что читатель в состоянии самостоятельно убедиться в справедливости заковыченного утверждения. Если же при проверке возможны какие-либо осложнения, по возможности указываются пути их преодоления. В целях экономии места решения иногда начинаются с символов «... $\Rightarrow$ » или «... $\Leftrightarrow$ », заменяющих исходное выражение. Аналогичным образом, символы « $\Leftarrow$... $\Rightarrow$ » в середине выкладки означают, что между знаками равенства опущены, может быть, довольно длинные, но утомительные преобразования. Надеюсь, это чуточку гуманнее классического «Легко видеть, что...» (см. „Курс высшей математики“ акад. В. И. Смирнова).

Интеллигентный читатель понимает, что авторское решение всегда уязвимо для критики. Если оно подробное, читатель недовольно фыркает: «Ну, вот, взялся разжевывать очевидное... Считает всех идиотами...» Если же решение... *не очень подробное*, читатель с еще большим основанием может сказать: «Ну да, ему всё очевидно. Для чего же книгу-то взялся писать?..» И читатель прав. Потому что каждому читателю нужно свое решение. Которое я и даю ему возможность найти. Самому.

Смирненно признаюсь, что не стремился к абсолютной строгости во всех доказательствах, позволяя себе говорить: «Из графиков видно» и оставляя читателю возможность дополнить это вольное утверждение рассуждением чисто аналитическим, не апеллирующим к нашей несовершенной интуиции. «Математическая строгость» — понятие более чем растяжимое, и насколько будут его растягивать приемные комиссии, с которыми придется столкнуться читателям, я не знаю и не хочу знать (если честно). Вспоминается «детский» мультфильм:

«Никто никогда не мог ничего объяснить Шер-хану». Но про себя мы уверены, что правы: ведь мы же *должны* уметь строить графики; должны знать, через какие характерные точки они проходят и проч. Но использовать их для решения уравнений мы не можем? Где же логика, господа? Вообще довольно трудно толковать учащемуся, который бьется над задачами по геометрии, что «чертеж не доказательство». Хотя, конечно, и в геометрических задачах нельзя просто так говорить: «из чертежа видно». Вы согласны?

И еще раз. Когда пишешь решение, почти слышишь заданный тебе в том или ином месте вопрос: «Почему так?» И тем самым оказываешься в зависимости от предполагаемого адресата книжки. Но кто он? Каков его «уровень»? Насколько он готов работать сам, а не ждать, что автор всё ему объяснит? Ничего этого не известно. Поэтому приведенные ниже решения кому-то неизбежно покажутся слишком краткими, кому-то — слишком подробными (хотя это, скорее всего будут типографские работники).

Решения изложены по возможности кратко, в конспективном стиле, тривиальные заключения опущены; однако при серьезном размышлении над задачей они должны быть вполне ясны.

(Г. Поля, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа)

Р 1. Если $n = 6p + 4 = 15q + 7$, то $2p - 5q = 1$. Частное решение $p = 3, q = 1$, поэтому $p = 3 + 5t$ и тогда $n = 30t + 22$, т. е. остаток при делении на 30 равен 22.

Р 2. Число 271 — простое, поскольку оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13 (а на большие простые делиться не может в принципе). Поэтому разложение

$$271 = n^3 - m^3 = (n - m)(n^2 + nm + m^2)$$

возможно только при условиях $n - m = 1, n^2 + nm + m^2 = 271$. Отсюда $n = 10, m = 9$.

Р 3. а) Сразу подобрать частное решение нелегко, а потому сделаем несколько замен. Записав уравнение в виде

$$69(x - y) - 22y = 1996,$$

положим $x - y = 2k$. Подставив и сократив, получим

$$69k - 11y = 998 \quad \text{или} \quad 3k + 11(6k - y) = 998.$$

Заменяя $6k - y = m$, получим $3k + 11m = 998$. Теперь частное решение можно найти из равенства $k = (998 - 11m)/3$; достаточно подставить $m = 1$ и дробь в правой части окажется равной 329. Итак, $k = 329 - 11t, m = 1 + 3t$. Тогда

$$y = 6k - m = 1973 - 69t, \quad x = 2k + y = 2631 - 91t$$

б) Выражая y , получаем

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x + 3} = x - 1 + \frac{3}{x + 3}.$$

Значит, $x + 3$ должно равняться ± 1 или ± 3 .

Р 4. Имеем $8x + 9y + 10z = 100$. Тогда $x + y + z = n$ — общее число выстрелов. По условию, $n > 11$. Но, с другой стороны, $n < 13$, поскольку если бы стрелок выбивал

только 8 очков, то при 13 выстрелах уже получился бы перебор (больше 100). Значит, $n = 12$. Поскольку равенство $8x + 9y + 10z = 100$ можно записать так:

$$8(x + y + z) + y + 2z = 100,$$

имеем $y + 2z = 4$. Величина y может принимать только значение 2 (если $y = 4$, то $z = 0$, что противоречит условию). Соответственно $z = 1$ и тогда $x = 9$.

Р5. Если abc — данное число, то $100a + 10b + c = 25(a + b + c)$ или $25a = 5b + 8c$, откуда $c = 0$ или $c = 5$ (нужна делимость c на 5). Если $c = 0$, то $b = 5a$. Это дает число 150. Если $c = 5$, то $5a = b + 8$. Это возможно в двух случаях: $a = 2$ и $a = 3$, что дает еще два решения: 225 и 375.

Р6. Если $abcd$ — данное число, то

$$4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a$$

или $1333a + 130b = 20c + 332d$. Отсюда $a = 2k$, что после подстановки приводит к равенству $1333k + 65b = 10c + 166d$, которое показывает, что $k = 1$, иначе левая часть будет больше правой. Тогда d может равняться 8 или 9 (7 мало: $166 \cdot 7 + 90 < 1333$). Если $d = 8$, то получаем $1 + 13b = 2c$, откуда $b = 1$, $c = 7$ и искомое число 2178. Если же $d = 9$, то $65b = 10c + 361$, что невозможно, так как 361 не делится на 5.

Р7. Поскольку $\text{НОК}(a, b) = 102 = 17 \cdot 6$, т. е. делится на 17, а 17 — число простое, по крайней мере одно из данных чисел должно делиться на 17: ведь НОК состоит из тех простых множителей, которые входят хотя бы в одно из данных чисел (см. пример 7 данного параграфа и текст перед ним). Но тогда и другое делится на 17, так как $a + b = 85 = 17 \cdot 5$. Итак, $a = 17p$, $b = 17q$, откуда $p + q = 5$ и $p = 2$, $q = 3$ (или наоборот). Вариант $p = 1$, $q = 4$ (или наоборот) не годится, поскольку тогда $a = 17$, $b = 68$ и НОК этих чисел равен 68, а не 102.

Р8. Пусть $\text{НОД}(a, b) = q$ и $a = mq$, $b = nq$. Поскольку $(m + n)q = 667 = 23 \cdot 29$, НОД равен 23 или 29; при этом числа m и n должны в сумме давать 29 или 23, а их произведение равняться 120 (ибо $\text{НОД}(a, b) \times \text{НОК}(a, b) = ab$). Отсюда: а) $m = 24$ и $n = 5$ при $q = 23$; б) $m = 8$, $n = 15$ при $q = 29$.

Р9. Последовательность образована по закону $a_n = n(n + 1)$; значит,

$$a_6 = 42, \quad a_{2010} = 2009 \cdot 2010 = 4\,038\,090.$$

Р10. Поскольку $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111 \cdot 1001 = 111\,111$, число вида $aaaaaa = 111\,111 \cdot a$ делится на указанные числа.

Р11. Если x — искомое число, то $x - 1$ делится на каждое из данных чисел, т. е. $x - 1$ — их НОК. Поскольку $24 = 2^3 \cdot 3$, $45 = 3^2 \cdot 5$, $56 = 2^3 \cdot 7$, $\text{НОК}(24, 45, 56) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Р12. Имеем $2^{50} = 2 \cdot (2^7)^7 = 2 \cdot (128)^7 = 2(125 + 3)^7$. Значит, остаток при делении на 125 этого числа равен остатку при делении на 125 числа $2 \cdot 3^7 = 4374 = 4375 - 1$. Итак, $2^{50} + 1$ дает при делении на 125 такой же остаток, что и число 4375, которое на 125 делится.

Р13. Представим число $n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$ в виде

$$n = 10^3 \cdot m + (100a_2 + 10a_1 + a_0).$$

Слагаемое $10^3 m$ делится на 8, поэтому n делится на 8, если на 8 делится число $a_2 a_1 a_0$. И аналогично число $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ делится на 16, если делится на 16 число $a_3 a_2 a_1 a_0$.

Р 14. а) Поскольку $2^{91} = (2^{13})^7$, а $5^{35} = (5^5)^7$, надо сравнить числа в скобках. Но

$$2^{13} = 1024 \cdot 8 > 625 \cdot 5 = 5^5,$$

следовательно, $2^{91} > 5^{35}$.

б) В силу неравенства $(a+1)(a-1) < a^2$ можно написать $2010 \cdot 2008 < 2009^2$, поэтому $(2010 \cdot 2008)^{2008} < 2009^{2 \cdot 2008}$. Кроме того, очевидно, что $2008^2 < 2009^2$. Перемножая полученные неравенства, получим $2010^{2008} \cdot 2008^{2010} < 2009^{4018}$.

Р 15. Пусть d — НОД чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, тогда $d(b_1 + b_2 + \dots + b_{10}) = 1001$, где $b_k = a_k/d$. Поскольку все b_k — числа натуральные, их сумма не меньше 10 и тогда $d \leq 1001/10 = 100,1$. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, а d — делитель 1001, значит, наибольшее значение d равно $7 \cdot 13 = 91$.

Р 16. а) $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot (11)^n + 12 \cdot (133 + 11)^n$. Это число при делении на 133 дает тот же остаток, что и $121 \cdot (11)^n + 12 \cdot (11)^n = 133 \cdot (11)^n$, т. е. делится на 133.

б) Число $7^n + 3^n - 2 = (8-1)^n + 3^n - 2$ при делении на 8 дает тот же остаток, что и $(-1)^n + 3^n - 2$. Если n — четное, т. е. $n = 2k$, получаем $3^{2k} - 1 = 9^k - 1 = (8+1)^k - 1$. Это число делится на 8, так как дает остаток $1^k - 1 = 0$. Если $n = 2k+1$, имеем число $3^{2k+1} - 3 = 3(9^k - 1)$, делящееся на 8.

Р 17. Мы помним признак делимости на 11: сумма цифр стоящих на нечетных местах, минус сумма цифр, стоящих на четных местах, должна делиться на 11. Сумма всех десяти цифр равна 45. Значит, число 45 надо разбить на два слагаемых, разность которых делится на 11. Нетрудно видеть, что это 28 и 17. Осталось подобрать пять цифр, дающих в сумме 28 (или 17). Например, 8, 7, 6, 5, 2. Нужное число, например, 807 163 5429.

Р 18. После первого вычеркивания остаются числа 2, 4, 6, 8, ..., 100. Все они делятся на 2. После второго вычеркивания остаются числа 4, 8, 12, 16, ..., 100. Все они делятся на 4. После третьего вычеркивания остаются 8, 16, 24, ..., 96, т. е. числа, делящиеся на 8. После 4-го — остаются числа, делящиеся на 16. После пятого — числа, делящиеся на 32, т. е. 32, 64, 96. И после последнего вычеркивания остается число 64.

Р 19. Если искомое число $p = n^3 + m^3 = (n+m)(n^2 - nm + m^2)$, то

$$\begin{cases} n + m = p, \\ n^2 - nm + m^2 = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение можно переписать так:

$$\left(n - \frac{m}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}m^2.$$

Отсюда

$$1 - \frac{3}{4}m^2 \geq 0.$$

Единственное натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству — $m = 1$. Тогда $n^2 - n = 0$ и $n = 1$. Значит, $p = 2$.

Р 20. Заметим, что $p = 3$ удовлетворяет условию задачи — число 181 простое (оно не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13. А $17 > \sqrt{181}$ и его проверять уже не нужно). Если же $p > 3$, то, представив $p = 6k \pm 1$, видим, что число $20p^2 + 1 = 720k^2 \pm 240k + 21$ делится на 3, т. е. быть простым не может (и не может равняться 3).

Р21. Едва ли здесь стоит витийствовать о пути, ведущем к ответу. Но перепишем исходное равенство так: $5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 - 10 \cdot 11 + 2 \cdot 1 + 4 + 3 = 2010$ и теперь уже наведем скобки: $5 \cdot (6 \cdot 7 + 8) \cdot 9 - 10 \cdot (11 + 2 \cdot (1 + 4) + 3) = 2010$. Пусть подозрительный читатель убедится, что чудо свершилось и неверное равенство стало верным. Да, для решения нам пришлось изменить порядок слагаемых и сомножителей в исходном равенстве, что, конечно, нехорошо. На это и намекала формулировка: задача-шутка. Ведь научить, как выходить из затруднительных ситуаций, и есть цель обучения. (Приведенное решение найдено моей студенткой Дианой Гурьяновой).

Ответы

1. 22; 2. $271 = 10^3 - 9^3$; 3. а) $x = 2k + y = 2631 - 91t$, $y = 6k - m = 1973 - 69t$;
 б) $(-2; 0)$, $(-4; -8)$, $(0; 0)$, $(-6; -8)$; 4. Стрелок сделал 12 выстрелов, 9 раз он попал в восьмерку, 2 раза в девятку и 1 раз — в десятку; 5. 150, 225, 375;
 6. 2178; 7. 34 и 51; 8. 115 и 552 или 232 и 435; 9. 42 и 4038 090; 11. 2521;
 14. а) $2^{91} > 5^{35}$; б) $2010^{2008} \cdot 2008^{2010} < 2009^{4018}$; 15. 91; 17. 8071635429;
 18. 64; 19. 2; 20. 3; 21. $5 \cdot (6 \cdot 7 + 8) \cdot 9 - 10 \cdot (11 + 2 \cdot (1 + 4) + 3) = 2010$.

§ 2. Преобразования алгебраических выражений

Предварительный свод законов по теме составляют формулы сокращенного умножения, которые нелишне привести в качестве некоего гимна, который повторяешь про себя в трудную минуту:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; & (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2; \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3; & (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

Третья, шестая и седьмая формулы находят себе применение и в таких формах:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b); & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2); \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2),\end{aligned}$$

и тогда они служат не для умножения, а для разложения (на множители).

В данной теме нет такого разнообразия, к которому привыкаешь в мире целых чисел, и читатель может отдохнуть на том, что ему известно лучше. Однако следует учитывать:

Трудно избежать чувства, что эти математические формулы ведут независимое существование и имеют свой собственный интеллект, что они мудрее даже своих создателей, что мы извлекаем из них больше, чем вначале было в них вложено.

Г. Герц

Хотелось бы, чтобы и к нам тоже можно было отнести эти слова.

1. Разложить на множители выражения: а) $x^4 - y^4$; б) $x^2 - 9y^4$; в) $8x^3 + 27$; г) $x^6 + 64$.

◀ а) Используем формулу разности квадратов, тогда

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2);$$

б) По той же формуле $x^2 - 9y^4 = (x - 3y^2)(x + 3y^2)$;

в) По формуле суммы кубов $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$;

г) И здесь имеем сумму кубов: $x^6 + 64 = (x^2)^3 + 4^3 = (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16)$. ▶

(В целях экономии места ответ выписываем не ко всем примерам.)

К разложению, кроме применения основных формул, может вести удачная группировка, т. е. перестановка слагаемых.

2. Разложить на множители выражения: а) $x^2 - x - y^2 + y$; б) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$; в) $x^2 + 2x - y^2 + 1$.

◀ а) $x^2 - x - y^2 + y = (x^2 - y^2) - (x - y) = (x - y)(x + y) - (x - y) = (x - y)(x + y - 1)$.

б) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = (x^3 - y^3) + (x^2y - xy^2) = (x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x - y) = (x - y)(x^2 + 2xy + y^2) = (x - y)(x + y)^2$.

в) $x^2 + 2x - y^2 + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 - y)(x + 1 + y)$. ▶

Формулы сокращенного умножения можно использовать и для решения задач полюбившейся нам целочисленной тематики.

3. Доказать, что число $2^{12} + 5^9$ является составным.

◀ Ключом к решению является представление данного числа в виде суммы кубов:

$$2^{12} + 5^9 = (2^4)^3 + (5^3)^3 = (2^4 + 5^3)(2^8 - 2^4 \cdot 5^3 + 5^6) = 141 \cdot 13\,881. \quad \blacktriangleright$$

4. Доказать, что число $2^{50} + 3^{60}$ составное.

◀ А в данном случае помогает формула, которая используется наравне с формулами сокращенного умножения, это *формула выделения полного квадрата* (имеющаяся в двух редакциях), т. е.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ или } a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 2^{50} + 3^{60} &= (2^{25})^2 + (3^{30})^2 = (2^{25} + 3^{30})^2 - 2 \cdot 2^{25} \cdot 3^{30} = \\ &= (2^{25} + 3^{30})^2 - (2^{13} \cdot 3^{15})^2 = (2^{25} + 3^{30} - 2^{13} \cdot 3^{15})(2^{25} + 3^{30} + 2^{13} \cdot 3^{15}). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Время от времени мы будем возвращаться к целочисленной проблематике, поскольку применение алгебры расширяет наши возможности в этой теме.

5. Доказать, что число $5^{31} \cdot 13^{25}$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

◀ Для решения этой задачи можно использовать следующее, легко проверяемое тождество:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \quad (*)$$

Поскольку обе составляющие (5 и 13) относятся к требуемому типу — представляются в виде суммы двух квадратов: $5 = 1 + 4$, $13 = 4 + 9$, для доказательства нужно последовательно использовать этот факт.

Прежде всего, представим исходное число в виде $5^6 \cdot (5 \cdot 13)^{25}$. Первый множитель раскладывается легко:

$$5^6 = 5^2 \cdot 5^4 = (9 + 16)(49 + 576) = (3^2 + 4^2)(7^2 + 24^2).$$

Отсюда следует, что $5^6 = a^2 + b^2$, где a и b — целые числа (a именно $a = 75$, $b = 100$).

Для произведения $(5 \cdot 13)^{25}$ имеем:

$$5 \cdot 13 = 65 = 1 + 64 = 1^2 + 8^2, \quad 65^2 = (1^2 + 8^2)(1^2 + 8^2) = 63^2 + 16^2.$$

Тогда и 65^4 , и 65^8 , и 65^{16} , и $65^{24} = 65^8 \cdot 65^{16}$ представляются в виде суммы двух квадратов. Значит, и $65^{25} = c^2 + d^2$ при некоторых целых c и d . Таким образом,

$$5^{31} \cdot 13^{25} = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

и из приведенной выше формулы (*) следует утверждение задачи. ▶

Справедливо, что учителя математики питают слабость к задачам, связанным с целыми числами — ведь для их решения нужно «чувствовать числа», а этот инстинкт ныне исчезает совершенно. И зря:

Для хозяйства, для государства, наконец, для всех искусств ничто так не важно и никакая наука не имеет такой воспитательной силы, как занятие числами. Самое же главное то, что людей от природы сонливых и невосприимчивых это занятие с помощью божественного искусства пробуждает и делает вопреки их природе восприимчивыми, памятьными и проницательными. (Платон, «Законы», V, 747 b).

Следующий шаг науки преобразований — разложение на множители *многочлена*. При этом предполагается, что мы имеем дело с многочленами, у которых все коэффициенты — рациональные числа; а под разложением на множители многочлена мы понимаем разложение его в произведение нескольких многочленов того же типа. Будем считать, что разложение квадратного трехчлена (многочлена степени 2) известно; а именно:

- Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

6. Разложить на множители: а) $x^2 - 3x - 4$; б) $2x^2 - 5x + 2$; в) $2 - x - 6x^2$; г) $9x^2 - 6x + 1$.

◀ Решая квадратные уравнения в каждом случае, находим:

а) $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$;

б) $2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 1/2)(x - 2) = (2x - 1)(x - 2)$;

в) $2 - x - 6x^2 = -(6x^2 + x - 2) = -6(x - 1/2)(x + 2/3) = -(2x - 1)(3x + 2)$;

г) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$. ▶

Формулу разложения квадратного трехчлена можно использовать и для преобразования выражений, содержащих несколько переменных — при условии, что относительно хотя бы одной из них данное выражение является квадратным трехчленом.

7. Разложить на множители: а) $x^2 - 7xy + 10y^2$; б) $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 7x - y + 3$; в) $x^2 - (y + z)x + yz$; г) $(x^2 - 1)^2 + (y + 1)(4x - y - 1)$.

◀ а) Выражение $x^2 - 7xy + 10y^2$ можно считать квадратным трехчленом вида $ax^2 + bx + c$, если принять $a = 1$, $b = -7y$, $c = 10y^2$; тогда дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 49y^2 - 40y^2 = 9y^2.$$

Соответственно корни

$$x_{1,2} = \frac{7y \pm 3y}{2} \quad \text{или} \quad x_1 = 2y, \quad x_2 = 5y.$$

Значит, $x^2 - 7xy + 10y^2 = (x - 2y)(x - 5y)$.

б) Преобразуем данное выражение к виду $ax^2 + bx + c$; мы получим

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 - 7x - y + 3 = 2x^2 - (3y + 7)x - 2y^2 - y + 3.$$

Итак $a = 2$, $b = -(3y + 7)$, $c = -2y^2 - y + 3$.

Считаем дискриминант: $D = (3y+7)^2 - 4 \cdot 2(-2y^2 - y + 3)$; после упрощений получаем

$$D = 25y^2 + 50y + 25 = (5y + 5)^2.$$

Значит,

$$x_1 = \frac{3y + 7 - 5y - 5}{4} = -\frac{y-1}{2}, \quad x_2 = 2y + 3.$$

Окончательно разложение имеет вид:

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 - 7x - y + 3 = 2 \left(x + \frac{y-1}{2} \right) (x - 2y - 3) = (2x + y - 1)(x - 2y - 3);$$

в) Взглянув на выражение $x^2 - (y+z)x + yz$, каждый школьник, конечно, узнает что-то до боли знакомое: **теорема Виета!** Как же без нее? Напомним:

Если уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 , то $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 x_2 = c$.

Значит, $x^2 + bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$. Поэтому исходное выражение $x^2 - (y+z)x + yz$, как квадратный трехчлен относительно x , имеет корни y и z и, следовательно,

$$x^2 - (y+z)x + yz = (x-y)(x-z).$$

г) Поскольку переменная y входит в данное выражение в степенях не выше второй, перепишем его в виде

$$-y^2 + (4x-2)y + (x^2-1)^2 + 4x-1$$

и будем считать квадратным трехчленом относительно y . Дискриминант

$$\begin{aligned} D(x) &= (4x-2)^2 + 4(x^2-1)^2 + 16x-4 = \\ &= 4(4x^2-4x+1+x^4-2x^2+1+4x-1) = 4(x^2+1)^2 \end{aligned}$$

и корни квадратного уравнения $y^2 - (4x-2)y - (x^2-1)^2 - 4x+1 = 0$ таковы:

$$y_1 = \frac{4x-2+2(x^2+1)}{2} = x^2+2x, \quad y_2 = \frac{4x-2-2(x^2+1)}{2} = -x^2+2x-2,$$

поэтому искомое разложение имеет вид $-(y-y_1)(y-y_2)$ или $(y_1-y)(y-y_2)$, т. е.

$$(x^2-1)^2 + (y+1)(4x-y-1) = (x^2+2x-y)(y+x^2-2x+2). \quad \blacktriangleright$$

Разложение на множители многочлена третьей (четвертой, пятой и т. д.) степени возможно при наличии у него целого (рационального) корня. Найти этот корень можно подбором: как говаривал, излагая материал, Марк Иванович Сканава, «читателю должно быть известно», что целый корень многочлена $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ следует искать среди делителей свободного члена a_n , а в случае дробного корня вида $x_0 = p/q$ числитель должен быть

делителем a_n , а знаменатель — делителем старшего коэффициента a_0 . (Доказательство см. в § 24.) При этом в расчет берутся как положительные, так и отрицательные делители. Нахождение одного корня позволяет понизить степень многочлена на единицу, выделив в нем множитель вида $(x - x_0)$.

Этот круг вопросов связан с так называемой теоремой Безу, которую мы здесь формулируем (а доказываем в § 24):

Остаток от деления многочлена $f(x) = a_0x^n + ax^{n-1} + \dots + a_n$ на $x - a$ равен $f(a)$.

В частности, если $x = a$ — корень многочлена $f(x)$ (или корень уравнения $f(x) = 0$), то $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка. И тогда $f(x)$ можно представить в виде произведения $f(x) = (x - a)p(x)$, где $p(x)$ — некоторый многочлен.

8. Разложить на множители многочлены: а) $x^3 - 3x^2 - 5x + 7$; б) $x^3 - x + 6$;
в) $6x^4 - 7x^3 - x^2 - 14x - 8$.

◀ а) Поскольку свободный член $a_3 = 7$ — число простое, целые корни многочлена следует искать среди чисел $\pm 1, \pm 7$. Снова повторим вслед за Марком Ивановичем: «Испытав делители свободного члена этого уравнения, с радостью обнаруживаем, что делитель $x_1 = 1$ является его корнем». Значит, выражение $x^3 - 3x^2 - 5x + 7$ можно представить в виде произведения двух множителей $x^3 - 3x^2 - 5x + 7 = (x - 1) \cdot p(x)$, где $p(x)$ — некоторый квадратный трехчлен, т. е. $p(x) = ax^2 + bx + c$. Найти его можно разными способами.

Первый способ. Выполним умножение

$$(ax^2 + bx + c)(x - 1) = ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + cx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c;$$

полученное выражение должно равняться $x^3 - 3x^2 - 5x + 7$. Значит, $a = 1$, $b - a = -3$, $c - b = -5$, $-c = 7$.

Отсюда $b = -2$, $c = -7$ и $x^3 - 3x^2 - 5x + 7 = (x - 1)(x^2 - 2x - 7)$.

Второй способ. Выполним деление столбиком многочлена

$x^3 - 3x^2 - 5x + 7$ на $(x - 1)$. Результатом будет $x^2 - 2x - 7$.

Третий способ. Выполним тождественные преобразования выражения

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 7,$$

направленные на выделение множителя $x - 1$; имеем:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 5x + 7 &= (x^3 - x^2) - (2x^2 - 2x) - (7x - 7) = \\ &= x^2(x - 1) - 2x(x - 1) - 7(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 2x - 7). \end{aligned}$$

б) Целый корень ищем среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Многочлен равен нулю при $x = -2$. Значит, $x^3 - x + 6 = (x + 2) \cdot p(x)$. Любым из описанных

методов ищем $p(x)$. При делении уголком исходный многочлен (в котором отсутствует слагаемое со второй степенью x) можно представить в виде

$$x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 6.$$

Рекомендуем третий способ:

$$x^3 - x + 6 = (x^3 + 8) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3).$$

в) Многочлен $6x^4 - 7x^3 - x^2 - 14x - 8$ может иметь как целые, так и дробные корни; их надо искать среди чисел *

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{6}.$$

Корнями будут $x_1 = 2$ и $x_2 = -1/2$. Для разложения можно вначале разделить многочлен на $x - 2$, а потом — полученный многочлен третьей степени — на $x + 1/2$; но можно поступить и иначе: сразу разделить

$$6x^4 - 7x^3 - x^2 - 14x - 8$$

на произведение

$$2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x + 1) = 2x^2 - 3x - 2.$$

Мы получим тогда

$$6x^4 - 7x^3 - x^2 - 14x - 8 = (2x^2 - 3x - 2)(3x^2 + x + 4).$$

9. Сократить дробь

$$\frac{2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2}{2x^3 - x^2 + x - 2}.$$

◀ Разложим на множители знаменатель:

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + x - 2 &= 2(x^3 - 1) - x(x - 1) = \\ &= (x - 1)(2x^2 + 2x + 2 - x) = (x - 1)(2x^2 + x + 2). \end{aligned}$$

Далее рассуждаем так: если данная дробь сократима, то это возможно, только если числитель делится на $2x^2 + x + 2$; ведь на $x - 1$ числитель делиться не может, так как $x = 1$ не является его корнем. Разделив $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$ на $2x^2 + x + 2$, получим частное $x^2 + 1$. Значит,

$$\frac{2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2}{2x^3 - x^2 + x - 2} = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

При разложении на множители (являющиеся многочленами с рациональными коэффициентами) двучленов $x^n \pm 1$, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ возможны две ситуации: (а) число n — нечетное; тогда выражение $x^n \pm 1$ (многочлен степени n) имеет корень ∓ 1 и выполнив деление столбиком, можно получить разложения

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1);$$

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots - x + 1).$$

(б) Если число n — четное, то при $n = 2, 4, 8, 16, \dots$ (степени двойки) разложение (в произведение многочленов указанного вида) невозможно; в остальных случаях n представим в виде $n = 2k$, где $k = 3, 5, 7, \dots$, либо $k = 6, 10, 12, 14, 18, \dots$. При нечетных k делаем замену $x^2 = y$, и $x^{2k} \pm 1 = y^k \pm 1$ раскладывается в соответствии с пунктом (а); при четных k делаем замену $x^4 = z$ и т.д.

10. Разложить на множители двучлены $x^5 - 1$ и $x^7 + 1$.

◀ Имеем: $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$; аналогично

$$(x^7 + 1) = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1). \quad \blacktriangleright$$

11. Разложить: а) $x^{10} + 1$; б) $x^{12} + 1$; в) $x^{40} + 1$.

◀ а) $n = 10 = 2 \cdot 5$, $k = 5$ — нечетное, поэтому заменяем $x^2 = y$. Тогда

$$x^{10} + 1 = y^5 + 1 = (y + 1)(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) = (x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1).$$

б) $n = 12 = 2 \cdot 6$, $k = 6$ — четное, значит, $x^4 = z$ и $x^{12} + 1 = z^3 + 1$ — раскладываем как сумму кубов.

в) Замена $x^4 = z$ приводит к $z^{10} + 1$, а это уже разложено в пункте а). ▶

Из всего сказанного следует, что выражение $a^n + b^n$ ($n \geq 3$) при нечетных n делится на $a + b$, а при четных, не являющихся степенью двойки, на $a^2 + b^2$. Эти соображения помогают также и в некоторых задачах целочисленной тематики.

12. Доказать, что число $9^{15} + 2^{30}$ делится на 13.

◀ Имеем: $9^{15} + 2^{30} = 9^{15} + 4^{15}$; здесь $n = 15$ (т.е. нечетное), значит, сумма делится на $9 + 4 = 13$. ▶

Многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ вызывает недвусмысленные ассоциации с условной записью целого числа в виде $a_0a_1 \dots a_n$, которой мы всюду пользовались в предыдущем параграфе (правда, нумерация индексов была обратной, но это, как говорится, мелочи), если положить $x = 10$. Таким образом, любое целое число — это

значение при $x = 10$ некоторого многочлена $f(x)$. И ряд задач, связанных с многочленами, можно считать разновидностью темы «делимость». Стоит запомнить, что: $f(0) = a_n$, т. е. значение многочлена в нуле равно его свободному члену;

$$f(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

т. е. сумма коэффициентов многочлена равна его значению в 1. Это верно, в частности, для квадратного трехчлена и используется в задачах, связанных с последним (играющим далеко не последние роли в поступательной математике).

13. Найти сумму коэффициентов многочлена, полученного после раскрытия скобок в выражении $(3x^2 - 11x + 7)^{25}$.

◀ Согласно вышесказанному, данная сумма равна $f(1) = (-1)^{25} = -1$. Здесь как-то сами-собой вспоминаются слова И. А. Крылова:

Случается нередко нам,
И труд и мудрость видеть там,
Где стоит только догадаться
За дело просто взяться. ▶

14. Остатки от деления некоторого многочлена $f(x)$ на $x + 2$ и $x - 3$ равны -2 и 8 соответственно. Какой остаток даст этот многочлен при делении на $(x + 2)(x - 3)$?

◀ Если многочлен $f(x)$ при делении на многочлен $p(x)$ дает остаток $r(x)$, то это записывается в виде $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$, где $q(x)$ — некоторый многочлен (частное), а $r(x)$ — многочлен, степень которого меньше степени многочлена $p(x)$.

В применении к нашей задаче эти соображения-определения означают, что надо найти $r(x)$ из условия

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)q(x) + r(x).$$

Поскольку степень $r(x)$ должна быть меньше степени многочлена-делителя, т. е. в данном случае $(x + 2)(x - 3)$, $r(x)$ — многочлен первой степени, иными словами $r(x) = ax + b$.

Из условия следует, что $f(-2) = -2$, значит, $r(-2) = -2$, т. е.

$$-2a + b = -2.$$

Аналогично $f(3) = 8$ и $r(3) = 8$, т. е. $3a + b = 8$. Вычитая из второго равенства первое, получим $5b = 10$, откуда $b = 2$. Тогда $a = 2$. Значит,

$$r(x) = 2x + 2. \quad \blacktriangleright$$

Привлечение теоремы Безу и соображений, связанных с многочленами, позволяет получить еще один способ решения некоторых задач на делимость, не использующий бинома.

15. Найти остаток от деления 7^{50} на 3.

◀ Согласно теореме Безу, если числа a и b дают при делении на k одинаковые остатки, то и числа $f(a)$ и $f(b)$ дают при делении на k одинаковые остатки. (Здесь $f(x)$ — некоторый многочлен.) Поскольку $7^{50} = 49^{25}$, положим $f(x) = x^{25}$. Число 49 при делении на 3 дает остаток 1, значит, число $f(49) = 49^{25}$ дает при делении на 3 тот же остаток, что и $f(1) = 1$, т. е. 1. ▶

16. Доказать, что $2^{60} + 7^{30}$ делится на 13.

◀ Поскольку $2^{60} + 7^{30} = 16^{15} + 49^{15}$, а 16 и 49 при делении на 13 дают остатки 3 и 10 соответственно, исходное число даст при делении на 13 тот же остаток, что и $3^{15} + 10^{15}$. Но $3^{15} + 10^{15}$ делится на 13 в силу формулы

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

которую можно считать обобщением формул, полученных в примерах 10 и 11. ▶

Применение теоремы Безу становится неизбежным в случае многочлена с *целыми* коэффициентами, ведь все значения такого многочлена — целые числа.

17. Существует ли многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $f(0) = 0$, $f(2) = 1$?

◀ Число $f(2) - f(0) = 1$ должно делиться на $2 - 0 = 2$, чего не наблюдается. Значит, многочлена с указанными свойствами не существует. ▶

18. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0.$$

Доказать, что при любом целом n число $f(n)$ делится на 3.

◀ Разность $f(n) - f(-1) = f(n)$ должна делиться на $n + 1$; разность

$$f(n) - f(0) = f(n)$$

должна делиться на n . Наконец разность $f(n) - f(1) = f(n)$ должна делиться на $n - 1$. Значит, $f(n)$ делится на три последовательных целых числа $n - 1$, n , $n + 1$, одно из которых кратно трем. Поэтому $f(n)$ также кратно трем. ▶

- 19.** Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем $f(x) = 2$ при пяти различных значениях аргумента. Доказать, что $f(x)$ не может иметь целых корней.

◀ Пусть $f(x_k) = 2$, $k = 1, 2, \dots, 5$ и предположим, что $f(x_0) = 0$, где x_0 — целое. Тогда каждая разность вида $f(x_k) - f(x_0) = f(x_k) = 2$ должна делиться на $x_k - x_0$. Но чисел вида $x_k - x_0$, очевидно, пять, тогда как делителей у 2 — только четыре: $\pm 1, \pm 2$. Значит, хотя бы два числа вида $x_k - x_0$ должны совпадать, что невозможно по условию. ▶

Поскольку разложение на множители — краеугольный камень алгебры уравнений, не пожалеем сил на разбор трех более хитроумных примеров.

- 20.** Разложить в произведение нескольких многочленов (с произвольными, не обязательно рациональными коэффициентами):

$$\text{а) } x^4 + 1; \quad \text{б) } x^4 + x^2 + 1; \quad \text{в) } x^5 + x + 1.$$

При решении этих примеров необходимо действовать согласно рецепту старого мудреца. Как вы помните, в одной из старейших математических задач говорилось об имуществе некоего араба, который завещал своим трем сыновьям стадо верблюдов: старшему сыну — половину стада, среднему — третью часть, младшему — девятую часть наследства. Сыновьям пришлось туго: в стаде оказалось 17 верблюдов. Они обратились к мудрецу, который посоветовал им одолжить одного верблюда и приступить к разделу, имея 18 верблюдов. Сделав так, братья успешно справились с задачей: старший получил 9 верблюдов, средний 6, младший 2 верблюда; итого — 17. Одолженного верблюда вернули хозяину. Так вот:

◀ а) Заметим, что выражение $x^4 + 1$ представляет собой сумму квадратов, то есть выражение вида $a^2 + b^2$. Разложить его на множители, разумеется, нельзя, но, как мы знаем, можно *дополнить до полного квадрата*:

$$a^2 + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = (a + b)^2 - 2ab$$

(выражение $2ab$ — это и есть лишний верблюд). Что это даст? Разность

$$(a + b)^2 - 2ab$$

может оказаться разностью *квадратов*, и тогда...

Попробуем:

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2}).$$

Задача решена.

$$\text{б) } x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 1) + x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

в) Чтобы применить метод старого мудреца к выражению $x^5 + x + 1$, заметим, что оно напоминает неполный квадрат суммы из формулы

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

а потому отнимем от него, а затем прибавим к нему x^2 ; тогда

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1 = \\ &= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

Существует и другой, более рутинный метод, позволяющий получить искомое разложение — так называемый «алгоритм Кронекера» (или даже самого Ньютона).

Он состоит в том, чтобы представить исходное выражение в виде

$$x^5 + x + 1 = (x^2 + ax + b)p(x),$$

(где $p(x)$ — некоторый многочлен 3-й степени с целыми коэффициентами, который нас сейчас не интересует) и найти числа a и b из соображений делимости. А именно: подставим в написанное соотношение два произвольных целых значения переменной, например, $x = 0$ и $x = -1$. Мы получим два равенства

$$1 = c \cdot p(0) \quad \text{и} \quad -1 = (1 - b + c)p(-1).$$

Поскольку $p(0)$ и $p(-1)$ — числа целые, из первого равенства следует, что c может равняться только ± 1 ; тогда из второго следует, что $b = 1$ или $b = 3$. Второе значение b не годится, поэтому $b = c = 1$. Таким образом, мы приходим к равенству $x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)p(x)$ и теперь уже многочлен $p(x)$ находится делением $x^5 + x + 1$ на $x^2 + x + 1$. ►

А вот пример, где результаты, полученные при разложении на множители многочленов, применяются в другой ситуации:

21. Доказать, что числа 3 200 021 и 24 300 031 являются составными.

◀ Если хоть немножко «дружить с числами», нельзя не сказать себе, как Винни-Пух: «Эти $32 = 2^5$ и $243 = 3^5$ здесь неспроста». И действительно,

$$3\,200\,021 = 20^5 + 20 + 1, \quad 24\,300\,031 = 30^5 + 30 + 1,$$

а поскольку $x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$, мы можем написать

$$3\,200\,021 = (20^2 + 20 + 1)(20^3 - 20^2 + 1) = 421 \cdot 7601,$$

и соответственно

$$24\,300\,031 = (30^2 + 30 + 1)(30^3 - 30^2 + 1) = 931 \cdot 26\,101. \quad \blacktriangleright$$

Традиционный раздел темы — примеры на преобразования «по действиям». Как правило, действия эти сводятся к приведению дробей к общему знаменателю, последующему разложению их числителей и знаменателей на множители и сокращениям; после повторения этого цикла несколько раз получается ответ.

$$22. \text{ Упростить выражение: } \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}.$$

◀ Едва ли следует сразу же приводить к общему знаменателю все три дроби — полученное выражение будет слишком громоздким. Сложим первые две:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} &= \frac{ab+ac-b^2-bc+ab-ac+b^2-bc}{(a+b)(b+c)} = \\ &= \frac{2(ab-bc)}{(a+b)(b+c)} = \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}; \end{aligned}$$

теперь добавим третью:

$$\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} - \frac{a-c}{c+a};$$

обратим внимание на подсказку в виде множителя $(a-c)$ и вынесем его за скобку:

$$\begin{aligned} \frac{(a-c)(2b(c+a) - (a+b)(b+c))}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{(a-c)(2bc+2ba-ab-ac-b^2-bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= \frac{(a-c)(bc+ba-ac-b^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a-c)(bc-b^2-ac+ba)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= \frac{(a-c)(b(c-b)-a(c-b))}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a-c)(c-b)(b-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Неизвестно, конечно, согласится ли непредвзятый наблюдатель с тем, что мы «упростили» исходное выражение: может быть, ему покажется, что мы его усложнили. Но такова уж природа подобных задач. (См. по этому поводу примечание в начале § 22.) ►

Мы просим прощения у педантичного читателя за то, что специально не обозначили момент, когда наряду с целыми стали оперировать и рациональными (а порой и иррациональными) числами и выражениями. В следующем параграфе мы немного поговорим об этом эпохальном переходе.

Нередко значение имеет *порядок* действий и, кроме того, сами действия можно понимать по-разному. Один путь ведет к ответу быстрее, чем другой, но никаких общих рецептов здесь, конечно, нет.

23. Упростить: $(a+1)(a+2)(a^2+4)(a-2)(a-1)(a^2+1)$.

◀ Переставим сомножители:

$$(a+1)(a-1)(a^2+1)(a-2)(a+2)(a^2+4);$$

первые три скобки дадут при перемножении $(a^2-1)(a^2+1) = a^4-1$, последние три a^4-16 ; итого $(a^4-1)(a^4-16)$. ▶

Начиная писать решение, всякий раз испытываешь некое недоумение: а вдруг ему (читателю) уже всё ясно? Будем же считать, что этот текст — наше совместное произведение...

Не дай понять ученику, что ты его учи,
Пусть думает, что знал и сам, да только позабыл.

24. Упростить:

$$\frac{x+8}{x^2-4} \cdot \left(\frac{x-2}{8x+64} - x^2+4 \right) + \frac{48x+95}{8x+16} + x+3.$$

◀ Вероятно, обычный путь — преобразовать три слагаемые в скобке к одной дроби, а потом выполнить умножение; поступим немного иначе: выполним умножение $(x+8)/(x^2-4)$ отдельно на дробь $(x-2)/(8x+64)$, отдельно на двучлен $-x^2+4$. Мы получим:

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{8(x+8)} + \frac{x+8}{x^2-4}(-x^2+4) = \frac{1}{8x+16} - x-8;$$

теперь оставшиеся слагаемые сгруппируем так:

$$\left(\frac{1}{8x+16} + \frac{48x+95}{8x+16} \right) - x-8+x+3.$$

Окончательно:

$$\frac{48x+96}{8x+16} - 5 = \frac{48(x+2)}{8(x+2)} - 5 = 6-5=1. \quad \blacktriangleright$$

На некоторые примеры можно взглянуть с единой точки зрения. Бывает так, что выражение, подлежащее упрощению, содержит несколько переменных, входящих в него *симметричным образом*. Не станем точно определять, что это значит, но будем считать, что выражение симметрично относительно переменных a и b , если при замене в нём a на b , а b на a ($a \leftrightarrow b$) выражение не меняется; например, симметричны выражения $a+b$, $3a^2+3b^2$, ab . Выражение $a-b$ при указанной замене изменяется на $b-a$, то есть меняет знак: такие выражения тоже следует отличать, их принято называть *антисимметричными*.

Может быть, кому-то данные тонкости покажутся излишними, но при разложении на множители соображения симметрии играют не последнюю роль. Дело в том, что антисимметричное выражение обращается в нуль при $a = b$; это значит, что при разложении его на множители можно сразу выделить множитель $a - b$. Если же выражение антисимметрично по трём парам переменных, скажем, a и b , b и c , c и a , то выделяется сразу множитель $(a - b)(b - c)(c - a)$. Вот несколько иллюстраций.

25. Разложить на множители: $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$.

◀ *1-ое решение.* Если мы заменим в данном выражении $a \leftrightarrow b$, то получим

$$ab(b - a) + ac(a - c) + cb(c - b) = -(ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)),$$

значит, оно антисимметрично по a и b ; то же самое можно сказать про пары b и c , c и a . Поэтому

$$ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = x \cdot (a - b)(b - c)(c - a), \quad (*)$$

где x — некоторое (неизвестное пока) число. Почему именно число, а не более сложное буквенное выражение? А потому что при раскрытии скобок в обеих частях равенства получаются суммы слагаемых вида $a^k b^l c^m$, (где $k + l + m = 3$; например, в случае $a^2 b$ $k = 2$, $l = 1$, $m = 0$). Чтобы найти x , подставим в обе части равенства (*) $c = 0$; мы получим $ab(a - b) = x \cdot (a - b) \cdot b \cdot (-a)$; значит, $x = -1$ и

$$ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = -(a - b)(b - c)(c - a).$$

2-е решение. Можно, конечно, оставить в стороне высокие соображения и добиться цели последовательной группировкой (которой поможет тот факт, что данное выражение можно считать квадратным трехчленом относительно a):

$$\begin{aligned} a^2(b - c) - a(b - c)(b + c) + bc(b - c) &= (b - c)(a^2 - ab - ac + bc) = \\ &= (b - c)(a^2 - a(b + c) + bc) = (b - c)(a - c)(a - b). \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Какой путь выбирать в каждом конкретном случае — учащийся решает сам.

26. Разложить на множители выражение

$$yz(y^2 - z^2) + xz(z^2 - x^2) + xy(x^2 - y^2).$$

◀ Вот как выглядит решение, основанное на последовательной группировке:

$$\begin{aligned} y^3z - yz^3 + xz^3 - x^3z + x^3y - xy^3 &= (y^3z - xy^3) - (yz^3 - x^3y) + (xz^3 - x^3z) = \\ &= y^3(z-x) - y(z^3 - x^3) + xz(z^2 - x^2) = (z-x)(y^3 - y(z^2 + zx + x^2) + \\ &\quad + xz(z+x)) = (z-x)((y^3 - yz^2) - (yzx - xz^2) - (yx^2 - x^2z)) = \\ &= (z-x)(y-z)(y(y+z) - zx - x^2) = (z-x)(y-z)(y^2 + yz - zx - x^2) = \\ &= (z-x)(y-z)(y^2 - x^2 + yz - zx) = (z-x)(y-z)(y-x)(y+x+z). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Громоздко и однообразно? Может быть. А если бы мы воспользовались «высшими соображениями»? Да, предлагаемое выражение антисимметрично по каждой паре переменных (проверку проводим самостоятельно), значит, мы, аналогично предыдущему примеру, могли бы сразу написать:

$$yz(y^2 - z^2) + xz(z^2 - x^2) + xy(x^2 - y^2) = p(x, y, z)(x-y)(y-z)(z-x). \quad (**)$$

Разница заключается в том, что здесь мы таким образом получаем ответ не с точностью до числового множителя k , а с точностью до неизвестного *многочлена* $p(x, y, z)$, зависящего от всех трёх переменных: дело в том, что степень (понимаемая в смысле примера 26) исходного выражения выше, чем степень произведения $(x-y)(y-z)(z-x)$. Насколько выше? На единицу. Значит, и степень многочлена $p(x, y, z)$ равна единице; в общем виде

$$p(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$$

(причем $D = 0$ по соображениям равенства степеней). Коэффициенты A, B, C можно найти, подставляя в соотношение $(**)$ значения переменных (например, подставив $x = 0$ и сократив обе части равенства на $yz(y-z)$), получим

$$-y - z = By + Cz,$$

откуда $B = C = -1$; однако «высшие соображения» говорят, что многочлен p должен быть *симметричным* (или *симметрическим*), то есть не меняться при заменах $x \leftrightarrow y$, $y \leftrightarrow z$, $z \leftrightarrow x$. Действительно, поменяем в $(**)$ $x \leftrightarrow y$; мы получим

$$xz(x^2 - z^2) + yz(z^2 - y^2) + yx(y^2 - x^2) = p(y, x, z)(y-x)(x-z)(z-y)$$

или

$$-(yz(y^2 - z^2) + xz(z^2 - x^2) + xy(x^2 - y^2)) = -p(x, y, z)(x-y)(y-z)(z-x).$$

Отсюда следует, что $p(x, y, z) = p(y, x, z)$, то есть перестановка $x \leftrightarrow y$ не меняет многочлен p . Можно показать, что то же самое имеет место и при перестановках $y \leftrightarrow z$, $z \leftrightarrow x$. Но тогда $A = B = C$. Так же, как в примере 25, устанавливаем, что все три коэффициента равны -1 . Значит, $p(x, y, z) = -(x+y+z)$.

27. Упростить

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

◀ Понадеемся на симметрию и не убоимся сложить сразу все три дроби (исходное выражение обозначим через X). Имеем

$$X = \frac{a^2(a+b)(a+c)(c-b) + b^2(b+c)(b+a)(a-c) + c^2(c+a)(c+b)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Числитель антисимметричен по каждой паре переменных (проверяем сами), значит, его, как и в примере 26, можно представить в виде

$$p(a, b, c)(a-b)(b-c)(c-a);$$

многочлен $p(a, b, c)$ опять-таки симметричен. Вот только степень у него теперь должна быть 2. Какой вид он может иметь? Скорее всего,

$$x(a^2 + b^2 + c^2) + y(ab + bc + ca),$$

где x и y — неизвестные (пока) коэффициенты (другую симметричную комбинацию второй степени не составить). Итак, запишем

$$\begin{aligned} a^2(a+b)(a+c)(c-b) + b^2(b+c)(b+a)(a-c) + c^2(c+a)(c+b)(b-a) = \\ = (x(a^2 + b^2 + c^2) + y(ab + bc + ca)) \cdot (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

Чтобы найти x и y , подставим сюда $a = 0$; получим соотношение

$$(b+c)bc(c^2 - b^2) = (c-b)bc((b^2 + c^2)x + bc \cdot y),$$

что после сокращения на $bc(b-c)$ даст $(b+c)^2 = (b^2 + c^2)x + bc \cdot y$, откуда $x = 1$, $y = 2$. Значит, $p(a, b, c) = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) = (a+b+c)^2$ и окончательно

$$X = \frac{(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = (a+b+c)^2. \quad \blacktriangleright$$

Для тех, кто хочет пойти традиционным путем, не вникая в тонкости симметрии (и зря: «симметрия, как бы широко или узко мы ни понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек в течение веков пытался объяснить и создать порядок, красоту, совершенство». — Г. Вейль), мы дублируем это задание в упражнениях для самостоятельной работы (и приводим соответствующее решение).

Отметим, в заключение, что при возрастании степени многочлена $p(a, b, c)$ в игру вступает ещё одна симметричная комбинация переменных: abc . Из этих трех компонент: $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc состоит любой симметрический многочлен от трёх переменных.

Итак, и в математике соображения симметрии значат много — не только в физике, где решение половины задач начинается с магической фразы: «Из соображений симметрии ясно...». Но оставим физику, которую «я скорее всего уподобил бы трухе, соломе, а математику — хлебному зерну, пище для разума». (Б. Кавальери)



Второй привал зачарованных охотников

1. Друзья, разложите на множители следующие выражения:

- а) $2x^3 - x^2 - 7x + 2$; б) $x^3 + x - 2$; в) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36$;
 г) $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 2y$; д) $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc$;
 е) $4x^4 - x^2y^2 + 2x^2y - x^2 + 2xy - 2x - 1$; ж) $a^{14} + a^{13} + a^{12} + \dots + a + 1$.

2. а) Докажите, что число $2^{14} + 3^8$ составное.

б) То же для числа

$$3^{54} - 3^{27} \cdot 2^{12} + 2^{24};$$

в) То же для числа 1280000401.

3. Докажите, что число $2^9 + 2^{99}$ делится на 100.

4. Простое или составное число $2009^{2010} - 1$?

5. Упростите:

а) $\frac{a^4 - 9a^3 + 12a^2 + 9a - 13}{a^4 - 10a^3 + 22a^2 - 13a}$; б) $\frac{a^8 + a^4 - 2a^2 + 6}{a^4 + 2a^2 + 3} + 2a^2 - 2$;

в) $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{(3x^2 + 3x - 3)^2}$; г) $\frac{x^3 + a^3}{x^4 + a^2x^2 + a^4}$.

6. Выполните умножение:

$$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9 + x^{10}).$$

7. Разложите на множители:

а) $(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$; б) $x^2 + 4x - y^2 + 6y - 5$;

в) $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$.

8. Докажите равенства:

а) $\left(\frac{3a+4}{6a+6} + \frac{4}{3a+6} - 2\right) : \frac{3a+4}{3a+6} - \frac{3a^2+a-1}{2a+2} = -\frac{3a+1}{2}$.

б) $\frac{a+9}{a^2-9} \cdot \left(\frac{a-3}{9a+81} + 9 - a^2\right) + \frac{161+54a}{9a+27} + a = -3$.

9. Упростите следующие выражения (от М. И. Сканава)

$$а) \frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{1 - a^2 - x^2}{2ax}\right) \quad \text{при } x = \frac{1}{a-1};$$

$$б) \frac{(a-b)^2 + ab}{(a+b)^2 - ab} : \frac{a^5 + b^5 + a^2b^3 + a^3b^2}{(a^3 + b^3 + a^2b + ab^2)(a^3 - b^3)};$$

$$в) \frac{a^{-6} - 64}{4 + 2a^{-1} + a^{-2}} \cdot \frac{a^2}{4 - 4a^{-1} + a^{-2}} - \frac{4a^2(2a+1)}{1-2a};$$

$$г) \frac{1}{b(abc+a+c)} - \frac{1}{a+1/(b+1/c)} : \frac{1}{a+1/b};$$

$$д) \frac{(ab(x^2+y^2) + xy(a^2+b^2)) \cdot ((ax+by)^2 - 4abxy)}{ab(x^2-y^2) + xy(a^2-b^2)}.$$

10. Упростите:

$$а) \frac{a^4 - (a-1)^2}{(a^2+1)^2 - a^2} + \frac{a^2 - (a^2-1)^2}{a^2(a+1)^2 - 1} + \frac{a^2(a-1)^2 - 1}{a^4 - (a+1)^2};$$

$$б) \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} + \frac{2a(a-1)^2}{a^4 + a^2 + 1} + \frac{2a^2(a^2-1)^2}{a^8 + a^4 + 1}.$$

11. а) Найдите остаток от деления многочлена $x^{2010} + x^{2009} + 1$ на $x+1$.

б) Многочлен $f(x)$ дает остаток $2x-5$ при делении на x^2-5x+6 . Какой остаток он даст при делении на $x-3$?

в) Найдите остаток от деления $(x^2+x+1)^{100}$ на x^2+1 .

г) Делится ли многочлен $x^{99} - 3x^{69} + 4$ на $x^5 + x^3 + 2$ без остатка?

д) Найдите остаток от деления x^{91} на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Какую роль играет показатель степени 91?

12. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

а) Докажите, что если при двух целых значениях a и b имеем $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, то $|a-b| = 1$.

б) Докажите, что если числа $f(1)$ и $f(2)$ четные, то при любом целом n число $f(n)$ также четное.

в) Существует ли многочлен $f(x)$, т.ч. $f(1) = n$, $f(n) = 1$ при некотором натуральном $n > 2$? А такой, что $f(1) = n$, $f(n) = 2$?

г) Докажите, что если числа $f(0)$ и $f(1)$ нечетные, то многочлен $f(x)$ не имеет целых корней.

д) Пусть $f(-1) = -3$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$. Докажите, что при любом целом n число $f(n)$ делится на 3.

13. Найдите числа a, b, c , при которых для всех допустимых значений x имеет место равенство

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

14. Упростите:

$$\text{а) } \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)};$$

$$\text{б) } \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)};$$

$$\text{в) } \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)};$$

$$\text{г) } \frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

15. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то

$$\left(\frac{a^2}{b-c} + \frac{b^2}{c-a} + \frac{c^2}{a-b} \right) \left(\frac{b-c}{a^2} + \frac{c-a}{b^2} + \frac{a-b}{c^2} \right) = 4abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^3.$$

Советы и решения

Р 1. а) $2x^3 - x^2 - 7x + 2 = 0$ при $x = 2$, поэтому

$$2x^3 - x^2 - 7x + 2 = (x-2)p(x),$$

где $p(x)$ — некоторый многочлен, который находим либо делением на $x-2$, либо (более или менее принудительной) группировкой, либо методом неопределенных коэффициентов. Второй из названных методов дает:

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 7x + 2 &= 2x^3 - 4x^2 + (3x^2 - 7x + 2) = \\ &= 2x^2(x-2) + (x-2)(3x-1) = (x-2)(2x^2 + 3x - 1). \end{aligned}$$

б) $x^3 + x - 2 = 0$ при $x = 1$, откуда

$$\begin{aligned} x^3 + x - 2 &= (x^3 - x^2) + (x^2 + x - 2) = \\ &= x^2(x-1) + (x-1)(x+2) = (x-1)(x^2 + x + 2). \end{aligned}$$

в) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ при $x = 1$, поэтому

$$\begin{aligned} (x^4 - 1) - (25x^2 - 60x + 35) &= (x-1)(x+1)(x^2+1) - (x-1)(25x-35) = \\ &= (x-1)(x^3 + x^2 - 24x + 36) = (x-1)(x-2)(x^2 + 3x - 18) = \\ &= (x-1)(x-2)(x-3)(x+6). \end{aligned}$$

г) $(x^2 - 3xy + 2y^2) + (x - 2y) =$

$$= (x-y)(x-2y) + (x-2y) = (x-2y)(x-y+1)$$

д) $a^2(b+c) + a(b^2+c^2+2bc) + bc(b+c) =$

$$= (b+c)(a^2 + (b+c)a + bc) = (b+c)(a+b)(a+c)$$

е) $\dots = -x^2(y^2 - 2y + 1) + 2x(y-1) + 4x^4 - 1 = -x^2(y-1)^2 + 2x(y-1) + 4x^4 - 1.$

Имеем квадратный трехчлен относительно $y - 1$. Его дискриминант

$$D = 4x^2 + 4x^2(4x^4 - 1) = 16x^6.$$

Тогда для корней имеем

$$\begin{cases} y - 1 = \frac{-2x + 4x^3}{-2x^2} = -2x + \frac{1}{x}, \\ y - 1 = 2x + \frac{1}{x}, \end{cases}$$

и разложение завершается:

$$\begin{aligned} & -x^2 \left(y - 1 + 2x - \frac{1}{x} \right) \left(y - 1 - 2x - \frac{1}{x} \right) = \\ & = -(xy - x + 2x^2 - 1)(xy - x - 2x^2 - 1) = (2x^2 + xy - x - 1)(2x^2 - xy + x + 1). \end{aligned}$$

ж) Разбиваем на 3 группы по 5 слагаемых:

$$\begin{aligned} & (a^{14} + a^{13} + \dots + a^{10}) + (a^9 + \dots + a^5) + (a^4 + \dots + a + 1) = \\ & = a^{10}(a^4 + a^3 + \dots + 1) + a^5(a^4 + a^3 + \dots + 1) + (a^4 + a^3 + \dots + 1) = \\ & = (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^{10} + a^5 + 1). \end{aligned}$$

Р 2. а) Используем формулу $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ с последующим разложением разности квадратов в произведение. Имеем

$$\begin{aligned} 2^{14} + 3^8 &= (2^7 + 3^4)^2 - 2 \cdot 2^7 \cdot 3^4 = (128 + 81)^2 - (2^4 \cdot 3^2)^2 = 209^2 - 144^2 = \\ &= (209 - 144)(209 + 144) = 65 \cdot 353. \end{aligned}$$

б) Аналогично

$$\begin{aligned} 3^{34} - 3^{27} \cdot 2^{12} + 2^{24} &= (3^{27})^2 + (2^{12})^2 - 3^{27} \cdot 2^{12} = (3^{27} + 2^{12})^2 - 2 \cdot 3^{27} \cdot 2^{12} - 3^{27} \cdot 2^{12} = \\ &= (3^{27} + 2^{12})^2 - 3^{28} \cdot 2^{12} = (3^{27} + 2^{12})^2 - (3^{14} \cdot 2^6)^2 \end{aligned}$$

и т.д.

в) Поскольку $1280000401 = 20^7 + 20^2 + 1$, разложим на множители многочлен $x^7 + x^2 + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} x^7 + x^2 + 1 &= x^7 - x + x^2 + x + 1 = x(x^6 - 1) + x^2 + x + 1 = \\ &= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x(x^3 + 1)(x - 1) + 1). \end{aligned}$$

Т.е. исходное число равно $421 \cdot (20 \cdot 8001 \cdot 19 + 1)$.

Р 3. Используем формулу суммы кубов. Тогда

$$2^9 + 2^{99} = 2^9(1 + 2^{90}) = 2^9(1 + 2^{30})(1 - 2^{30} + 2^{60}),$$

но, в свою очередь, $2^{30} + 1 = (2^{10} + 1)(2^{20} - 2^{10} + 1)$ и $2^{10} + 1 = 1025$ — делится на 25, а все число делится на 100, поскольку первый множитель 2^9 делится на 4.

Р 4. По разности квадратов

$$2009^{2010} - 1 = (2009^{1005} - 1)(2009^{1005} + 1).$$

Значит, число составное.

Р 5. а) Числитель и знаменатель имеют общий корень $a = 1$. После сокращения на $a - 1$ дробь принимает вид

$$\frac{a^3 - 8a^2 + 4a + 13}{a(a^2 - 9a + 13)} = \frac{(a + 1)(a^2 - 9a + 13)}{a(a^2 - 9a + 13)} = \frac{a + 1}{a}.$$

б) Пусть $a^2 = x$. Дробь принимает вид

$$\frac{x^4 + x^2 - 2x + 6}{x^2 + 2x + 3}.$$

Деление уголком дает $x^2 - 2x + 2$. Итого: $x^2 - 2x + 2 + 2x - 2 = x^2 = a^4$.

в) $\dots = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{9(x^2 + x - 1)^2}$. Числитель делится на $x^2 + x - 1$ без остатка.

Р 6. Пусть первая скобка равна a , вторая — b . Тогда

$$a(x + 1) = x^{11} + 1, \quad b(x - 1) = x^{11} - 1.$$

Поэтому

$$ab = \frac{(x^{11} + 1)(x^{11} - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^{22} - 1}{x^2 - 1} = \frac{t^{11} - 1}{t - 1},$$

где $t = x^2$. Значит, $ab = t^{10} + t^9 + \dots + 1 = x^{20} + x^{18} + \dots + x^2 + 1$.

Р 7. а) Пусть $y + z = a$, $yz = b$. Тогда выражение равно

$$(x + a)(ax + b) - bx = a(x^2 + ax + b).$$

Но $x^2 + ax + b = x^2 + (y + z)x + yz = (x + y)(x + z)$.

б) $\dots = (x + 2)^2 - (y - 3)^2 = (x + 2 - y + 3)(x + 2 + y - 3) = (x - y + 5)(x + y - 1)$.

в) Данное выражение совпадает с тем, что разбиралось в примере 26 (если раскрыть скобки), а потому — ответ тот же.

Р 8. а) Отступим от правила «по действиям» и сразу раскроем скобки, заменяя деление умножением. Получим

$$\frac{3a + 6}{6a + 6} + \frac{4}{3a + 4} - \frac{2(3a + 6)}{3a + 4} = \frac{a + 2}{2(a + 1)} - \frac{6a + 8}{3a + 4} = -\frac{3a + 2}{2(a + 1)}.$$

Теперь отнимем последнюю дробь:

$$-\frac{3a + 2}{2(a + 1)} - \frac{3a^2 + a - 1}{2(a + 1)} = -\frac{3a^2 + 4a + 1}{2(a + 1)} = -\frac{(3a + 1)(a + 1)}{2(a + 1)} = -\frac{3a + 1}{2}.$$

б) И здесь раскроем скобки, получим

$$\frac{1}{9(a + 3)} - a - 9 + \frac{161 + 54a}{9(a + 3)} + a = \frac{162 + 54a}{9(a + 3)} - 9 = \frac{54(3 + a)}{9(a + 3)} - 9 = 6 - 9 = -3.$$

Р 9. а) $\frac{1 + (a + x)^{-1}}{1 - (a + x)^{-1}} = \frac{a + x + 1}{a + x - 1};$

$$\left(1 - \frac{1 - a^2 - x^2}{2ax}\right) = \frac{(a + x)^2 - 1}{2ax} = \frac{(a + x - 1)(a + x + 1)}{2ax}.$$

Тогда всё вместе дает

$$\frac{(a+x+1)^2}{2ax} = \frac{a^3}{2(a-1)},$$

поскольку

$$a+x+1 = a + \frac{1}{a-1} + 1 = \frac{a^2}{a-1}.$$

$$б) \dots = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} : \frac{a^3(a^2 + b^2) + b^3(a^2 + b^2)}{(a(a^2 + b^2) + b(a^2 + b^2))(a^3 - b^3)} =$$

(после сокращения на $a^2 + b^2$)

$$= \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{(a^3 - b^3)(a + b)}{a^3 + b^3} = a - b.$$

в) Обозначим $a^{-1} = x$. Тогда произведение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{x^6 - 64}{x^2 + 2x + 4} \cdot \frac{1}{x^2(x^2 - 4x + 4)} &= \frac{(x^3 - 8)(x^3 + 8)}{(x^2 + 2x + 4)x^2(x - 2)^2} = \\ &= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)x^2(x - 2)^2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2(x - 2)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{4a^2(2a + 1)}{1 - 2a} = \frac{4(x + 2)}{x^2(x - 2)},$$

итог равен

$$\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 4)}{x^2(x - 2)} = \frac{x + 2}{x} = 1 + \frac{2}{x} = 1 + 2a.$$

г) Преобразуем многоэтажные дроби.

$$b + \frac{1}{c} = \frac{bc + 1}{c}, \quad a + \frac{c}{bc + 1} = \frac{abc + a + c}{bc + 1}; \quad a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}.$$

Тогда всё вместе примет вид

$$\frac{1}{b(abc + a + c)} - \frac{bc + 1}{abc + a + c} \cdot \frac{ab + 1}{b} = \frac{1 - (b(abc + a + c) + 1))}{b(abc + a + c)} = -1.$$

д) Первая скобка в числителе после раскрытия скобок и перегруппировки приводится к виду $(ax + by)(bx + ay)$. Вторая скобка в числителе равна $(ax - by)^2$. Знаменатель приводится к виду $(ax - by)(bx + ay)$. Таким образом, всё вместе дает $a^2x^2 - b^2y^2$.

Р 10. а) Раскладывая везде разности квадратов, приводим выражение к виду

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - a + 1)(a^2 + a - 1)}{(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)} + \frac{(a - a^2 - 1)(a + a^2 - 1)}{(a^2 + a - 1)(a^2 + a + 1)} + \frac{(a^2 - a - 1)(a^2 - a + 1)}{(a^2 - a - 1)(a^2 + a + 1)} = \\ = \frac{a^2 + a - 1}{a^2 + a + 1} + \frac{a - a^2 + 1}{a^2 + a + 1} + \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} = 1. \end{aligned}$$

б) Поскольку $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$, сложение первых двух дробей даст

$$\frac{(a^2 - a + 1)^2 + 2a(a^2 - 2a + 1)}{a^4 + a^2 + 1} = \dots = \frac{a^4 - a^2 + 1}{a^4 + a^2 + 1}.$$

Чтобы сложить это выражение с третьей дробью, нужно повторить те же действия с заменой каждой степени a на вдвое большую.

Р 11. а) По теореме Безу остаток равен $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$.

б) Пусть $f(x) = (x - 3)q(x) + a$. Поскольку

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)q(x) + 2x + 5, \quad f(3) = 11.$$

Значит, $a = 11$.

в) Бином Ньютона позволяет написать:

$$(x^2 + x + 1)^{100} = ((x^2 + 1) + x)^{100} = (x^2 + 1)q(x) + x^{100},$$

поэтому ищем остаток от деления на $x^2 + 1$ одночлена x^{100} . Но $x^{100} - 1$ делится на $x^2 + 1$, так как на $x^2 + 1$ делится $x^{50} + 1$, а

$$x^{100} - 1 = (x^{50} - 1)(x^{50} + 1).$$

Значит, $x^{100} - 1 = (x^2 + 1)q(x)$ или $x^{100} = (x^2 + 1)q(x) + 1$.

г) Если бы имело место равенство

$$x^{99} - 3x^{69} + 4 = (x^5 + x^3 + 2)q(x),$$

то обе части равенства вместе обращались бы в 0. Но правая часть равна 0 при $x = -1$, а левая — нет.

д) Представим x^{91} так:

$$\begin{aligned} x^{91} + x^{90} + x^{89} + x^{88} + x^{87} - x^{90} - x^{89} - x^{88} - x^{87} - x^{86} + x^{86} + x^{85} + x^{84} + \\ + x^{83} + x^{82} - x^{85} - x^{84} - x^{83} - x^{82} - x^{81} + \dots + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^3 - \\ - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + x. \end{aligned}$$

Каждая пятерка делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ без остатка, значит, остаток равен x — последнему слагаемому.

Что касается глубокомысленного (на вид) вопроса о числе 91, то К. Вейерштрасс ставил в таких случаях: «Nieg ein Spitz» (т. е. «шутка»). Да, 91 — это номер школы (московской), в которой наш «второклассник и второгонник» постигал суть вещей. Рекомендую ее всем, желающим почувствовать себя людьми среди людей.

Р 12. а) Поскольку $f(b) - f(a) = 1$ делится на $b - a$, $b - a = \pm 1$, что и требуется.

б) Разность $f(n) - f(1)$ делится на $n - 1$, разность $f(n) - f(2)$ — на $n - 2$. Если $n = 2k + 1$, то четным является $n - 1$ и поскольку $f(1)$ четно по условию, четно и $f(n)$. Если же $n = 2k$, то четно $n - 2$, а $f(2)$ четно по условию, значит, четно и $f(n)$.

в) Предположим, что $f(x) = ax + b$. Тогда

$$\begin{cases} a + b = n, \\ an + b = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $a = -1$, $b = n + 1$, т. е. $f(x) = -x + n + 1$ — многочлен, удовлетворяющий условию.

В случае $f(1) = n$, $f(n) = 2$ мы имеем систему

$$\begin{cases} a + b = n, \\ an + b = 2, \end{cases}$$

из которой находим

$$a = -\frac{n-2}{n-1} = -1 + \frac{1}{n-1}.$$

При $n > 2$ это число не может быть целым, что противоречит целочисленности коэффициентов искомого многочлена. Однако задача еще не решена. Мы выяснили только, что многочлена 1-й степени с заданными свойствами нет. А может быть, есть многочлен 2-й или большей степени? Нет, перебором заниматься мы не будем. Заметим только, что $f(n) - f(1) = 2 - n = -(n-2)$ должно делиться на $n-1$, что при $n-1 > 1$ невозможно.

г) Если при некотором целом a будет $f(a) = 0$, то число $f(1) - f(a) = f(1)$ должно делиться на $a-1$, т.е. $a-1$ нечетное и, значит, a — четное. Аналогично число $f(0) - f(a) = f(0)$ должно делиться на a и, значит, число a — нечетное. Несовместимость доказывает требуемое.

д) Имеем три возможности: $n = 3k$, $n = 3k \pm 1$. Если $n = 3k$, то $f(n) - f(0) = f(n)$ делится на n , т.е. $f(n)$ делится на 3. Если $n = 3k + 1$, то

$$f(n) - f(1) = f(n) - 3$$

делится на $n-1 = 3k$, т.е. $f(n) - 3$ делится на 3 и, значит, $f(n)$ делится на 3. Если $n = 3k-1$, то

$$f(n) - f(-1) = f(n) + 3$$

делится на $n+1 = 3k$, т.е. $f(n) + 3$ делится на 3 и $f(n)$ делится на 3.

Р 13. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю. Мы получим дробь

$$\frac{a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Значит, $a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2) = 1$ (*). Поскольку это равенство верно при любых значениях x , подставим в него три произвольных значения, например, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Мы получим три равенства $2a = 1$, $-b = 1$, $2c = 1$. Отсюда $a = c = 1/2$, $b = -1$.

(Проницательный читатель скажет: но ведь значения $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ не являются допустимыми для исходного равенства: это нули знаменателей. Значит, при этих значениях нужное равенство заведомо не выполняется! Да, это верно. Но мы подставляли эти значения не в исходное равенство, а в равенство (*), которое имеет место уже при всех x , в том числе и при данных. Мы их и подставили, чтобы найти требуемые числа, поскольку эти значения обнуляют по два слагаемых из трех в равенстве (*).)

Р 14. а) Используем соображения симметрии, а потому сложим сразу все три дроби (исходное выражение обозначим через X):

$$X = \frac{bc(c-b) + ac(a-c) + ab(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)};$$

заметим, что числитель только знаком (и порядком слагаемых) отличается от выражения, с которым мы имели дело в примере 25; воспользовавшись своими достижениями, сразу получим

$$X = -\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{1}{abc}.$$

б) Здесь приведение к общему знаменателю дает

$$\frac{b^2c^2(c-b) + a^2c^2(a-c) + a^2b^2(b-a)}{(abc)^2(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Раскрывая скобки в числителе, имеем

$$\begin{aligned} b^2c^3 - b^3c^2 + a^3c^2 - a^2c^3 + a^2b^3 - a^3b^2 &= b^2(c^3 - a^3) - b^3(c^2 - a^2) - a^2c^2(c - a) = \\ &= (c - a)(b^2c(c - b) + b^3a(c - b) - a^2(c^2 - b^2)) = (c - a)(c - b)(c(b^2 - a^2) + ab(b - a)) = \\ &= (c - a)(c - b)(b - a)(ab + bc + ac). \end{aligned}$$

в) Приведение к общему знаменателю дает

$$\frac{a^4(c-b) + b^4(a-c) + c^4(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Выражение в числителе после раскрытия скобок равно $ca^4 - cb^4 - a^4b + ab^4 - c^4a + c^4b$. Вынесение общего множителя из каждой пары позволяет вынести общий множитель $a - b$ из всего числителя. В скобке остается $ca^3 - c^4 - a^3b + a^2bc - ab^3 + cb^3 - a^2b^2 + acb^2$. Снова вынося из каждой пары общий множитель, выделяем в числителе множитель $a - c$. Остается

$$a^2c - a^2b + ac^2 - ab^3 + c^3 - b^3 = (c - b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac).$$

Таким образом, после сокращения получаем $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac$.

г) Сложим первые две дроби, мы получим

$$\frac{a+b}{(a-b)(a-c)(b-c)}(a^3b - b^3a - a^3c + b^3c + a^2bc - b^2ac - a^2c^2 + b^2c^2).$$

Слагаемые в большой скобке уже сгруппированы попарно так, чтобы можно было вынести общий множитель $a - b$. Вынося его, получаем

$$\frac{a+b}{(a-c)(b-c)}(a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c - ac^2 - bc^2).$$

Как ни прискорбно, но разложить на множители эту большую скобку не удастся, поэтому перемножим ее и $a + b$ и прибавим третью дробь. Выражение примет устрашающий вид (в котором мы опять-таки уже сгруппировали нужные слагаемые попарно, чтобы выносился общий множитель $b - c$):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(a-c)(b-c)}(a^3b - a^3c + ab^3 - abc^2 + ac^3 - acb^2 + \\ &+ bc^3 - cb^3 + a^2b^2 - a^2c^2 + a^2b^2 - bca^2 - b^2c^2 + c^4) \end{aligned}$$

Вынося его, имеем

$$\frac{a^3 - ac^2 + ab^2 - b^2c - bc^2 + a^2b + a^2c - c^3 + a^2b - bc^2}{a - c}$$

и, вынося $a - c$, получаем $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$.

Р 15. Первая скобка без особых затруднений преобразовывается к виду

$$-\frac{2(a^4 + b^4 + c^4)}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

при этом мы заменяем $c = -a - b$ везде, где это ведет к упрощению. Что касается второй скобки, то она приводится к виду

$$\frac{(b^3 - a^3)(2a + b)(b + 2a)}{a^2 b^2 c^2}.$$

Поскольку при условии $c = -a - b$ мы имеем $c - a = -(2a + b)$, $b - c = 2b + a$, произведение этих дробей равно

$$-\frac{2(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 b^2 c^2}.$$

Правая часть доказываемого равенства (с учетом условия $c = -a - b$) равна

$$-\frac{4(a^2 + ab + b^2)^3}{a^2 b^2 c^2}.$$

Таким образом, остается проверить, что

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2 \quad \text{или} \quad a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Надеюсь, читатель, вооруженный формулой

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

сделает это без труда.

Ответы

1. а) $(x - 2)(2x^2 + 3x - 1)$; б) $(x - 1)(x^2 + x + 2)$; в) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 6)$;
 г) $(x - 2y)(x - y + 1)$; д) $(a + b)(b + c)(c + a)$; е) $(2x^2 - x + xy - 1)(2x^2 + x - xy + 1)$;
 ж) $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^{10} + a^5 + 1)$; 4. Составное; 5. а) $(a + 1)/a$; б) a^4 ;
 в) $(x^2 - x - 1)/9(x^2 + x - 1)$; г) $(x + a)/(x^2 + ax + a^2)$; 6. $x^{20} + x^{18} + \dots + x^2 + 1$;
 7. а) $(x + y)(y + z)(z + x)$; б) $(x - y + 5)(x + y - 1)$; в) $(x - y)(y - z)(x - z)(x + y + z)$;
 8. а) $-(3a + 1)/2$; б) -3 ; 9. а) $a^3/2(a - 1)$; б) $a - b$; в) $2a + 1$; г) -1 ; д) $a^2x^2 - b^2y^2$;
 10. а) 1; б) $(a^8 - a^4 + 1)/(a^8 + a^4 + 1)$; 11. а) 1; б) 11; в) 1; г) нет; д) x ;
 12. а) $f(x) = -x + n + 1$; нет; 13. $a = c = 1/2$, $b = -1$; 14. а) $1/abc$;
 б) $(ab + bc + ac)/(abc)^2$; в) $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac$; г) $(a + b + c)^2$.

§ 3. Числа рациональные и иррациональные. Действия с иррациональностями

Уделив довольно много места целым числам и естественным образом приблизившись к рациональным и (главное!) иррациональным, хочется немного притормозить и слегка коснуться этой богатой античной материи.

Тайна иррационального велика есть, поскольку означает это слово «превосходящее разум», «недоступное разуму». Действительно, иррациональное число — объект довольно загадочный. Иногда считают, что иррациональное число «нельзя измерить точно». Под этим понимают, видимо, невозможность представления такого числа в виде конечной или периодической десятичной дроби. Но если говорить именно об *измерении*, то отмерить отрезок длины, скажем,

$\sqrt{2}$, столь же легко, сколь и отрезок длины 1: для этого достаточно построить квадрат со стороной 1, его диагональ и равна $\sqrt{2}$.

Этот пресловутый (или знаменитый) квадрат стал тем окошком, глядя в которое люди впервые осознали для себя понимание бесконечности вообще и иррациональности в частности. Точнее не сам квадрат, а невозможность найти общую меру для его стороны и диагонали. Выдающийся современный философ В. В. Биbihин так разъясняет вхождение иррациональности в культурный обиход человечества.

Если половина стороны квадрата не укладывается три раза в его диагональ, то, возможно, какая-то меньшая часть уложится в ней целое число раз. Нет, не укладывается. Тогда может быть какая-то совсем малая частица все-таки окажется общей мерой стороны и диагонали. Нет, не оказывается такой. Открывается бесконечная перспектива. Любая сколь угодно малая частица вплоть до точки не оказывается искомой общей мерой. Само наше усилие добраться до общей меры становится, так сказать, автором, двигателем бесконечности: иначе как у нас под нашими деятельными руками, которые искали не бесконечность, а невинную общую меру, бесконечность нигде не наблюдается. Иррациональность произведена от несоизмеримости. Они различаются тем, что несоизмеримость существует «по природе», а иррациональность (т. е. невозможность «уловить числом» общую меру несоизмеримых и неместимость получающегося здесь числа на любой самой большой восковой табличке) — «по установлению», «условно».

Устав пифагорейской жизни запрещал разглашать непосвященным слова учителя, а также все открытия, сделанные в школе. (Пусть это и противоречит современным принципам научного исследования, которые требуют именно обнародования всего, что сделано — с тем, чтобы это способствовало новым открытиям.) И вот, по преданию, тот, кто предал гласности теорию иррациональных (может быть, это был Гиппас? или Гиппазий?), погиб в море как нечестивец. Биbihин комментирует:

Вероятно, эта легенда намекала на то, что все иррациональное во вселенной любит прятаться, и всякая душа, которая приблизится к такому виду жизни и сделает его доступным и явным, низвергается в море рождения и оmyвается его зыбкими потоками. Таково было благоговение, с которым относились пифагорейцы к теории иррациональных.

(По другой версии Гиппас сделал открытие иррациональности $\sqrt{2}$ в тот момент, когда он вместе с другими товарищами по школе Пифагора находился в открытом море. И его выбросили за борт, обвинив в том, что он привнес в картину мира элемент, противоречащий пифагорейскому учению о сводимости всех явлений природы к целым числам и их отношениям.)

Тут уже недалеко до утверждения позднегреческого философа Прокла: «Математические науки были изобретены пифагорейцами для напоминания о божественном». Но математические науки, конечно, были «изобретены» не ими. Они «даны нам» — возможно, что и для напоминания о божественном — для одного из бесчисленных напоминаний... Как уточнял Л. Толстой: «Всё,

что нам нужнее всего знать, всё, что составляет самую сущность предмета, выражается всегда несоизмеримыми величинами».

Но может быть, читателю странным кажется этот пафос на месте изложения обычной темы школьной математики, которую ежегодно «проходят» миллионы, даже не дрогнув?

Видите ли... Говоря словами американского писателя Т. Вулфа, «каждое мгновение — плод сорока тысячелетий», и я чувствую, что только вчера, в соседнем Кротоне на юге Италии была установлена несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали. Я дрожу от ужаса вместе с пифагорейцами, которым впервые приоткрылась завеса на всю сложность нашего мира. И мне захотелось здесь выстроить хоть малый островок греческой мысли. А propos... Конечно, место выбрано не совсем удачно... Но другого нет...

* * *

Нет сомнений, что наше знакомство с иррациональными числами начинается именно с $\sqrt{2}$, а потому приведем здесь доказательство того, что число это действительно иррационально, которое (доказательство), конечно, должен знать каждый (абитуриент).

1. Число $\sqrt{2}$ иррационально, т. е. не может быть представлено в виде несократимой дроби вида m/n , где $m, n \in \mathbb{N}$.

◀ Предположим противное, что $\sqrt{2} = m/n$, причем m и n взаимно просты. Тогда $2n^2 = m^2$. Отсюда следует, что m^2 — четное число, но тогда и m тоже четно (поскольку квадрат нечетного числа был бы нечетен), т. е. $m = 2k$. Значит, $2n^2 = 4k^2$ или $n^2 = 2k^2$. Теперь таким же образом заключаем, что n — четное число, т. е. оба числа m и n — четные. Но это противоречит тому, что они взаимно просты. Значит, равенство $\sqrt{2} = m/n$ невозможно. ►

2. Доказать, что между двумя рациональными числами всегда найдется как рациональное, так и иррациональное число.

◀ Если a и b — данные числа, причем $a < b$, то число $(a+b)/2$ лежит между ними: это середина отрезка $[a, b]$. И это число рационально, поскольку если $a = m/n$, $b = p/q$, то

$$\frac{a+b}{2} = \frac{mq+pn}{2nq}.$$

Геометрическим же путем легче всего получить и иррациональное число, лежащее между a и b . Для нахождения (построения) точки с иррациональной координатой используем «первое» иррациональное число, т. е. $\sqrt{2}$. Поскольку

длина отрезка $[a, b]$ равна $b - a$, построим на этом отрезке квадрат; длина диагонали этого квадрата выражается иррациональным числом $(b - a)\sqrt{2}$, так же как и ее половина $(b - a)\sqrt{2}/2$. Тогда число $a + (b - a)\sqrt{2}/2$ будет иррациональным и принадлежащим отрезку $[a, b]$, так как половина диагонали квадрата меньше его стороны (ведь две половинки разных диагоналей и сторона образуют прямоугольный треугольник, в котором сторона — гипотенуза, а половинки диагоналей — катеты).

Почему число $a + (b - a)\sqrt{2}/2$ непременно иррационально? Потому что оно есть сумма рационального и иррационального. Действительно, если бы сумма рационального a и иррационального c оказалась рациональным p , то тем самым иррациональное c оказалось бы равно разности рациональных $p - a$, что невозможно. ►

Разумеется, вместо $a + (b - a)\sqrt{2}/2$ можно было бы взять $a + (b - a)\sqrt{2}/3$ или $a + (b - a)\sqrt{2}/4$ и т. д. Таким образом, число иррациональных точек любого отрезка бесконечно — как и рациональных. Однако эти две бесконечности в каком-то смысле различны: в каком именно — можно узнать в интереснейшей математической науке, называемой «Теорией множеств». Она была создана в конце XIX века немецким математиком (уроженцем Петербурга) Г. Кантором.

Чисто алгебраический подход к числам рациональным и иррациональным состоит, как мы знаем, в отождествлении тех и других с десятичными дробями: рациональные числа выражаются конечными или периодическими дробями, иррациональные — бесконечными непериодическими.

3. Найти иррациональное число, принадлежащее отрезку $[a, b]$, если

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots \quad \text{и} \quad b = b_0, b_1 b_2 \dots$$

— два рациональных числа, причем $a < b$.

◀ Любое рациональное число можно представить бесконечной десятичной дробью, если дописывать в конце нули (в случае конечной дроби), т. е. писать не 0,5, а 0,500000...

Единственное, что нужно здесь запретить — это дроби, периоды которых состоят из одних девяток. Точнее: число, скажем, 0,9999... — это 1,000... Число 3,1999... — это 3,200000... И т. д. Зачем это нужно? А затем, чтобы одному числу не отвечали две разные десятичные дроби. (Но может быть, вы не верите, что 0,9999... и 1,000 — это одна и та же точка числовой прямой? Пусть тогда $0,999 \dots = x$. Умножив это равенство на 10, получим $9,99 \dots = 10x$ или $9 + x = 10x$, откуда $x = 1$.)

Числа a и b , очевидно, отличаются друг от друга в каком-то десятичном знаке (может быть, в самом первом). Пусть этот знак $m \geq 0$, т. е. $a_m < b_m$. Тогда нужное нам число c будет иметь вид: $c = a_0, a_1 a_2 \dots a_{m-1} b_m \dots$, причем после b_m следует приписать любую непериодическую последовательность, например, знаки числа π или того же $\sqrt{2}$. А можно, поскольку знаки этих чисел

мы всё же не можем продолжать достаточно далеко, взять такую последовательность: 101001000100001... Действительно, эта последовательность не имеет периода, поскольку каким бы конечным числом n ни был период, в данной последовательности найдется сколь угодно большой отрезок, состоящий из одних нулей. Значит, период состоит из одних нулей, чего быть не может.

Итак, искомое число $c = a_0, a_1 a_2 \dots a_{m-1} b_m 1010010001 \dots$ ►

Вопрос о том, рациональна или иррациональна сумма (разность) иррациональных чисел или число, полученное из иррациональных чисел путем каких-либо иных арифметических действий, приводит нас к необходимости усвоить некие основные принципы (и правила) обращения с иррациональностями.

Первый приём — это преобразование корней в степени и обратно. При этом следует руководствоваться формулами:

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b; \quad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}; \quad (x^a)^b = x^{ab}; \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n},$$

в частности $\sqrt{a} = a^{1/2}$, $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$.

4. Упростить (вычислить):

а) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{6}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{54}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}} + \sqrt[4]{3^{12}} - (\sqrt[4]{2})^8 - (\sqrt[6]{16})^3$;

в) $\left(\sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{8^{10}}}} \right)^{10} : \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}} \right)^{10} \cdot 2^{-8}$.

◀ а) Для упрощения необходимо подвести все множители под один радикал:

$$\sqrt[4]{9 \cdot 4 \cdot 6^2} = \sqrt[4]{3^2 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3)^2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{\sqrt[3]{54}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}} + \sqrt[4]{3^{12}} - (\sqrt[4]{2})^8 - (\sqrt[6]{16})^3 &= \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 27}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}} + 3^{12/4} - 2^{8/4} - (4^2)^{3/6} = \\ &= 1 + 27 - 4 - 4 = 20; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \left(\sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{8^{10}}}} \right)^{10} : \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}} \right)^{10} \cdot 2^{-8} &= 2^{10/5} \cdot 4^{10/20} \cdot 8^{100/60} = \\ &= 4 \cdot 2 \cdot 8^{5/3} = 8^2 \cdot 8^{2/3} = 256. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

5. Разложить на множители: а) $x - y$; б) $a - \sqrt{a^3}$; в) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}$; г) $x\sqrt{x} - y\sqrt{y}$.

◀ а) Выражение $x - y$ можно представить и как разность квадратов:

$$x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2,$$

и как разность кубов: $x - y = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3$.

Соответственно в первом случае получится

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

а во втором

$$x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}).$$

Первый способ предпочтительнее как более короткий.

б) $a - \sqrt{a^3} = a - a\sqrt{a} = a(1 - \sqrt{a});$

в) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} = x^{1/2} - x^{1/3} + 2x^{1/4} = x^{6/12} - x^{4/12} + 2x^{3/12} =$
 $= x^{1/12}(x^{5/12} - x^{3/12} + 2x^{2/12}) = \sqrt[12]{x}(\sqrt[12]{x^5} - \sqrt[12]{x^3} + 2\sqrt[12]{x^2}).$

г) Пусть $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$, тогда видно, что мы имеем дело с разностью кубов:

$$x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y). \quad \blacktriangleright$$

6. Сократить дробь:

а) $\frac{\sqrt[3]{a} - 25}{a^{1/6} + 5};$ б) $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$ в) $\frac{x - 2}{x + 2\sqrt{2x} + 2}.$

◀ а) Пусть $a^{1/6} = x$, тогда $\sqrt[3]{a} = a^{1/3} = a^{2/6} = x^2$; значит,

$$\frac{\sqrt[3]{a} - 25}{a^{1/6} + 5} = \frac{x^2 - 25}{x + 5} = x - 5 = \sqrt[6]{a} - 5;$$

б) $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a - \sqrt{ab} + b;$

в) Пусть $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{2} = b$; тогда

$$\frac{x - 2}{x + 2\sqrt{2x} + 2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a + b)^2} = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}. \quad \blacktriangleright$$

А вот пример похитрее, в котором также успешно применяется принцип замены:

7. Сократить дробь:

$$\frac{x + 2 + \sqrt{2x}}{x^2 + x - \sqrt{2x} + 2}.$$

◀ Положим теперь $\sqrt{2x} = a$; тогда $2x = a^2$ и $x = a^2/2$. Подставляем:

$$\frac{x+2+\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2} = \frac{a^2/2+2+a}{a^4/4+a^2/2-a+2} = \frac{2a^2+4a+8}{a^4+2a^2-4a+8} = \frac{2(a^2+2a+4)}{a^4+2a^2-4a+8}.$$

Числитель дальнейшему разложению не поддается, значит, дробь сократима, если знаменатель делится на $a^2 + 2a + 4$ (без остатка). Выполняя деление, убеждаемся, что $a^4 + 2a^2 - 4a + 8 = (a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 2)$. Значит,

$$\frac{2(a^2+2a+4)}{a^4+2a^2-4a+8} = \frac{2}{a^2-2a+2}$$

и

$$\frac{x+2+\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2} = \frac{2}{2x-2\sqrt{2x}+2} = \frac{1}{x-\sqrt{2x}+1}.$$

▶

К азбуке действий с радикалами относится также и прием *уничтожения иррациональности в знаменателе дроби*. Он основан на применении формул сокращенного умножения и состоит в том, что числитель и знаменатель дроби домножаются на одно и то же выражение: если знаменатель имеет вид $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, то домножают на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, если $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, то, наоборот, домножают на $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Это называется *домножением на сопряженное*.

Если в знаменателе находится сумма (разность) двух кубических корней, то домножить надо на неполный квадрат разности (суммы) тех же корней.

8. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}; & \text{б) } \frac{2}{1+\sqrt{3}}; & \text{в) } \frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}; \\ \text{г) } \frac{10}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}; & \text{д) } \frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}. \end{array}$$

◀ Применяем описанное правило:

$$\text{а) } \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2};$$

$$\text{б) } \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{1-3} = \sqrt{3}-1;$$

$$\text{в) } \frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{5(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3} = \sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9};$$

г) Не следует думать, что в данном случае нужны какие-то дополнительные формулы: поскольку радикалы квадратные, помочь может только формула

разности квадратов; применим её, предварительно представив знаменатель как сумму двух слагаемых:

$$\begin{aligned}\frac{10}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}} &= \frac{10}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})+\sqrt{3}} = \frac{10(\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{10(\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{3})}{6+2\sqrt{14}} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{3})(3-\sqrt{14})}{(3+\sqrt{14})(3-\sqrt{14})} = (\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{14}-3);\end{aligned}$$

д) И данный пример не требует расширения кругозора — достаточно простой группировки и вынесения за скобки общего множителя:

$$\begin{aligned}\frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}} &= \frac{2}{(1-\sqrt{3})+\sqrt{2}(1-\sqrt{3})} = \frac{2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})} = \\ &= \frac{2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-3)(1-2)} = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

А вот в следующем примере придётся пойти немного дальше. ►

9. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$X = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}}.$$

◀ Пусть $\sqrt[3]{2} = a$, $\sqrt[3]{3} = b$, $\sqrt[3]{5} = c$; поставим задачу получить формулу, аналогичную $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$, для *трех* слагаемых, которая подсказала бы нам, на что надо домножить сумму $a+b+c$, чтобы получить выражение $a^3+b^3+c^3$.

Обозначим $a+b+c = t$; тогда $a+b = t-c$. Возводя в куб сумму $a+b$, мы получим

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = a^3 + b^3 + 3ab(t-c).$$

Поскольку $a+b = t-c$, это же выражение равно $(t-c)^3 = t^3 - 3t^2c + 3tc^2 - c^3$. Значит, $a^3 + b^3 + 3ab(t-c) = t^3 - 3t^2c + 3tc^2 - c^3$ или

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = t(t^2 - 3tc + 3c^2 - 3ab).$$

Подставляя $t = a+b+c$, после упрощений получим соотношение

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca))$$

или

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc,$$

которое занимает достойное место в формулах сокращенного умножения.

Итак, если домножить числитель и знаменатель

$$a + b + c = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$$

рассматриваемой дроби на $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$, то получится дробь

$$\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{10}}{10 - 3\sqrt[3]{30}}.$$

Домножая на неполный квадрат суммы 10 и $3\sqrt[3]{30}$, окончательно имеем:

$$X = \frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{10})(100 + 30\sqrt[3]{30} + 9\sqrt[3]{900})}{190}, \quad \blacktriangleright$$

При упрощении выражений, связанных с радикалами, часто приходится сталкиваться с «двойным извлечением корня»: речь идёт о таких радикалах, как

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}, \quad \sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$$

и т. п. По этому поводу можно сказать только одно: квадратный корень можно упростить, если под ним стоит выражение, являющееся полным квадратом; кубический — если под ним стоит полный куб. Соответственно, особое значение принимает прием выделения полного квадрата (или куба). А извлекая квадратные корни, следует руководствоваться формулой $\sqrt{a^2} = |a|$, т. е. $\sqrt{a^2} = a$, если $a > 0$ и $\sqrt{a^2} = -a$, если $a < 0$.

Вот типичный вопрос, у неправильного ответа на который довольно долгое эхо: в вычислении пределов, нахождении асимптот графиков функций...

10. Внести под знак радикала: $x\sqrt{y}$.

◀ Ну, конечно, каждый ответит сначала $\sqrt{x^2y}$, а потом исправится на $\pm\sqrt{x^2y}$, но это исправление не вполне верно: ведь нужно указать, в каком случае ставится знак плюс, а в каком — минус. Правильный ответ

$$x\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{x^2y}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^2y}, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

стоит запомнить, как и формулу $\sqrt{a^2} = |a|$. (Здесь на сцену выходит так называемый «модуль», или абсолютная величина числа, разговор о котором приходится начинать уже теперь, «вспоминая детство»). Написания фигурной скобки можно избежать, если использовать обозначение $\operatorname{sgn} x$, т. е. знак числа x . По определению,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $x \neq 0$ $x\sqrt{y} = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2y}$. Например, $-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$, $2\sqrt{a} = \sqrt{4a}$. ▶

В формуле $\sqrt{a^2} = |a|$ модуль появляется как некая страховка, гарантия тождественности (равносильности) проводимых преобразований. Такую же роль он берет на себя и в обратных по смыслу примерах на «извлечение корня», возникая там, где его не ждет неопытный абитуриент.

11. Упростить

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

◀ **1-ое решение.** Попробуем извлечь оба корня (внешних); для этого представим подкоренные выражения следующим образом:

$$3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = (1 + \sqrt{2})^2; \quad 3 - 2\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1 - \sqrt{2})^2.$$

Тогда

$$X = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| - |1 + \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 - 1 - \sqrt{2} = -2.$$

2-е решение. Вычислим квадрат искомого выражения:

$$X^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} + 3 + 2\sqrt{2} = 6 - 2\sqrt{9 - 8} = 4;$$

отсюда $X = \pm 2$.

Неоднозначность ответа нас не устраивает: числовое выражение всегда имеет только одно значение. Поскольку

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} < \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \quad X < 0;$$

значит, $X = -2$.

Вот решения разными способами ученики особенно недолюбливают: одно бы найти — и то хорошо. Не спорим с этим, конечно. А разные решения рождаются, когда... Словом... «Один раз объяснил — не поняли. Второй раз объяснил — опять не поняли. Объяснил в третий раз — сам понял». (Ф. Хитрук, известный режиссер-аниматор, автор «Бонифация» и много чего еще.) ►

12. Упростить

$$\sqrt{66 - 40\sqrt{2}} + \sqrt{66 + 40\sqrt{2}}.$$

◀ В данном случае «извлечь» корни подбором, аналогичным проделанному в предыдущем примере, уже не так просто, и второе решение выглядит более предпочтительно. Справедливости ради скажем, что можно воспользоваться так называемой *формулой сложного радикала*:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Пользоваться ею имеет смысл, если разность $a^2 - b$ является квадратом целого (рационального) числа.

У нас

$$\begin{aligned}\sqrt{66 \pm 40\sqrt{2}} &= \sqrt{66 \pm \sqrt{3200}} = \sqrt{\frac{66 + \sqrt{4356 - 3200}}{2}} \pm \sqrt{\frac{66 - \sqrt{4356 - 3200}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{66 + \sqrt{1156}}{2}} \pm \sqrt{\frac{66 - \sqrt{1156}}{2}} = \sqrt{\frac{66 + 34}{2}} \pm \sqrt{\frac{66 - 34}{2}} = \sqrt{50} \pm 4.\end{aligned}$$

Значит,

$$\sqrt{66 - 40\sqrt{2}} + \sqrt{66 + 40\sqrt{2}} = 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}. \quad \blacktriangleright$$

Однако, при всех своих достоинствах, формула сложного радикала не все-сила, как показывают следующие примеры.

13. Упростить $\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

◀ С чего начать выделение полного квадрата в сумме $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$? С того, что прикинуть: $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$; $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Чтобы получить что-то похожее на удвоенные произведения, домножим (и разделим) исходное выражение хотя бы на 2:

$$3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \frac{6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{2}$$

и представим числитель так:

$$(4 + 2\sqrt{3}) + 2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 2 = (1 + \sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{2})^2.$$

Иначе говоря,

$$\frac{6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{2},$$

и таким образом

$$\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \quad \blacktriangleright$$

14. Упростить $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

◀ Пусть

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}};$$

тогда, возводя обе части этого равенства в куб по формуле

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b),$$

получим:

$$x^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

или

$$x^3 = 4 + 3\sqrt[3]{(4-5)}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) = 4 - 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right).$$

Но выражение в скобках равно x , поэтому $x^3 = 4 - 3x$ или $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Кубический трехчлен в левой части имеет корень $x = 1$; выполняя деление, получаем разложение на множители: $x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4)$. Вторая скобка равняться нулю не может (отрицательный дискриминант), значит, $x = 1$ — единственное решение уравнения

$$x^3 + 3x - 4 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$$

Замечание. Если бы мы попытались «извлечь» корни, то, поэкспериментировав с простейшим выражением $1 + \sqrt{5}$, рано или поздно установили бы, что

$$(1 + \sqrt{5})^3 = 1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} = 16 + 8\sqrt{5} = 8(2 + \sqrt{5}),$$

т.е.

$$2 + \sqrt{5} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3$$

и соответственно

$$2 - \sqrt{5} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3,$$

поэтому снова

$$x = \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} = 1. \quad \blacktriangleright$$

В коллекции «монстров» достойное место занимает следующий пример:

15. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+3\sqrt{3}+2\cdot\sqrt[4]{27}+4\cdot\sqrt[4]{3}}}.$$

◀ Посмотрим, что получится при возведении в квадрат и в четвертую степень суммы $\sqrt[4]{3} + 1$; нам понадобится формула $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ (которая когда-то тоже входила в программу воспитания светского — или советского — человека). Итак:

$$(\sqrt[4]{3} + 1)^2 = \sqrt{3} + 2\sqrt[4]{3} + 1, \quad (\sqrt[4]{3} + 1)^4 = 4 + 4\sqrt[4]{27} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 5 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt[4]{27} + 4\sqrt[4]{3} &= (2 - \sqrt{3}) + (3 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt[4]{27} + 4\sqrt[4]{3}) = \\
 &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} + \left(\frac{1}{2}(\sqrt[4]{3} + 1)^4 + (\sqrt[4]{3} + 1)^2 \right) = \\
 &= \frac{(\sqrt[4]{3} + 1)^2}{2} ((\sqrt[4]{3} - 1)^2 + (\sqrt[4]{3} + 1)^2 + 2) = \\
 &= \frac{(\sqrt[4]{3} + 1)^2}{2} (2\sqrt{3} + 4) = \frac{(\sqrt[4]{3} + 1)^2 (\sqrt{3} + 1)^2}{2}.
 \end{aligned}$$

И окончательно

$$X = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt[4]{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt[4]{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)(3 - 1)} = \sqrt[4]{3} - 1. \quad \blacktriangleright$$

16. Упростить при $x > 0$ разность

$$X = \sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x + 7}} - \sqrt{x + 11 - 4\sqrt{x + 7}}.$$

◀ Пусть $\sqrt{x + 7} = a$; тогда, во-первых, $a > 2$, а во-вторых, $x = a^2 - 7$. Следовательно,

$$X = \sqrt{a^2 + 1 + 2a} - \sqrt{a^2 + 4 - 4a} = \sqrt{(a + 1)^2} - \sqrt{(a - 2)^2}.$$

Поскольку $a > 2$, окончательно получаем $X = a + 1 - a + 2 = 3$. ▶

Задачами на упрощение издавна славится Московский Энергетический институт. Уже в 40-е годы прошлого века (когда институт носил имя В. М. Молотова) поступающим предлагались такие задачи:

17. Упростить и вычислить с точностью до 0,01 при $x = 1/4$ выражение

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} - 2\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^3}} + 3\sqrt{(x^{-5} \cdot \sqrt[4]{x^5})^{-1}} - 4x^2\sqrt{\left(x\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{-1/2}}.$$

◀ Заменяя корни степенями, имеем:

$$\begin{aligned}
 x \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/4} \cdot x^{1/8} - 2x^{3/2} \cdot x^{3/8} + 3x^{5/2} \cdot x^{-5/8} - 4x^2 \cdot x^{-1/4} \cdot x^{1/8} = \\
 = x^{15/8} - 2x^{15/8} + 3x^{15/8} - 4x^{15/8} = -2x^{15/8} = -2(2^{-2})^{15/8} = -2^{-11/4} = -\frac{\sqrt[4]{2}}{8}.
 \end{aligned}$$

Дойдя до этого места, ... нет, мы не можем достать калькулятор, мы должны вычислить приближенное значение с точностью до 0, 01 *вручную*. Читатель готов?

Напомним и сразу покажем в работе *алгоритм извлечения корня квадратного*. Найдем сначала $\sqrt{2}$ и для этого извлечем корень из 20000, а потом перенесем запятую.

Разряды числа, из которого извлекается корень, делятся на пары: в данном случае запишем наше число так: 02'00'00. Для первой пары 02 подбираем цифру, квадрат которой максимален, но не превосходит 02 — это 1 — первая цифра результата.

Теперь вычитаем квадрат найденной цифры из первой пары и к полученной разности приписываем следующую пару цифр: 100. Удваиваем ответ и приписываем к нему справа цифру *, подобранную так, чтобы произведение полученного числа на эту цифру было максимальным, но не превосходящим 100. Это 4 — следующая цифра результата, поскольку $24 \cdot 4 = 96 < 100$.

Снова вычитаем 96 из 100 — имеем 4 и сносим следующую пару — 400. Удваиваем ответ: 28 и приписываем справа цифру * так, чтобы $28 \cdot$ умноженное на *, было максимальным, но не большим 400. Это 1. Мы получили 141. Продолжая дальше, приходим к 14142. Таким образом, приближенное значение $\sqrt{2}$ с точностью до 0, 0001 равно 1, 4142.

Теперь применим описанный алгоритм к нахождению $\sqrt{1,4142}$. Извлекаем корень из 01'41'42. Получаем вначале 1, вычитая и приписывая две следующие цифры, получаем 41. Удваиваем результат: 2 и приписываем цифру 1, поскольку $21 \cdot 1 < 41$, а $22 \cdot 2 > 41$. Итак, имеем 11. Вычитая $41 - 21$ и приписывая две следующие цифры, получаем 2042. Удваивая 11, имеем 22. Теперь, поскольку $228 \cdot 8 = 1824 < 2042$, а $229 \cdot 9 = 2061 > 2042$, следующая цифра ответа — 8. Нужная точность достигнута: мы получили 118, что означает $\sqrt{1,4142} = 1,18$, т. е. $\sqrt[4]{2} = 1,18$. Теперь уже легко получить $\sqrt[4]{2}/8 = 1,18 \cdot 0,125 = 0,14$. ►

☛ **Ответ:** $-2x^{15/8} = -0,14$.

Тему приближенного вычисления корней продолжают такие задачи:

18. Известно, что $x^2 = 0,999 \dots$. Найти x с точностью до трех знаков после запятой.

◄ Это, конечно, «задача-шутка», поскольку $0,999 \dots = 1$, как мы установили выше в примере 3. ►

Задача, однако, становится весьма серьезной, если рассматривать не бесконечную десятичную дробь, а конечную.

19. Известно, что

$$a^2 = 0, \underbrace{999 \dots 9}_{100}.$$

Найти первые 200 знаков после запятой числа a .

◀ Первые сто знаков, несомненно, девятки, а вот что дальше? Для ответа на поставленный вопрос приходится привлекать сильное средство: *неравенства*! Для оценки многих величин имеются приближенные формулы. Например, для приближенного вычисления корней любой степени из числа, близкого к единице, можно использовать формулу

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}.$$

Так

$$\sqrt{1,1} \approx 1 + \frac{0,1}{2} = 1,05$$

(«точное» значение 1,0488...). В данном случае, однако, данная формула не поможет (мы приводим ее «для общего развития»), поскольку неизвестно, сколько верных цифр после запятой она нам даст. Не вдаваясь в вопрос о происхождении, используем неравенство

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},$$

верное при $-0,5 < x < 0,5$. (Доказательство см. в § 24.)

Поскольку

$$a = \sqrt{0,99 \dots 9} = \sqrt{1 - \underbrace{0,00 \dots 01}_{99}},$$

согласно этому неравенству при $x = -10^{-100}$ имеем

$$a = \sqrt{1-x} < 1 - \frac{10^{-100}}{2} - \frac{10^{-200}}{8}$$

или

$$a < 0, \underbrace{99 \dots 94}_{100} \underbrace{99 \dots 98}_{99}.$$

И таким же образом

$$a > 1 - \frac{10^{-100}}{2} - \frac{10^{-200}}{4} = 0, \underbrace{99 \dots 94}_{100} \underbrace{99 \dots 97}_{99}.$$

Итак, первые 200 знаков после запятой числа a — это

$$\underbrace{99 \dots 94}_{100} \underbrace{99 \dots 9}_{99}.$$



Наупрощавшись всласть, вернемся снова к вопросу: «рационально или иррационально?»

- 20.** а) Рациональна или иррациональна сумма двух иррациональных чисел? б) Рационально или иррационально число $\sqrt[n]{a}$, где $a \in \mathbb{N}$, если известно, что этот корень не является целым числом? в) Рационально ли число

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{21}}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{5 + \sqrt{21}}} \right)^2 ?$$

◀ а) В подобных случаях англичане говорят: it depends... Думаю, читателя не затруднит подобрать примеры, показывающие, что возможны оба исхода.

Если $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, то $a + b$ иррационально. Действительно: пусть $a + b = c$. Тогда

$$c - \sqrt{2} = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 - 2c\sqrt{2} + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{c^2 - 1}{2c}.$$

Если бы c было рациональным, это равенство было бы невозможно, так как при рациональном c рациональна и дробь в правой части. Значит, c иррационально.

Если $a = \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$, то $a + b$ рационально.

б) Предположим, что $\sqrt[n]{a} = p/q$, где $q \neq 1$. Тогда $aq^n = p^n$. Поскольку p и q взаимно просты, q^n не может делиться на p^n ; поэтому $a = kp^n$. Но тогда $kq^n = 1$, что возможно только при $k = q = 1$. Однако обе эти возможности исключены по условию. Значит, $\sqrt[n]{a}$ число иррациональное.

в) Не будем торопиться с выводами, а упростим данное выражение. Вынося общий множитель и приводя к общему знаменателю дроби в скобке, имеем

$$6 \left(\frac{\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{21}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}} \right)^2 = \frac{6(10 + 4)}{20 - 8} = 7.$$

Итог говорит сам за себя. ►

Если числа a и b иррациональны, то число a^b кажется «еще более» иррациональным. Так?

Нет, не так. Правда, чтобы убедиться в этом, желательно иметь некоторое представление о логарифмах и знать основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$. Тот, кто не таков, может заглянуть в § 16 и вернуться обогащенным.

Итак, составим выражение $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 5}$. Чему оно равно? Правильно, 5. Но может быть, мы сомневаемся в том, что число $\log_{\sqrt{2}} 5$ иррационально? Тогда предположим, что

$$\log_{\sqrt{2}} 5 = \frac{m}{n},$$

где натуральные n и m взаимно просты. Это равенство можно переписать в виде $(\sqrt{2})^{m/n} = 5$ или $(\sqrt{2})^m = 5^n$ или даже $2^{m/2} = 5^n$. Теперь нам понятно, что такого быть не может, поскольку слева — четное число, а справа — нечетное.

Как видим, иррациональность логарифмов напрямую связана с недавно обсуждавшимися вопросами делимости целых чисел.

Может быть, читателю кажется, что мы «забегаем вперед»? Нет и нет! Мы всегда только отстаем от жизни, ускользающей от нас. К тому же мы ведь договорились, что уже всё знаем (в принципе) и повторяем то, что знали, но (по многим, убедительнейшим причинам!) слегка подзабыли. Опытные авторы (и педагоги) говорят: «Желательно, чтобы читатель знал всё, что содержится в книге, еще не начав читать ее». (Пианка Э. «Эволюционная экология».) Столь же далекой кажется нам пока и тригонометрия. Но это обманчивое ощущение, а потому заглянем и сюда.

21. Доказать, что $\cos 20^\circ$ — число иррациональное.

Это утверждение вполне согласуется со «здравым смыслом» — ведь если мы что и помним из тригонометрии, так это то, что там без конца мелькают выражения вроде $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$ и т. д.

Предположим, что $\cos 20^\circ = m/n$ (дробь несократима) и воспользуемся формулой

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

при $\alpha = 20^\circ$. Поскольку $\cos 3\alpha = \cos 60^\circ = 1/2$, мы имеем

$$\frac{1}{2} = \frac{4m^3}{n^3} - \frac{3m}{n} \quad \text{или} \quad n^3 = 8m^3 - 6mn^2.$$

Но это равенство невозможно, если натуральные n и m взаимно просты (правая часть делится на m , значит, и левая часть должна делиться на m , но...). ►

Развивая тему, знакомую по § 1, разберем несколько примеров на сравнение чисел как рациональных, так и иррациональных.

22. Что больше:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \quad \text{или} \quad \left(1 + \frac{1}{11}\right)^{11} ?$$

В данном случае не станем искать кустарный метод, учитывающий особенности именно этих чисел, а подведем более солидный фундамент. Именно: используем так называемое *неравенство Бернулли*, согласно которому для любого действительного числа $\alpha \geq -1$ и натурального n верно соотношение $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$. Доказательство можно посмотреть в § 24, а теперь мы сразу

испытаем новое орудие. Перепишем сравниваемые числа так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{11}{10}\right)^{10} \vee \left(\frac{12}{11}\right)^{11} &\Leftrightarrow 11^{21} \vee 10^{10} \cdot 12^{11} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{11}{12} (11^2)^{10} \vee (10 \cdot 12)^{10} \Leftrightarrow \frac{11}{12} \vee \left(\frac{120}{121}\right)^{10}. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Бернулли

$$\left(\frac{120}{121}\right)^{10} = \left(1 - \frac{1}{121}\right)^{10} \geq 1 - \frac{10}{121} = \frac{111}{121}.$$

Но $111/121 > 11/12$, так как это неравенство равносильно верному неравенству $111/11 > 121/12$, ибо

$$\frac{111}{11} = 10 + \frac{1}{11} > 10 + \frac{1}{12} = \frac{121}{12}.$$

Итак,

$$\frac{11}{12} < \left(\frac{120}{121}\right)^{10}$$

и, значит,

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} < \left(1 + \frac{1}{11}\right)^{11}.$$

Заметим, что к делу можно приспособить и знаменитое *неравенство Коши* (доказательство также находится в § 24) для любого набора n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, которое формулируется так:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Действительно, рассмотрим 11 чисел $x_1 = x_2 = \dots = x_{10} = 1 + 0, 1$, $x_{11} = 1$. Тогда по неравенству Коши

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{10(1 + 0, 1) + 1}{11} = 1 + \frac{1}{11} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[11]{(1 + 0, 1)^{10}},$$

т. е.

$$\left(1 + \frac{1}{11}\right)^{11} > \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}. \quad \blacktriangleright$$

23. Сравнить $\sqrt{46}$ и $2 + \sqrt{23}$.

◀ Поскольку сравниваемые числа положительны, между их квадратами следует поставить тот же знак, поэтому сравним 46 и $(2 + \sqrt{23})^2 = 27 + 4\sqrt{23}$ или, что то же, 19 и $4\sqrt{23}$. Но

$$19^2 = 361 < 368 = (4\sqrt{23})^2,$$

поэтому и $\sqrt{46} < 2 + \sqrt{23}$. ►

24. Сравнить $\sqrt{2008} + \sqrt{2011}$ и $\sqrt{2009} + \sqrt{2010}$.

◀ Докажем, что

$$A = \sqrt{n} + \sqrt{n+3} < B = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}.$$

Для этого рассмотрим разность

$$B - A = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})$$

и каждую скобку домножим и разделим на соответствующее сопряженное выражение; мы получим

$$B - A = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} > 0,$$

поскольку $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}$. Значит, $B > A$, т. е. первое из данных чисел меньше второго. ►

25. Сравнить $\sqrt[3]{153}$ и $3 + \sqrt[3]{13}$.

◀ Все задачи на сравнение чисел $\sqrt[3]{a}$ и $b + \sqrt[3]{c}$ можно решать методом исключения одного из радикалов. Делается это так.

Возводим оба числа в куб; после упрощений получаем

$$113 \vee 9\sqrt[3]{13^2} + 27\sqrt[3]{13}. \quad (1)$$

Домножаем обе части сравнения на $\sqrt[3]{13}$; получаем

$$113 \cdot \sqrt[3]{13} \vee 117 + 27\sqrt[3]{13^2}. \quad (2)$$

Оба сравнения (1) и (2) имеют один и тот же знак, поэтому сложим их, причем (1) предварительно домножим на 113 а (2) — на 27. Тогда слагаемые, содержащие $\sqrt[3]{13}$, сократятся, и мы придем к сравнению чисел

$$113^2 \vee (9 \cdot 113 + 27^2)\sqrt[3]{13^2} + 117 \cdot 27 \quad \text{или} \quad 4805 \vee 873\sqrt[3]{169}.$$

Как это ни мучительно, но возведение в куб неизбежно — и утешаем себя тем, что, получив числа $110.937.960.125 < 112.442.226.273$ (точки ставим для удобства чтения), уже можем написать $\sqrt[3]{153} < 3 + \sqrt[3]{13}$. ►

В абитуриентской математике попадают задачи, содержащие выражение $[x]$, которым принято обозначать наибольшее целое число, не превосходящее x , — так называемую «целую часть числа x » или «антье». $[x]$ — это функция, названная в честь французского математика Антье — предшественника нашего подпоручика Кижэ. (Но вообще-то слово 'entier' означает 'целый'.)

Если $[x] = n$, то $n \leq x < n+1$. Например, $[2, 2] = 2$, $[-1, 3] = -1$, $[\sqrt{3}] = 1$, $[5] = 5$. Величина $x - [x]$, заключенная между 0 и 1 (включая 0 и не включая 1), называется «дробной частью числа x » и обозначается $\{x\}$. Таким образом, $x = [x] + \{x\}$.

26. Известно, что $[x] = 1$, $[y] = 2$. Можно ли найти $[x + y]$?

◀ Нет. Например, если $x = 1, 1$, $y = 2, 2$, то $[x + y] = 3$, а если $x = 1, 1$, $y = 2, 9$, то $[x + y] = 4$. ▶

27. Верно ли, что $[2x] = 2[x]$?

◀ Нет. Пусть $x = 1, 7$, тогда $[x] = 1$, $[2x] = 3 \neq 2[x]$. ▶

28. Верно ли, что $[x] + [x + 1/2] = [2x]$?

◀ Верно. Пусть $[x] = n$. Рассмотрим два случая: дробная часть числа x меньше $1/2$; больше (или равна) $1/2$. В первом случае $[x + 1/2] = n$, $[2x] = 2n$ и формула верна. Во втором случае

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = n + 1, \quad [2x] = 2n + 1$$

и формула снова верна.

Может быть, решение слишком короткое? Хорошо, пусть сначала $x = n + \alpha$, где $\alpha < 1/2$. Тогда, во-первых,

$$x + \frac{1}{2} = n + \alpha + \frac{1}{2} < n + 1$$

и значит, $[x + 1/2] = n$. Во-вторых, $2x = 2n + 2\alpha < 2n + 1$, поэтому $[2x] = 2n$. Таким образом,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = n + n = 2n = [2x].$$

Пусть теперь $x = n + \beta$, где $1/2 \leq \beta < 1$. Тогда, во-первых,

$$x + \frac{1}{2} = n + \beta + \frac{1}{2} \geq n + 1,$$

откуда

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = n + 1.$$

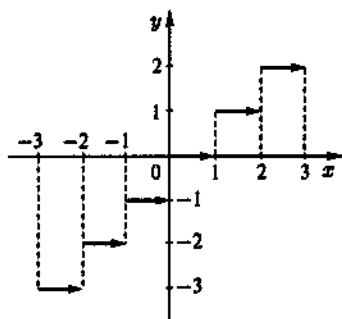


Рис. 1

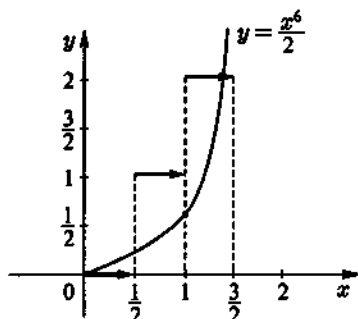


Рис. 2

Во-вторых,

$$2n + 1 \leq 2x = 2n + 2\beta < 2n + 2,$$

т.е. $[2x] = 2n + 1$. Таким образом,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = n + n + 1 = 2n + 1 = [2x].$$

►

Хорошо и надолго запоминается график антье — бесконечная вверх и вниз лестница, каждая ступенька которой имеет длину 1 и такую же высоту (рис. 1). Подобные графики со стрелочками ждут счастливых, претерпевших метаморфозу «абитуриент — студент», при изучении теории вероятностей.

29. Решить уравнение

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{x^6}{2} - [x].$$

◀ Используя формулу предыдущего примера, перепишем уравнение в виде $[2x] = x^6/2$. Очевидно, корнем может быть только $x \geq 0$. Построим графики левой и правой части. График функции $y = [2x]$ отличается от стандартного тем, что скачки следуют не через 1, а через $1/2$, но высота ступенек по-прежнему равна 1 (рис. 2). График функции $y = x^6/2$ не сильно отличается от знакомой каждому параболы, скажем, $y = x^2/2$, только вблизи 0 идет он ниже, а после 1 круче взмывает вверх.

Мы видим, что уравнение имеет два корня: первый равен нулю, а второй расположен на интервале $(1; 3/2)$. Значит, в этом случае $[2x] = 2$ и тогда уравнение принимает вид $x^6 = 4$, положительный корень которого $x = \sqrt[3]{2}$.

Но, может быть, читатель слышал мнение, что «график не доказательство»? Хорошо, убедимся, в том, что при $x \geq 3/2$ уравнение корней не имеет, чисто

аналитически. Пусть

$$\frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2},$$

где натуральное $n \geq 3$. Тогда

$$n \leq 2x < n+1 \quad \text{и} \quad [2x] = n.$$

Поскольку

$$\frac{x^6}{2} \geq \frac{n^6}{2^7},$$

достаточно доказать, что

$$\frac{n^6}{2^7} > n.$$

Но это неравенство равносильно неравенству $n^5 > 128$, которое при $n \geq 3$ верно. Значит, при $x \geq 3/2$ мы имеем $[2x] < x^6/2$, поэтому равенство

$$[2x] = \frac{x^6}{2}$$

выполняться не может. Для полноты надо доказать, что корней нет и на интервалах $(0; \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2}; 3/2)$; это предоставляется сделать читателю.

У нас еще будет достаточно поводов поговорить о доказательной силе графиков. ►

☛ **Ответ:** $0; \sqrt[3]{2}$.

30. Решить уравнение

$$\left[\frac{3+4x}{5} \right] = \frac{5x-4}{3}.$$

◀ Пусть $(5x-4)/3 = n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Выражая отсюда x , получим

$$x = \frac{3n+4}{5};$$

значит,

$$\frac{3+4x}{5} = \frac{15+20x}{25} = \frac{12n+31}{25}.$$

Уравнение принимает тогда вид

$$\left[\frac{12n+31}{25} \right] = n.$$

Теперь воспользуемся тем, что $0 \leq x - [x] < 1$. Это дает нам двойное неравенство

$$0 \leq \frac{12n+31}{25} - n < 1$$

(и возможность заглянуть в тему «решение неравенств»), которое приводится к виду $0 \leq 31 - 13n < 25$. Решать нам его, собственно, не надо: достаточно найти все целые n , ему удовлетворяющие. Ясно, что это $n = 1$ и $n = 2$. Этим значениям соответствуют корни исходного уравнения $x_1 = 7/5$, $x = 2$. ►

☛ **Ответ:** 7/5; 2.

Очередной рубеж нами достигнут. Какой? Чем обосновано именно такое количество примеров в параграфах? И за сколько времени их можно решить?

Нет, параграф — это не «урок», как у изумительного В. В. Ткачука: решить за раз весь параграф невозможно, это уж точно. Нет, это скорее *тема*, основные моменты которой освещают (по мнению автора) приведенные примеры. Но, разумеется, любой не разобранный автором пример потребует от ученика здравого смысла, умения и опыта. Я никоим образом не думаю, что чтение текста наградит всем этим любого читателя. Но, отправляясь от разобранного, он сможет вырабатывать нужные умения в других ситуациях.



Привал очарованных охотников

1. а) Известно, что $x + 1/x = 18$; найдите $\sqrt[3]{x} + 1/\sqrt[3]{x}$; б) найдите $x^5 + 1/x^5$, если $x + 1/x = 3$.
2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\text{а) } \frac{13\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3+4\sqrt{3}+4\sqrt[4]{27}}}; \quad \text{б) } \frac{215}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}};$$

$$\text{в) } \frac{811}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}.$$

3. Упростите

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

4. Упростите:

$$\text{а) } \frac{8 + 222 \cdot 444 \cdot 888 + 444 \cdot 888 \cdot 1776}{2 \cdot 4 \cdot 8 + 444 \cdot 888 \cdot 1776 + 888 \cdot 1776 \cdot 3552};$$

$$\text{б) } \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots} \right)^{1/3}.$$

5. Найдите натуральное n из условия

$$\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3} = \frac{199}{242}.$$

6. Сравните числа:

а) $\frac{8888888883}{8888888887}$ и $\frac{9999999994}{9999999999}$; б) $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{11}$ и $\left(1 + \frac{1}{11}\right)^{12}$.

7. а) Известно, что числа a , b и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ рациональны. Рационально или иррационально число $\sqrt{a}$? А $\sqrt{b}$?

б) Могут ли быть иррациональными числа a и b , если числа $a - b$ и ab рациональны?

8. Существуют ли такие иррациональные числа a и b , что оба корня уравнения $x^2 + ax + b = 0$ различны и а) рациональны; б) иррациональны?

9. Один из корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равен $\sqrt{3} - 1$. Найдите a и b , если они рациональны.

10. Докажите иррациональность чисел: а) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

11. Докажите, что между любыми двумя иррациональными числами содержится иррациональное число.

12. Числа

$$\frac{a+1}{a^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{a^2+1}{a^2+2}$$

рациональны. Рационально или иррационально число a ?

13. Существуют ли такие положительные рациональные a, b , что:

а) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$; б) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$;

в) такие положительные рациональные a, b, c , что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{2}$?

14. Рационально или иррационально число

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{847/27}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{847/27}}?$$

15. а) Докажите, что число $\log_{16} 36$ иррационально; б) то же относительно числа $\lg 5^\circ$.

16. а) Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

б) А числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ — членами одной арифметической прогрессии? (Имеется в виду — не обязательно последовательными).

17. Представьте в виде обыкновенной дроби: а) $0,272727\dots$; б) $0,(142857)$.

18. Рационально или иррационально число

$$0,12345678910111213141516\dots?$$

19. Вычислите произведение

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{99 \cdot 101}\right).$$

20. Докажите равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}.$$

21. Найдите

$$\frac{3^{100} + 4^{100}}{2^{100} + 5^{100}}$$

с точностью до 5 знаков после запятой.

22. Найдите целое число, равное значению выражения:

а) $\sqrt{2}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})\sqrt{15 + 6\sqrt{6}};$

б) $\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26 - \sqrt{3}};$

в) $\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{676} + \sqrt[3]{26}};$

г) $\left(\sqrt[6]{28 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{27}}\right)\sqrt[3]{1 - 3\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{26}}.$

23. Упростите при $x \in (3; 4)$ выражение

$$\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}.$$

24. (Привет из МЭИ). Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(1)$, если

$$f(x) = \left((\sqrt[4]{x} + 1)\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 1)^{-2}} - \sqrt[4]{x} \times \right. \\ \left. \times \sqrt[3]{\frac{(\sqrt[4]{x^3} + 1)(\sqrt[4]{x} - 1)^{-2}}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{x} + 1}}\right)^{-3} \times \frac{(1 - x)^2}{x + 2\sqrt{x} + 1}.$$

25. Проверьте равенство:

а) $\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}} = 2\sqrt{2};$

б) $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}\right)(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}) = 3;$

в) $\left(\sqrt[5]{\frac{32}{5}} - \sqrt[5]{\frac{27}{5}}\right)^{1/3} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}} - \sqrt[5]{\frac{9}{25}}.$

26. Упростите:

а) $\sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 9/2}$;

б) $\sqrt{\sqrt{6} + 5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}}$;

в) $\frac{\sqrt{6 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})} - \sqrt{6 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$.

27. Сравните числа:

а) $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{17}$; б) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{2}$; в) $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[6]{6}$;

г) $\sqrt[3]{46}$ и $2 + \sqrt[3]{4}$; д) $\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2}$ и $2 \cdot \sqrt[3]{n+1}$;

е) $\sqrt[3]{60}$ и $2 + \sqrt[3]{7}$.

28. Разность

$$\frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}} - \sqrt[4]{5}$$

является целым числом. Найдите его.

29. Докажите, что если $x^2 - 2x\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0$, то $x^8 - 16x^6 + 58x^4 - 48x^2 + 9 = 0$.

30. Решите уравнения с любезным участием антье:

а) $[x - 1] = \left[\frac{x+2}{2} \right]$; б) $x^4 - [x+1] = 2$;

в) $\left[\frac{8x+19}{7} \right] = \frac{16(x+1)}{11}$;

г) $[[x] + x] + x + [[x] + x] + [x] = 2x + 5$;

д) $[x] + [2x] + [3x] = 80$.

31. Найдите натуральные n , удовлетворяющие уравнению

$$2002[n\sqrt{1001^2 + 1}] = n[2002\sqrt{1001^2 + 1}].$$

32. Вычислите сумму: $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{2010}]$.

Советы и решения

Р 1. а) Пусть $\sqrt[3]{x} + 1/\sqrt[3]{x} = y$, тогда $y^3 = x + 1/x + 3y$ и, таким образом, $y^3 - 3y - 18 = 0$. Единственным корнем этого уравнения является $y = 3$.

б) Пусть $x^5 + 1/x^5 = y$. Возводя равенство $x + 1/x = 3$ в пятую степень, мы получим

$$x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} = 243$$

или

$$\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + 5\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) = 243.$$

Но

$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = 27,$$

откуда

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18.$$

Тогда $y + 5 \cdot 18 + 10 \cdot 3 = 243$, откуда $y = 123$.

Р 2. а) Поскольку $3 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{27} = \sqrt{3}(\sqrt[4]{3^2} + 4 + 4\sqrt[4]{3}) = \sqrt{3}(\sqrt[4]{3} + 2)^2$, исходное выражение преобразуется к виду

$$\frac{13\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3} + 2)} = \frac{13}{\sqrt[4]{3} + 2} = \frac{13(\sqrt[4]{3} - 2)}{\sqrt{3} - 4} = -(\sqrt[4]{3} - 2)(\sqrt{3} + 4).$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \frac{215}{\sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} &= \frac{215(\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \\ &= \frac{215(\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{3})}{1 + 2(\sqrt{14} - \sqrt{15})} = \frac{215(\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{3})(1 + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{15})}{(1 + 2\sqrt{14})^2 - 4 \cdot 15} = \\ &= \frac{215(\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{3})(1 + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{15})}{4\sqrt{14} - 3} = \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{3})(1 + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{15})(4\sqrt{14} + 3). \end{aligned}$$

в) Задачу можно свести к задаче, аналогичной предыдущей, при помощи выкладки

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) + (\sqrt{2} + \sqrt{7})} = \frac{(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) - (\sqrt{2} + \sqrt{7})}{(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{7})^2} = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{7}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15} - \sqrt{14})}.$$

$$\text{Р 3. } \dots = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{100} - \sqrt{99} = \sqrt{100} - 1 = 9.$$

$$\text{Р 4. а)} \dots = \frac{8(1 + 111 \cdot 222 \cdot 444 + 222 \cdot 444 \cdot 888)}{2 \cdot 4 \cdot 8(1 + 111 \cdot 222 \cdot 444 + 222 \cdot 444 \cdot 888)} = \frac{1}{8}.$$

б) Поскольку $1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots = 1 \cdot 2 \cdot 4(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + \dots)$ и аналогично $1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots = 1 \cdot 3 \cdot 9(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + \dots)$, данное выражение равно

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 9}\right)^{1/3} = \frac{2}{3}.$$

Р 5. Поскольку из равенства $a/b = c/d$ после прибавления к обеим частям по 1 следует равенство

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

данное в условии соотношение равносильно такому:

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3} = \frac{199 + 242}{242} \quad \text{или} \quad \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3}{2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)} = \frac{441}{242}.$$

Но, как известно,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

и поэтому

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 2n)^2 = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4}.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{2^3 n^2 (n+1)^2} = \frac{441}{242} \quad \text{или} \quad \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{441}{121}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2n+1}{n+1} = \frac{21}{11},$$

откуда $n = 10$.

Р 6. а) Пусть $a = 1111111111$; сравниваемые числа имеют вид

$$\frac{8a-5}{8a-1} \quad \text{и} \quad \frac{9a-5}{9a}.$$

Сравниваем $(8a-5)9a = 72a^2 - 45a$ и $(8a-1)(9a-5) = 72a^2 - 49a + 5$ или $4a$ и 5 . Поскольку $4a > 5$, первое из данных чисел больше.

б) Аналогично примеру 22 преобразуем сравнение к виду $(121/120)^{11} \vee 12/11$. По неравенству Бернулли, $(121/120)^{11} > 1 + 11/120 > 1 + 1/11$. Значит,

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{11} > \left(1 + \frac{1}{11}\right)^{12}.$$

Р 7. а) Поскольку

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

число $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ рационально. Тогда

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{a}$$

рационально и, значит, $\sqrt{a}$ рационально. Рационально и число $\sqrt{b}$, так как

$$2\sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

б) Конечно, могут, например, $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{2} + 1$.

Р 8. а) Разумеется, нет, ведь $x_1 x_2 = b$ и слева тогда стояло бы рациональное число, а справа — иррациональное.

б) Разумеется, существуют. Возьмем какое-нибудь уравнение с иррациональными коэффициентами, например,

$$x^2 - x\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2}.$$

Р 9. Подставим корень, мы получим

$$(\sqrt{3} - 1)^2 + a(\sqrt{3} - 1) + b = 0$$

или $4 - a + b + \sqrt{3}(a - 2) = 0$. Значит, одновременно $a - 2 = 0$ и $4 - a + b = 0$, откуда $a = 2$, $b = -2$.

Р 10. а) Пусть $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r$; тогда двукратным возведением в квадрат получаем равенство

$$\sqrt{5} = \frac{r^4 + 20r^2 - 24}{4r^3},$$

противоречащее иррациональности $\sqrt{5}$.

б) Если $\sqrt[3]{2} = p/q$ — несократимая дробь, то $p^3 = 2q^3$, т.е. $p = 2n$. Тогда $8n^3 = 2q^3$ или $4n^3 = q^3$, откуда $q = 2m$. Но тогда дробь p/q сократима.

в) Если $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = r$, $r \in \mathbb{Q}$, то $3 = (r - \sqrt{2})^3$, откуда после преобразований

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2},$$

что невозможно.

Р 11. Пусть $x = a, a_1 a_2 \dots$ и $y = b, b_1 b_2 \dots$ — данные числа, $a < b$. Выберем первое $a_k < 9$; тогда число $z = a, a_1 a_2 \dots (a_k + 1) 1234567 \dots$ иррационально и лежит между x и y . Если $x = a, a_1 a_2 \dots a_k \dots$, $y = a, a_1 a_2 \dots a_m \dots$, где $a_k < a_m$ (а до этого все знаки после запятой совпадают), то найдем первое (после a_k) $a_n < 9$ среди знаков x и положим $z = a, a_1 a_2 \dots (a_n + 1) 1234567 \dots$

(Числа вида $a, a_1 a_2 \dots a_k 999 \dots$, где все $a_m < 9$, рациональны — это просто

$$a, a_1 a_2 \dots (a_k + 1).$$

Чуть позже, в задаче 18 мы доказываем, что «хвост» 1234567... обеспечивает числу иррациональность.)

Р 12. Пусть

$$\frac{a+1}{a^2+1} = p, \quad \frac{a^2+1}{a^2+2} = q.$$

Тогда $a^2 + 1 = qa^2 + 2q$, откуда

$$a^2 = \frac{2q-1}{1-q}$$

и, соответственно,

$$a+1 = pa^2 + p = \frac{p(2q-1)}{1-q} + p,$$

т.е.

$$a = \frac{pq+q-1}{1-q}$$

рационально.

Р 13. а) Существуют, например, $a = b = 1/2$.

б) Если $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$, то

$$a + b + 2\sqrt{ab} = \sqrt{2}, \quad 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} - (a + b), \quad 4ab = 2 - 2\sqrt{2}(a + b) + (a + b)^2$$

и в конечном итоге получается, что $\sqrt{2}$ равен отношению рациональных чисел, что невозможно.

в) Поскольку

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1, \quad \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{1}{36}} = 1,$$

следовательно,

$$\sqrt{\frac{2}{4}} + \sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{\frac{2}{36}} = \sqrt{2},$$

т.е. $a = 1/2$, $b = 2/9$, $c = 1/18$.

Р 14. Данное число равно 3.

Р 15. а) Поскольку

$$\log_{16} 36 = \log_4 6 = \frac{1}{2} \log_2 (2 \cdot 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 3,$$

предположим, что $\log_2 3 = m/n$, где $(m, n) = 1$. Тогда $2^m = 3^n$, но это невозможно.

б) Если допустить, что $\operatorname{tg} 5^\circ = x$ рационален, то по формуле тангенса тройного угла

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$

Но с другой стороны, $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} (45^\circ - 30^\circ) = 2 - \sqrt{3}$ и равенство

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = 2 - \sqrt{3}$$

при рациональном x невозможно ввиду иррациональности $\sqrt{3}$.

Р 16. а) Допустим, такая прогрессия существует и q — ее знаменатель. Тогда $11 = 10 \cdot q^k$, $12 = 10 \cdot q^m$, где $m, k \in \mathbb{Z}$. Исключая из этих соотношений q , получаем равенство $11^m \cdot 5^k = 6^k \cdot 10^m$, возможное только при $k = m = 0$, что не отвечает смыслу задачи. Значит, данные числа не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

б) Если d — разность прогрессии, то можно написать:

$$\sqrt{3} = \sqrt{2} + dm, \quad \sqrt{5} = \sqrt{2} + dk,$$

где $m, k \in \mathbb{Z}$. Исключив из этих равенств d , получим $k/m = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$, что невозможно.

Р 17. а) Если $0, (27) = x$, то $100x = 27, (27)$, таким образом, $99x = 27$, т.е. $x = 27/99$.

б) $0, (142857) = x \Rightarrow 10^6 x = 142857 + x \Rightarrow x = 142857/999999 = 1/7$.

Р 18. Предположим, что данная дробь является периодической и период состоит из m цифр. Поскольку наше число составлено из всех натуральных чисел, где-то находится число 10^m , состоящее из m нулей. Но тогда период должен состоять из одних нулей, что невозможно.

Р 19. Поскольку

$$1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)},$$

данное произведение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdots \frac{99 \cdot 101 + 1}{99 \cdot 101} &= \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots 100^2}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 97 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 101} = \\ &= \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots 100^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdots 99^2 \cdot 100 \cdot 101} = \frac{2 \cdot 100}{101} = \frac{200}{101}. \end{aligned}$$

Р 20. Перепишем доказываемое равенство так:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) + \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

или, добавляя к обеим частям равенства сумму

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100},$$

что, разумеется, верно. Для (строгого) доказательства следует переписать эти равенства в обратном порядке, вычитая из последнего равенства указанную сумму.

Р 21. Не вызывает сомнений, что

$$0 < \frac{3^{100} + 4^{100}}{2^{100} + 5^{100}} < \frac{3^{100} + 4^{100}}{5^{100}} = (0,6)^{100} + (0,8)^{100}.$$

И, наверное, важно, чтобы учащийся понимал, что некоторое число первых знаков после запятой в последнем числе — это нули. Сколько их? Вопрос другой. Больше пяти или меньше? Поскольку $(0,8)^{100} = 8^{100} \cdot 10^{-100}$, этот вопрос приводит к другому: сколько значащих цифр в числе $8^{100} = 2^{300}$? Когда мы дойдем до логарифмов, то легко установим, что в этом числе 91 цифра. Можно обойтись и без логарифмов, однако это требует известной эквилибристики.

Во-первых,

$$2^{300} = (2^{10})^{30} = (1024)^{30} > 1000^{30} = 10^{90},$$

т. е. в числе 2^{300} не менее 91 цифры (поскольку 10^{90} имеет 91 цифру: одну единицу и 90 нулей). С другой стороны,

$$\frac{(1024)^{30}}{(1000)^{30}} < \left(\frac{1025}{1000} \right)^{30} = \left(\frac{41}{40} \right)^{30} = \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \dots \cdot \frac{41}{40} < \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdot \dots \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{12}{11} = \frac{41}{11} < 10$$

(мы заменяем в произведении каждую дробь вида $(n+1)/n$ (кроме первой) меньшей дробью $n/(n-1)$). Значит, $(1024)^{30} < 10^{91}$ и число 2^{300} имеет менее 92 цифр. В § 16 мы при доказательстве пользуемся другими методами и неравенствами. Но вернемся к нашей задаче. Итак, в числе 2^{300} 91 цифра, значит, в числе $8^{100} \cdot 10^{-100}$ первые 9 знаков после запятой нули. В числе $(0,6)^{100}$ нулей после запятой еще больше, значит, при сложении заведомо получится 0 с точностью до пяти знаков (и даже до 9).

Р 22. а) Поскольку $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < 0$, имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} &= -\sqrt{2}\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2(15 + 6\sqrt{6})} = \\ &= -\sqrt{2(30 - 12\sqrt{6})(15 + 6\sqrt{6})} = -\sqrt{900 - 144 \cdot 6} = -6. \end{aligned}$$

б) Предположим, что выражение $15\sqrt{3} - 26$ является полным кубом, т. е. имеет вид $(a\sqrt{3} - b)^3$, и попробуем подобрать нужные коэффициенты a и b . Раскроем скобки:

$$(a\sqrt{3} - b)^3 = 3\sqrt{3}a^3 - 9a^2b + 3\sqrt{3}ab^2 - b^3 = 15\sqrt{3} - 26$$

и потребуем выполнения двух условий: $3a^3 + 3ab^2 = 15$, $9a^2b + b^3 = 26$. Нам не нужно решать эту систему по всем правилам — достаточно просто подобрать хотя бы одну пару, а это нетрудно: $a = 1$, $b = 2$. Таким образом,

$$\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = -2.$$

в) Если

$$\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{676}} + \sqrt[3]{26} = a,$$

то

$$1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{676} = a^3 - 3a^2\sqrt[3]{26} + 3a\sqrt[3]{676} - 26.$$

Приравняв коэффициенты при свободном члене, $\sqrt[3]{26}$ и $\sqrt[3]{676}$, получим три равенства: $a^3 = 27$, $-27 = -3a^2$, $9 = 3a$, откуда $a = 3$.

г) $28 + 6\sqrt{3} = (3\sqrt{3} + 1)^2$, т. е.

$$\sqrt[6]{28 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3} + 1}.$$

Далее:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3\sqrt{3} + 1}.$$

Таким образом, исходное выражение равно

$$\frac{4}{3} \sqrt[3]{3\sqrt{3} + 1} \cdot \sqrt[3]{1 - 3\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{26}} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{-26} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{26}} = -4.$$

Р 23. Заменим $\sqrt{2x - 4} = y$; тогда

$$x = \frac{y^2 + 4}{2} \quad \text{и} \quad x + 2\sqrt{2x - 4} = \frac{y^2 + 4}{2} + 2y = \frac{(y + 2)^2}{2}.$$

Аналогично

$$x - 2\sqrt{2x - 4} = \frac{(y - 2)^2}{2}.$$

Если $x \in (3; 4)$, то $y \in (\sqrt{2}; 2)$ и исходное выражение следует преобразовать так:

$$\frac{y + 2}{\sqrt{2}} + \frac{|y - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{y + 2 + 2 - y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Р 24. Пусть $\sqrt[4]{x} = a$; тогда выражение в больших скобках имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{a + 1}{\sqrt[3]{(a^2 - 1)^2}} - a \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3 + 1}{(a - 1)^2(a^2 - a + 1)}} &= \frac{(a + 1)^{1/3}}{(a - 1)^{2/3}} - a \frac{(a + 1)^{1/3}}{(a - 1)^{2/3}} = \\ &= \frac{(a + 1)^{1/3}(1 - a)}{(a - 1)^{2/3}} = -(a^2 - 1)^{1/3} \end{aligned}$$

и всё вместе равно

$$-(a^2 - 1)^{-1} \cdot \frac{(1 - a^4)^2}{a^4 + 2a^2 + 1} = \frac{(a^2 - 1)^2(a^2 + 1)^2}{(1 - a^2)(a^2 + 1)^2} = 1 - a^2,$$

т. е. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $f'(x) = -1/2\sqrt{x}$ и $f'(1) = -1/2$.

Р 25. а) Воспользуемся для разнообразия формулой сложного радикала, согласно которой

$$\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + (\sqrt{5} + 1)/\sqrt{2}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - (\sqrt{5} - 1)/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

б) Знаменатели обеих дробей в первой скобке — неполные квадраты суммы; соответственно, избавляясь от иррациональности в этих знаменателях, получаем в первой скобке

$$\frac{2(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})}{5 - 3} + \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{3 - 2} = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}.$$

Умножение этой разности на вторую скобку, т. е. на $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} \cdot 2 + \sqrt[3]{2}$, снова происходит по формуле разности кубов. В итоге имеем $5 - 2 = 3$.

в) Если заменить $\sqrt[3]{3} = a$, $a^3 = 3$, то доказательство сводится к проверке равенства $(1 + a - a^2)^3 = 5(2 - a^3)$; при этом следует делать упрощения вроде $a^6 = 3a$ и т. п.

Р 26. а) Направим свои усилия на принудительное выделение полных квадратов. Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2} &= (2\sqrt{3} + 4) + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} = (\sqrt{3} + 1)^2 + \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) + \frac{1}{2} = \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

И упрощаемое выражение оказывается равным

$$\sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

в) Поскольку

$$6 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = (4 + 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) + 1 = (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)^2$$

и аналогично

$$6 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = (4 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) + 1 = (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)^2,$$

исходное выражение равно

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = 2.$$

Р 27. а) Вот как сравнение проводится без лишних слов:

$$\begin{aligned} \sqrt{7} + \sqrt{10} \sqrt{3} + \sqrt{17} &\Leftrightarrow 17 + 2\sqrt{70} \sqrt{20} + 2\sqrt{51} \Leftrightarrow 2\sqrt{70} \sqrt{3} + 2\sqrt{51} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 280 \sqrt{213} + 12\sqrt{51} \Leftrightarrow 67 \sqrt{12\sqrt{51}} \Leftrightarrow 4489 < 7344. \end{aligned}$$

Значит, $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{17}$.

$$\text{б) } \sqrt[10]{5} \sqrt{2} \Leftrightarrow 25 < 32 \text{ (возведение в 10 степень).}$$

в) $\sqrt[5]{5} \vee \sqrt[5]{6} \Leftrightarrow 5^6 > 6^5$ (возведение в 30 степень). Другой способ сравнения, основанный на неравенстве

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

разбирается в § 16.

г)

$$\sqrt[3]{46} \vee 2 + \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 17 \vee 6\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{16} \quad (*)$$

(возведение в куб)

$$\Leftrightarrow 17\sqrt[3]{4} \vee 6\sqrt[3]{16} + 12. \quad (**)$$

После умножения (*) на 17, а (**) на 6 и сложения получаем

$$217 \vee 87\sqrt[3]{16} \Leftrightarrow 10218313 \vee 10536048,$$

т.е. первое число меньше.

д) Рассмотрим разность сравниваемых чисел.

$$\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} = (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}) - (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$$

Кто-то сомневается, что вторая скобка больше? Подтвердим это.

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}) - (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n+2)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}} < 0, \end{aligned}$$

поскольку знаменатель первой дроби больше.

е) Числа $\sqrt[3]{60}$ и $2 + \sqrt[3]{7}$ можно сравнить и способом, отличным от приведенного в теоретической части параграфа, а именно, при помощи неравенства

$$\frac{a^3 + b^3}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

(которое легко доказывается раскрытием скобок). Это неравенство можно переписать в виде

$$a + b < 2\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}$$

и тогда

$$2 + \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7} < 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{8+7}{2}} = \sqrt[3]{60}.$$

Р 28. Поскольку

$$\begin{aligned} 2(2 + \sqrt{5}) - \sqrt[4]{5}(3 + \sqrt{5}) &= 2 \cdot \frac{(\sqrt{5} + 1)^3}{8} - \sqrt[4]{5} \cdot \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{2} = \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{2} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \sqrt[4]{5} \right) = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{2} \cdot \frac{(\sqrt[4]{5} - 1)^2}{2}, \end{aligned}$$

исходное выражение приводится к виду

$$\frac{4}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt[4]{5} - 1)} - \sqrt[4]{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt[4]{5} - 1} - \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5} + 1 - \sqrt[4]{5} = 1.$$

Р 29. Корнями данного квадратного уравнения являются числа

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Пусть $x^2 = y$; тогда доказываемое равенство переписывается в виде

$$y^4 - 16y^3 + 58y^2 - 48y + 9 = 0 \quad \text{или} \quad (y^2 - 8y)^2 - 6(y^2 + 8y) + 9 = 0.$$

Для первого корня имеем $y = 2 + \sqrt{3}$, $y^2 = 7 + 4\sqrt{3}$; тогда

$$\begin{aligned} (y^2 - 8y)^2 - 6(y^2 + 8y) + 9 &= (9 + 4\sqrt{3})^2 - 6(23 + 12\sqrt{3}) + 9 = \\ &= 81 + 48 - 138 + 9 + 72\sqrt{3} - 72\sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

Для второго корня $y = 6 - 3\sqrt{3}$, $y^2 = 9(7 - 4\sqrt{3})$ и в этом случае

$$\begin{aligned} (y^2 - 8y)^2 - 6(y^2 + 8y) + 9 &= \\ &= (15 - 12\sqrt{3})^2 - 6(111 - 60\sqrt{3}) + 9 = 9(25 + 48 - 73 - 40\sqrt{3} + 40\sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

Задача, конечно, неказиста (или решение ее), однако она освящена именем Г. Харди, автора «Апологии математика» и не только; кроме того, умение доводить до конца расчеты полезно тем, кто свяжет свою судьбу с техническим вузом.

Р 30. а) Пусть

$$[x - 1] = n \quad \text{и} \quad \left[\frac{x + 2}{2} \right] = n.$$

Тогда неравенство $0 \leq x - [x] < 1$ приводит нас к системе

$$\begin{cases} 0 \leq x - 1 - n < 1, \\ 0 \leq \frac{x + 2}{2} - n < 1, \end{cases}$$

которую можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} n + 1 \leq x < n + 2, \\ 2n - 2 \leq x < 2n. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, если $2n - 2 \geq n + 2$, т.е. при $n \geq 4$; и она не имеет решений, если $2n \leq n + 1$, т.е. $n \leq 1$. Значит она имеет решения в двух случаях: при $n = 2$ и при $n = 3$. Тогда $x \in [3; 4)$ или $x \in [4; 5)$.

б) Поскольку $[x + 1] = [x] + 1$, уравнение можно переписать в виде $x^4 = [x] + 3$. Из рассмотрения графиков левой и правой частей очевидно, что уравнение имеет один положительный корень, который находится между 1 и 2. Тогда $[x] = 1$ и $x^4 = 4$, откуда $x = \sqrt[4]{4}$. Если не учитывать стрелочки, то может показаться, что корнем является и $x = -1$, поскольку оба графика вроде бы проходят через точку $(-1; 1)$. Однако это не так: при $x = -1$ функция $f(x) = [x] + 3$ принимает значение 2, а не 1.

в) Если обозначить $16(x + 1)/11 = n$ и выразить x , придем к уравнению

$$\left[\frac{11n + 22}{14} \right] = n.$$

Неравенство $0 \leq (11n + 22)/14 - n < 1$ выполнено при $3 \leq n \leq 7$ (конечно, $n \in \mathbb{N}$).

г) Поскольку $\{[x] + x\} = [x] + \{x\} = 2\{x\}$ и аналогично с первым слагаемым, уравнение равносильно такому: $6\{x\} = 2x + 5$. Пусть $2x + 5 = n$, тогда $\{(n - 5)/2\} = n/6$. Условие $0 \leq (n - 5)/2 - n/6 < 1$ выполнено при трех целых значениях n , а именно $n = 8, 9, 10$.

д) Здесь нам придется пойти дальше равенства $[x] + [x + 1/2] = [2x]$, установлен-ного выше, обобщив его так:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x].$$

Для доказательства надо рассмотреть уже три случая:

$$0 \leq \{x\} < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \leq \{x\} < \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq \{x\} < 1.$$

Делается это так же, как в примере 28 настоящего параграфа.

Вообще для любого натурального n верно равенство

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

С учетом сказанного уравнение принимает вид

$$3[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = 80.$$

Для решения надо как всегда положить $[x] = n$ и рассмотреть 4 случая: 1) $0 \leq \{x\} < 1/3$; 2) $1/3 \leq \{x\} < 1/2$; 3) $1/2 \leq \{x\} < 2/3$; 4) $2/3 \leq \{x\} < 1$. В первом случае имеем уравнение $3n + n + n + n = 80$ и решений нет. Во втором случае имеем $3n + n + n + (n + 1) = 80$ и решений нет. В третьем получаем $3n + n + (n + 1) + (n + 1) = 80$, откуда $n = 13$. Тогда

$$13\frac{1}{2} \leq x < 13\frac{2}{3}.$$

В 4-м случае решений снова нет.

Р 31. Правую часть уравнения можно записать в «нормальном виде» (т. е. вычислить целую часть данного числа). Действительно, заметим прежде всего, что

$$\sqrt{1001^2 + 1} < 1001 + \frac{1}{2002},$$

поскольку это неравенство равносильно верному неравенству

$$1001^2 + 1 < 1001^2 + 1 + \frac{1}{2002^2}.$$

Таким образом,

$$2002 \cdot 1001 < 2002\sqrt{1001^2 + 1} < 2002 \cdot 1001 + 1$$

и, значит $[2002\sqrt{1001^2 + 1}] = 2002 \cdot 1001$.

Уравнение принимает вид $[n\sqrt{1001^2 + 1}] = 1001n$. Теперь воспользуемся неравенством

$$\sqrt{1001^2 + 1} > 1001 + \frac{1}{2003}$$

(которое равносильно $1001^2 + 1 > 1001^2 + 2002/2003 + 1/2003^2$ или $1/2003 > 1/2003^2$, что верно). Из него следует, что пока $n < 2003$, мы имеем

$$[n\sqrt{1001^2 + 1}] = 1001n,$$

т. е. все такие n являются решениями уравнения. Если же $n \geq 2003$, то $[n\sqrt{1001^2 + 1}] = 1002n$, и такие значения не годятся.

Р 32. Как устроена данная сумма? Первые 3 слагаемых равны 1; следующие 5 слагаемых равны 2; следующие 7 слагаемых равны 3 и т. д. Иными словами, мы имеем такую сумму:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + 43 \cdot (2 \cdot 43 + 1) + 44 \cdot (2010 - 1935).$$

Попробуем объяснить конец. Число 2010 заключено между $44^2 = 1936$ и $45^2 = 2025$. Поэтому последние слагаемые от $[\sqrt{1936}]$ до $[\sqrt{2010}]$ все равны 44. Что касается выражений вида $2n + 1$ в каждой из скобок, то они объясняются тем, что $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Теперь считаем. Отбросим пока последнее слагаемое $44 \cdot 75$. Сумма

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + 43 \cdot (2 \cdot 43 + 1)$$

в математике записывается так:

$$\sum_{n=1}^{43} n(2n + 1),$$

что позволяет легко ее вычислить. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{43} n(2n + 1) = 2 \sum_{n=1}^{43} n^2 + \sum_{n=1}^{43} n.$$

Но

$$\sum_{n=1}^{43} n = \frac{43 \cdot 44}{2} = 43 \cdot 22; \quad \sum_{n=1}^{43} n^2 = \frac{43 \cdot 44 \cdot 87}{6} = 43 \cdot 22 \cdot 29.$$

Окончательно: $43 \cdot 22 \cdot 59 + 44 \cdot 75 = 59114$.

Мы использовали две формулы: формулу суммы $n = 43$ членов арифметической прогрессии

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

и формулу

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

(также при $n = 43$), доказанную в § 24.

Откуда берутся такие формулы? Благодарное человечество бережно хранит их со времен Архимеда.



Ответы

1. а) 3; б) 123; 2. а) $(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 4)$;
 б) $(\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{3})(1 + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{15})(4\sqrt{14} + 3)$; в) $ABCD/9$,
 где $2A = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{7}$, $B = \sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{5} + \sqrt{14}$, $C = 6\sqrt{5} - 1 - 2\sqrt{70}$,
 $D = 99 - 12\sqrt{5}$; 3. 9; 4. а) $1/8$; б) $2/3$; 5. 10; 6. а), б) первое число больше;
 7. а) рациональны; б) могут; 8. а) нет; б) да; 9. $a = 2$, $b = -2$;
 12. Рационально; 13. а) да; б) нет; в) да; 14. Рационально; 16. а) нет; б) нет;
 17. а) $27/99$; б) $1/7$; 18. Иррационально; 19. $200/101$; 21. $0,00000\dots$;
 22. а) -6 ; б) -2 ; в) 3; г) -4 ; 23. $2\sqrt{2}$; 24. $f'(x) = -1/2\sqrt{x}$; $-1/2$;
 26. а) $\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}/2$; б) $1 + \sqrt{3}/2 + \sqrt{5}/2$; в) 2; 27. в) — первое число больше;
 в остальных — первое меньше; 28. 1; 30. а) $\{3; 5\}$; б) $\sqrt{2}$; в) $17/16$; $7/4$; $39/16$;
 $25/8$; $61/16$; г) $3/2$; 2; $5/2$; д) $[27/2; 41/3]$; 31. $1 \leq n \leq 2002$; 32. 59114.

Глава 2

Алгебра во всем ее блеске и великолепии¹⁾

*Что же ты любишь? — спросила девочка. —
Математику люблю, — ответил мальчик.*

Р. Фраерман. Дикая собака динго,
или Повесть о первой любви

*Verginibus puerisque canto. —
Девам и юношам я пою.*

Гораций. Оды. III, I, 1–4

§ 4. Алгебраические уравнения

Часть первая

Уравнения будут сопутствовать нам до конца. В ближайших двух параграфах мы рассмотрим алгебраические и иррациональные уравнения, не касаясь тригонометрии и логарифмов.

Все умеют решать уравнения 1-й и 2-й степени. Причиной осложнений здесь может явиться разве что предложение найти корень (корни) устно (без помощи калькулятора), или же коэффициенты уравнения окажутся «неудобными».

1. Решить устно уравнение $1603x^2 + 736x - 867 = 0$.

◀ Конечно, здесь предполагается не вычисление «в уме» дискриминанта, а угадывание корня, — который почти очевиден: $x_1 = -1$, поскольку $1603 - 736 - 867 = 0$ (вот это и нужно сосчитать в уме) — и последующее применение теоремы вели-

¹⁾ Ну, может, и не во всём, но учитель иногда вправе преувеличить важность изучаемого — а ученику приятно питать иллюзии...

кого Ф. Виета (1540–1603) для корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, состоящей, как мы помним, в том, что $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 x_2 = c/a$, — на что косвенно указывает старший коэффициент трёхчлена.

В данном случае условие $x_1 x_2 = -867/1603$ при $x_1 = -1$ сразу даёт $x_2 = 867/1603$. ►

☛ **Ответ:** -1 , $867/1603$.

2. Решить устно уравнение

$$x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}.$$

◀ С одной стороны, данное уравнение, конечно, приводится к квадратному $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Но с другой — человек, способный увидеть (угадать), что число $x_1 = 2$ подходит (а значит, и $x_2 = 1/2$ тоже, поскольку левая часть представляет собой сумму взаимно обратных величин), уже может претендовать на нечто большее... ►

☛ **Ответ:** $1/2$, 2 .

3. Решить уравнение $x^2 - 6x + 4 + 2\sqrt{6} = 0$.

◀ При решении квадратных уравнений иногда полезно представлять себе, откуда берётся формула для его корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Так вот: для того чтобы ее получить, в уравнении выделяется полный квадрат. (Те, кто заглядывал в § 24, уже это знают.) В данном случае мы начинаем с $x^2 - 6x = -4 - 2\sqrt{6}$, потом делаем

$$x^2 - 6x + 9 = -4 - 2\sqrt{6} + 9 \quad \text{или} \quad (x - 3)^2 = 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2.$$

Тогда $x - 3 = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. ►

☛ **Ответ:** $3 \pm (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

4. Решить уравнение $x^3 + 2\sqrt{3} \cdot x^2 + 3x + \sqrt{3} - 1 = 0$.

◀ Алгебра, алгебра... «Великое искусство»... Все знают, что такое квадратное уравнение. Знают? А предложенное уравнение — квадратное? «Нет, конечно, — скажет возмущенный читатель. — Оно кубическое».

Справедливо. Однако на то и алгебра, чтобы оперировать *буквенными выражениями*, и желательно с большой ловкостью. Заметим избыточное количество троек среди коэффициентов уравнения и обозначим $\sqrt{3}$ через y , соответственно 3 — через y^2 . Мы получим тогда уравнение, *квадратное относительно y* :

$$xy^2 + (2x^2 + 1)y + x^3 - 1 = 0.$$

Его дискриминант оказывается полным квадратом: $D = (2x + 1)^2$; отсюда $y_1 = -x + 1$, $y_2 = -x - 1 - 1/x$. Это дает нам два уравнения:

1) $\sqrt{3} = -x + 1$, откуда $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; 2) $x + 1/x + 1 + \sqrt{3} = 0$, и тогда

$$x_{2,3} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}.$$

❖ **Ответ:** $1 - \sqrt{3}$, $(-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{2\sqrt{3}})/2$.

Цитирование великих позволительно — особенно в таком важном месте, где речь идет об Алгебре вообще, а не о мелочах абитуриентской жизни. Вот что пишут И. М. Гельфанд и А. Х. Шень (пусть и по другому поводу):

Возможно, это решение обескуражило Вас — непонятно, как до него догадаться. Авторам это тоже непонятно.

Мы еще раз убедились, что квадратный трёхчлен может быть тщательно замаскирован под нечто, имеющее более высокую степень — и дальнейшие примеры на эту тему будут встречаться нам постоянно. То же относится и к теореме Виета, разговор о которой вскоре продолжится. А пока мы останавливаемся на алгебраических уравнениях в чистом виде, т. е. на уравнениях $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, в которых все a_k — целые числа.

Перейдем теперь к случаю $n = 3$ и рассмотрим *кубическое уравнение*. (Заметим, что мы уже умеем решать такое уравнение, если оно имеет рациональный корень.) Пример 1 показал, что при решении уравнений полезным может оказаться анализ его *коэффициентов*, т. е. любая подмеченная нами закономерность (например, симметрия) среди чисел $a_0, a_1, \dots$.

5. Решить уравнение $42x^3 + 127x^2 + 127x + 42 = 0$.

◀ В этом уравнении сразу обращают на себя внимание две пары равных коэффициентов: $a_0 = a_3 = 42$, $a_1 = a_2 = 127$. Такое уравнение называется *симметричным*; оно всегда имеет корень $x_1 = -1$.

Чтобы найти остальные корни, можно использовать группировку слагаемых (или деление уголком):

$$\begin{aligned} 42(x^3 + 1) + 127x(x + 1) &= 0 \Rightarrow 42(x + 1)(x^2 - x + 1) + 127x(x + 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x + 1)(42x^2 + 85x + 42) = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение $42x^2 + 85x + 42 = 0$, найдём $x_2 = -6/7$, $x_3 = -7/6$. ►

☛ **Ответ:** $-7/6$, -1 , $-6/7$.

Не откладывая в долгий ящик случай уравнения 4-й степени, скажем, что и оно также может оказаться симметричным, если $a_0 = a_4$, $a_1 = a_3$, но здесь корни $x = -1$ в общем случае нет, и поэтому для решения требуется иной алгоритм, а именно замена переменной по правилу $x + 1/x = y$.

6. Решить уравнение $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$.

◀ Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, можно разделить обе части равенства на x^2 и сгруппировать попарно крайние и средние слагаемые:

$$x^2 - 2x - 13 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 13 = 0.$$

Если $x + 1/x = y$, то

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2,$$

поэтому имеем уравнение $y^2 - 2y - 15 = 0$, корни которого $y_1 = -3$, $y_2 = 5$. Осталось решить два уравнения $x + 1/x = -3$ и $x + 1/x = 5$, сводимые к квадратным $x^2 + 3x + 1 = 0$ и $x^2 - 5x + 1 = 0$. ►

☛ **Ответ:** $(-3 \pm \sqrt{5})/2$, $(-5 \pm \sqrt{21})/2$.

Близкое к симметричному кубическое уравнение вида

$$a_0x^3 + a_1x^2 - a_1x - a_0 = 0$$

всегда имеет корень $x_1 = 1$. Что касается «квасисимметричного» уравнения 4-й степени $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = 0$, то для его решения нужно повторить выкладки примера 6 с заменой $x - 1/x = y$ и, соответственно,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = y^2 + 2.$$

7. Решить уравнение $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$.

◀ Предоставляем читателю самому реализовать описанный алгоритм и убедиться, что корнями уравнения будут

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Симметричные уравнения являются частным случаем так называемых *возвратных* уравнений, которые в случае уравнений 3 и 4 степеней можно записать в виде:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + ka_1x + k^3a_0 = 0, a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + ka_1x + k^2a_0 = 0,$$

где k — некоторое не равное нулю число.

Возвратные уравнения 3-й степени допускают выделение множителя $x + k$, уравнения 4-й степени решаются заменой $x \pm k/x = y$.

8. Решить уравнение $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

◀ В этом случае $a_1 = -a_0 = -1$ и, поскольку коэффициент при x равен 2, число $k = -2$. После деления на x^2 ($x = 0$ не является корнем) и группировки имеем:

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 10 = 0.$$

Заменив $x - 2/x = y$ и выразив $x^2 + 4/x^2 = y^2 + 4$, придем к уравнению $y^2 - y - 6 = 0$, корни которого $y_1 = -2$, $y_2 = 3$. Осталось решить два квадратных уравнения $x^2 - 3x - 2 = 0$ и $x^2 + 2x - 2 = 0$. ►

☞ **Ответ:** $(3 \pm \sqrt{17})/2, -1 \pm \sqrt{3}$.

Оглянемся, читатель! Припомним дела не столь уж давно минувшие... В 8 классе мы знакомимся с Квадратными уравнениями. Знаменательное событие! И потом, на протяжении 9–10, может быть даже и 11-го класса, каждая встреча с уравнением третьей степени (а тем более — четвертой или пятой) — это всегда своего рода шок... Однажды нам под великим секретом сообщают о некоем Безу, который подобно Колумбу отважился проникнуть в неизведанные края (а то, что на самом деле колумбами были итальянцы Шипионе дель Ферро и Никколо Тарталья почему-то не касается нашего слуха).

Из уважения к своему столь недавнему детству решим еще несколько уравнений. Это может оказаться полезным и для будущего. Мы ведь всегда охотнее раскрываем скобки и выполняем преобразования, чтобы получить уравнение сколь угодно большой степени, нежели ищем иной, рациональный способ. В нас сильна надежда на чудо, на то, что уравнение *удастся решить*. И эти уравнения *хочется* решать, ибо не пахнет еще ни тригонометрией, ни логарифмами: кажется, у нас *всё есть* для того чтобы решить такую задачу...

9. Решить уравнения:

а) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$;

б) $8x^5 + 12x^3 + 2x^2 + 3 = 0$; в) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 8x + 24 = 0$;

г) $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2 = 0$; д) $x^5 - 3x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0$;

е) $64x^6 - 80x^4 - 20x^2 + 1 = 64x^3$.

а) Первым находится либо корень $x = 1/2$, либо $x = -3$; после деления сперва на $(2x - 1)$, потом — на $x + 3$, получаем квадратное уравнение

$$3x^2 + 2x - 4 = 0,$$

а вместе с ним и еще два корня:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

б) Перепишем так: $4x^3(2x^2+3)+(2x^2+3)=0$, тогда $(2x^2+3)(4x^3+1)=0$, значит,

$$4x^3 + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

в) Перегруппируем члены предложения:

$$\begin{aligned} (x^4 - 11x^2 + 24) - x^3 + 8x = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 8)(x^2 - 3) - x(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8 = 0, \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} &\text{и} \quad x = \pm 2\sqrt{2}, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

г) Подстановкой убеждаемся, что $x_1 = 1$ — корень уравнения. Разделив многочлен $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2$ на $x - 1$, получим в частном

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2.$$

Имеем уравнение $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$, корнем которого также является $x_2 = 1$. Снова выполняя деление, приходим к уравнению $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ или $x^2(x - 1) + 2(x - 1) = 0$. Отсюда $(x - 1)(x^2 + 2) = 0$, т. е. $x_3 = 1$. Других корней уравнение не имеет.

д) Корень $x = -1$ подбирается. Делить долго, поэтому выделим множитель $x + 1$ непосредственно:

$$(x^5 + x^4) - (4x^4 + 4x^3) + (3x^3 + 3x^2) + (2x^2 + 2x) - (x + 1) = 0$$

или

$$(x + 1)(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) = 0.$$

Уравнение $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ уже не имеет ни целых, ни дробных корней. Что делать? Как-то выворачиваться. Призываем на помощь Полный квадрат (а что еще?) и...

$$(x^2 - 2x)^2 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 = (x - 1)^2,$$

откуда $x^2 - 2x = \pm(x - 1)$. Решая полученные квадратные уравнения, находим

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

е) Здесь мы снова сталкиваемся с возвратным уравнением (6-й степени). Поскольку $x = 0$ — не корень, делим уравнение на x^3 и переписываем так:

$$64x^3 + \frac{1}{x^3} - 20\left(4x + \frac{1}{x}\right) - 64 = 0.$$

Заменяя $4x + 1/x = y$, найдем

$$64x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(4x + \frac{1}{x}\right)\left(16x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}\right) = y(y^2 - 12)$$

и получим уравнение $y^3 - 32y - 64 = 0$, корни которого $y = -4$ и $y = 2 \pm 2\sqrt{5}$.
Окончательно

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Уравнения 4-й степени дают отличный материал для отработки упоминавшегося выше движения «полный квадрат» — одного из китов, на которых покоится абитуриентская математика (о количестве китов пусть спорят специалисты). И хотя путь от значка ГТО к олимпийским медалям еще достаточно проблематичен, но начинать надо уже сейчас.

10. Решить уравнение $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$.

◀ Вот преобразования, ведущие к цели:

$$x^4 - 2x^2 - x^2 + 4x - 3 = 0, \quad x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0,$$

$$(x^2 - 1)^2 = (x - 2)^2,$$

и т. д.

Надеемся, они не покажутся столь уж изощренными. Конечно, их удобно проводить, если в уравнении нет члена с x^3 . Чемпионом в этом виде спорта был Лудовико Феррари, о чем мы расскажем ниже. ▶

✎ **Ответ:** $(-1 \pm \sqrt{13})/2$.

Если уравнение не имеет целого (рационального) корня и не является возвратно-симметричным, оно может допускать выделение полного куба, 4-й степени и т. д.

11. Решить уравнение $3x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

◀ Поскольку $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, переписав уравнение в виде $3x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ и добавив к обеим частям равенства по x^3 , получим

$$4x^3 = (x+1)^3.$$

Заметим, что из условия $a^3 = b^3$ следует $a = b$, поскольку равенство $a^3 - b^3 = 0$ распадается на два: $a = b$ и $a^2 + ab + b^2 = 0$. Но неполный квадрат как суммы, так и разности нулю равняться не может, в чем легко убедиться, рассматривая последнее соотношение как квадратное уравнение относительно любой из переменных.

Итак, из условия

$$(x\sqrt[3]{4})^3 = (x+1)^3$$

следует

$$x\sqrt[3]{4} = x+1, \quad \text{отсюда} \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

◀ **Ответ:** $(1/\sqrt[3]{4}-1)$.

12. Решить уравнение $3x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$.

◀ Домножим уравнение на 9 и перепишем в виде

$$26x^3 + (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) = 0, \quad \text{или} \quad 26x^3 + (x+3)^3 = 0, \quad 26x^3 = -(x+3)^3.$$

Отсюда аналогично предыдущему примеру, $x\sqrt[3]{26} = -(x+3)$ и окончательно

$$x = -\frac{3}{\sqrt[3]{26}+1}.$$

◀ **Ответ:** $-3/(\sqrt[3]{26}+1)$.

Решение примеров 11 и 12 было основано на том, что нам удавалось представить кубический многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ в виде суммы или разности двух более простых кубических многочленов — а именно полных кубов. Но не всегда же будет так, говорит подозрительный читатель. Нет, конечно, дьявол хитёр... Однако сама идея — разложение сложного выражения на более простые — не плоха, и её можно применить несколько иначе: разложить на более простые составляющие не сам многочлен, а *его корень* — корень уравнения, т. е. искать корень в виде $x = u + v$. Именно таким путём и пошли итальянские математики XVI века, первыми научившиеся решать кубические уравнения.

В чистом виде суть их метода такова. Возьмём уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ и прежде всего преобразуем его к уравнению, не содержащему второй степени неизвестной величины. Это достигается линейной заменой по формуле $x = y + m$ при надлежащем выборе m . Действительно, подставляя $x = y + m$ в исходное уравнение, получаем

$$y^3 + (3m+a)y^2 + (3m^2+2am+b)y + m^3+bm+c=0.$$

Ясно, что требуемому условию удовлетворяет $m = -a/3$. Таким образом, мы приходим к более простому уравнению вида

$$y^3 + py + q = 0. \quad (1)$$

Положим теперь $y = u + v$; тогда

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvy \quad \text{или} \quad y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0. \quad (2)$$

Подберём теперь u и v так, чтобы левые части уравнений (1) и (2) совпали, т. е. были выполнены условия $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$, что в более симметричном виде можно представить системой

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что числа u^3 и v^3 удовлетворяют уравнению

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (3)$$

Если дискриминант $q^2 + 4p^3/27 \geq 0$, то корни уравнения (3) таковы

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Тогда

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad (\text{или наоборот}) \quad \text{и}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Эта формула для корня уравнения $y^3 + py + q = 0$ в случае $q^2/4 + p^3/27 \geq 0$ называется *формулой Кардано* (по имени математика, впервые предавшего её гласности в своём трактате «Великое искусство»).

13. Решить уравнение $x^3 - 3x + 3 = 0$.

◀ Здесь $p = -3$, $q = 3$; по формуле Кардано

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}. \quad \blacktriangleright$$

Условие «если $q^2 + 4p^3/27 \geq 0$ » выглядит почти как «если» Архимеда, грозившего сдвинуть Землю, если ему дадут, где встать. Ясно же (говорит читатель), что $q^2 + 4p^3/27 \geq 0$ не всегда. Однако это не является препятствием по большому счёту: математики научились извлекать квадратные корни и из отрицательных чисел. Математики, подчёркиваем мы, но не бедные поступающие. Ведь они не знакомы с комплексными числами, необходимыми в этом случае... Зато они знакомы с тригонометрией, которая здесь очень даже к месту! Дело в том, что $q^2 + 4p^3/27 < 0$ при необходимом условии

$p < 0$; но тогда сумма $y^3 + py$ (которая на самом деле разность) напоминает выражение $4 \cos^3 t - 3 \cos t$ (равное $\cos 3t$), и не просто «напоминает», а *может быть в него превращена* (с точностью до множителя) заменой $y = m \cos t$ при надлежащем выборе числа m . Действительно,

$$m^3 \cos^3 t + mp \cos t = k(4 \cos^3 t - 3 \cos t), \quad \text{если} \quad \frac{m^3}{4} = \frac{pm}{-3},$$

т. е. при $m^2 = -4p/3$. Тогда уравнение (1) принимает вид $\cos 3t = -q/k$ и легко решается.

14. Решить уравнение $x^3 - 6x^2 - 3x + 2 = 0$.

◀ Поскольку в данном случае мы имеем дело с полным уравнением, сперва нужно избавиться от квадрата. Сделаем замену $x = y + 2$ (как указано выше) и придём к уравнению $y^3 - 15y - 20 = 0$. Теперь, поскольку $p = -15$, к решению ведёт замена $y = 2\sqrt{5} \cos t$. Она преобразовывает последнее уравнение к соотношению $\cos 3t = 2/\sqrt{5}$.

Отсюда

$$t = \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Этому на вид весьма обширному множеству значений t на самом деле отвечают только три *различных* значения y , а именно

$$y_1 = 2\sqrt{5} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \quad y_2 = 2\sqrt{5} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$y_3 = 2\sqrt{5} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4\pi}{3} \right).$$

(Что касается значений n , больших 3, это довольно понятно из периодичности, а вот то, что серия с минусом не даёт дополнительных значений, можно установить по тригонометрическому кругу, заметив, что

$$\cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(-\alpha + \frac{4\pi}{3} \right)$$

и соответственно

$$\cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \left(-\alpha + \frac{2\pi}{3} \right),$$

где через α мы обозначили угол

$$\frac{1}{3} \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Тогда окончательно

$$x_{1,2,3} = 2\sqrt{5} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2\pi n}{3} \right) + 2, \quad n = 0, 1, 2. \quad \blacktriangleright$$

Подчеркнем, что два разобранных нами случая *не нужно смешивать*, т.е. не следует ни использовать тригонометрию, если $q^2 + 4p^3/27 \geq 0$, ни писать формулу Кардано, если $q^2 + 4p^3/27 < 0$. И тем более не следует прибегать к методу Кардано, не проверив предварительно, имеет уравнение рациональные корни или нет. Вот предостерегающий пример.

15. Решить уравнение $x^3 - 19x + 30 = 0$.

◀ Поскольку

$$900 - \frac{4}{27}19^3 < 0,$$

делаем замену

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}}19 \cos t = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cos t.$$

Вычисления, аналогичные проведенным в предыдущем примере, дают ответ

$$x_{1,2,3} = 4\sqrt{\frac{19}{3}} \cos \left(-\frac{1}{3} \arccos \frac{15\sqrt{57}}{19} + \frac{2\pi n}{3} \right), \quad n = 0, 1, 2.$$

В этих выражениях трудно узнать числа -5 ; 2 и 3 , которые являются корнями данного уравнения. ▶

Читатель вправе подивиться форме записи ответа к примеру 14 и спросить: «Разве это *ответ*?» Действительно, вполне можно подумать, что полученные сложные тригонометрические выражения ещё подлежат «вычислению», т.е. представлению в алгебраической форме. Однако вот этого-то сделать и нельзя. В случае $q^2 + 4p^3/27 < 0$ записать ответ в алгебраической форме, т.е. выразить его через коэффициенты p и q невозможно. И мы просто ради удобства выбираем не формулу Кардано с квадратными корнями из отрицательных чисел, а тригонометрическую форму — для того, чтобы ответ «имел смысл» в школьно-абитуриентском смысле. Первооткрыватели назвали этот случай *неприводимым*. (Неприводимым к чему? К формуле, выражающей корни уравнения через коэффициенты самого уравнения.)

Кроме косинуса тройного угла тригонометрия предлагает также формулу *тангенса* тройного угла

$$\operatorname{tg} 3t = \frac{\operatorname{tg}^3 t - 3 \operatorname{tg} t}{3 \operatorname{tg}^2 t - 1},$$

которую можно применить к решению уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, не упрощая его. (Для этого достаточно сделать замену $x = ty + n$, преобразующую уравнение к виду $ay^3 - 3by^2 - 3ay + b = 0$; это последнее приводится к виду $\operatorname{tg} 3t = b/a$, где $y = \operatorname{tg} t$.) Но эту формулу уже практически ни один даже хороший абитуриент не помнит (хотя и выведет при желании), да и не даёт этот путь ничего особенно нового.

А теперь изложим метод решения общего уравнения 4-й степени вида

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

который называется *методом Феррари*.

Этот метод состоит в приведении многочлена, стоящего в левой части равенства, к разности квадратов двух многочленов. Для этого в уравнение вводится вспомогательный параметр a и делаются следующие преобразования:

$$x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s, \quad \left(x^2 + \frac{px}{2} + a\right)^2 = -qx^2 - rx - s + \frac{p^2 x^2}{4} + a^2 + 2ax^2 + aprx,$$

(дополнение до полного квадрата)

$$\left(x^2 + \frac{px}{2} + a\right)^2 = \left(2a + \frac{p^2}{4} - q\right)x^2 + (ap - r)x + (a^2 - s). \quad (4)$$

Ключевой момент: подберём параметр a таким образом, чтобы трёхчлен в правой части равенства был полным квадратом; для этого достаточно потребовать равенства нулю дискриминанта, т. е.

$$(ap - r)^2 - (8a + p^2 - 4q)(a^2 - s) = 0.$$

Это — уравнение 3-й степени относительно a (называемое *резольвентой*). Достаточно найти хотя бы один его корень a_0 ; тогда уравнение (4) сведётся к двум квадратным.

16. Решить уравнение $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$.

$$\leftarrow x^4 + x^3 = 10x^2 + 2x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{x}{2} + a\right)^2 = 10x^2 + 2x - 4 + \frac{x^2}{4} + a^2 + 2ax^2 + ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{x}{2} + a\right)^2 = \left(\frac{41}{4} + 2a\right)x^2 + (a + 2)x + a^2 - 4.$$

Составляем резольвенту: $(a + 2)^2 - (41 + 8a)(a^2 - 4) = 0$, которая имеет различимый невооружённым глазом корень $a_0 = -2$. Тогда уравнение принимает вид

$$\left(x^2 + \frac{x}{2} - 2\right)^2 = \frac{25}{4}x^2,$$

и распадается на два квадратных

$$x^2 + \frac{x}{2} - 2 = \pm \frac{5}{2}x. \quad \rightarrow$$

☛ **Ответ:** $1 \pm \sqrt{3}, (-3 \pm \sqrt{17})/2$.

Читателю ясно, что если корень резольвенты не целый, а сам найден методом Кардано, то и корни исходного уравнения 4-й степени имеют более громоздкую запись, как, например, в таком внешне безобидном уравнении («Квант», 1975, № 1. С. 39).

$$17. x^4 - 3x^3 + 3 = 0.$$

◀ Вводя параметр, приходим к уравнению

$$\left(x^2 - \frac{3x}{2} + a\right)^2 = \left(\frac{9}{4} + 2a\right)x^2 - 3ax + a^2 - 3.$$

Резольвента имеет вид: $8a^3 - 24a - 27 = 0$; по формуле Кардано

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{27 + \sqrt{473}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{27 - \sqrt{473}}{2}} \right),$$

и читатель сам легко вообразит, как выглядит полный ответ... ▶

Способов преобразования уравнений 4-й степени, которые «не решаются» (без метода Феррари), имеется великое множество. Например, заменой $x = tu + n$ можно попытаться превратить уравнение в возвратное, или наложить на коэффициенты условие, приводящее уравнение к виду $tg\ 4t = b/a$ (как кубическое к виду $tg\ 3t = b/a$), или представить выражение $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ как разность квадратов $2(x^2 + ax + b)^2 - (x^2 + cx + d)^2$, или как произведение двух квадратных трёхчленов. Но успех не гарантирован. Ясно, что перебор разных вариантов займет много времени и потребует большой концентрации внимания. Так что альтернативы методу брата Лудовико нет.

Интересно, что метод Кардано применим не только к кубическим уравнениям. Конечно, для этого нужно уметь возводить двучлен в высокие степени...

$$18. \text{ Решить уравнение } x^5 + 5x^3 + 5x + 2 = 0.$$

◀ Снова ищем решение в виде $x = u + v$.

Формулу

$$(u + v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u + v)$$

читатель может проверить самостоятельно. После подстановки уравнение принимает вид

$$u^5 + v^5 + 5(u + v)(uv + 1)(1 + u^2 + v^2 + uv) + 2 = 0$$

Потребуем выполнения условий

$$\begin{cases} uv + 1 = 0, \\ u^5 + v^5 + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^5 + v^5 = -2, \\ u^5 v^5 = -1, \end{cases}$$

и для нахождения неизвестных получим уравнение $t^2 + 2t - 1 = 0$, откуда $u^5 = -1 + \sqrt{2}$, $v^5 = -1 - \sqrt{2}$; тогда

$$x = \sqrt[5]{-1 + \sqrt{2}} - \sqrt[5]{1 + \sqrt{2}}.$$

▶

В этом по необходимости кратком обзоре нельзя не остановиться на одном из самых остроумных методов решения уравнений высших степеней — *методе Чирнгауза*. Суть этого метода состоит в том, чтобы подобрать такую замену переменной вида $y = p(x)$, где $p(x)$ — некоторый многочлен, что в уравнении исчезают все члены кроме крайних. Продемонстрируем эту идею на примере кубического уравнения.

19. Решить уравнение $x^3 + 6x + 2 = 0$.

◀ Положим $y = x^2 + ax + b$; тогда, учитывая, что $x^3 = -6x - 2$, найдем

$$yx = x^3 + ax^2 + bx = ax^2 - 6x - 2 + bx = ax^2 + (b-6)x - 2; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} yx^2 &= ax^3 + (b-6)x^2 - 2x = a(-6x-2) + (b-6)x^2 - 2x = \\ &= (b-6)x^2 - (6a+2)x - 2a. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку $x^2 = y - ax - b$, из соотношения (5) можно выразить x :

$$\begin{aligned} yx &= a(y - ax - b) + (b-6)x - 2 \Rightarrow x(y + a^2 + 6 - b) = ay - ab - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{ay - ab - 2}{y + a^2 + 6 - b}. \end{aligned}$$

Тогда для $x^2 = y - ax - b$ получается

$$x^2 = \frac{2a - (b-6-y)(y-b)}{y + a^2 + 6 - b}.$$

Если теперь подставить эти выражения в (6), получим уравнение относительно y , а именно

$$\begin{aligned} y^3 + (12-3b)y^2 + (3b^2 - 24b + 6a + 36 + 6a^2)y + \\ + (-b^3 + 12b^2 - 36b - 6a^2b - 6ab + 2a^3 + 12a - 4) = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Потребуем равенства нулю коэффициентов при первой и второй степенях y , т. е.

$$12 - 3b = 0, \quad 3b^2 - 24b + 6a + 36 + 6a^2 = 0.$$

Отсюда $b = 4$; $a = 1$ или $a = -2$.

В первом случае $y = x^2 + x + 4$. Уравнение (*) для нахождения y таково: $y^3 - 54 = 0$. Значит, $y = 3\sqrt[3]{2}$. Тогда

$$x = \frac{y-6}{y+3} = \frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{(\sqrt[3]{2}-2)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{3} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}.$$

Тот же результат получится при $a = -2$. ►

Примеры 13–19 можно рассматривать как небольшой факультатив, который мы устроили, опасаясь, как бы нам не попался пытливый читатель, которому могло не понравиться, если бы мы ушли от ответа на вопрос: «Как решать кубические уравнения во всех случаях?» Утилитарно мыслящий юзер вправе их (примеры) без малейшего ущерба для себя пропустить.

Решение уравнений 3-й и 4-й степени (не говоря о более высоких) может составить тему нескольких занятий математического кружка, поэтому мы, не уходя вглубь, подытожим то, что *должен знать каждый* абитуриент.

Если вам попалось кубическое уравнение, то вы прежде всего пытаетесь подобрать целый (дробный) корень. Если такого корня нет, вы попытаетесь использовать формулу куба суммы или разности. Если и это ничего не даст, вам останется только метод Кардано, который, однако, никоим образом не входит в программу. Если данное кубическое уравнение получилось у вас в процессе решения какой-то другой задачи, то это означает, что нужно искать иной способ. Что касается уравнения 4-й степени (не являющегося биквадратным), то и здесь начать надо с поиска рационального корня; если такого корня нет, надо проверить, не является ли уравнение возвратным (симметричным). Или попробовать еще как-то разложить уравнение на множители. В противном случае остается метод Феррари, о котором можно сказать то же, что и о методе Кардано, тригонометрии и методе Чирнгауза (все это следует отнести к факультативному материалу).

Не побоимся повторить еще раз: если в задаче есть риск получить уравнение 3-й или 4-й степени без рациональных корней и не возвратное, нужно постараться до него не доводить. Нам, однако, показалось нелишним объяснить, как можно выйти из уместного тупика, если до него всё-таки довелось. Тупик — понятие относительное.

Алгебраические уравнения высших степеней *в чистом виде* редко встречаются в практике вступительных экзаменов. Как правило, поступающим предлагается решить уравнение (высшей степени), *записанное особым образом*; и именно так, чтобы по форме записи можно было догадаться о том, какая замена переменной («подстановка», как говорили раньше) ведёт к цели.

Метод подстановки заключается в переходе от искомой величины к некоторой другой величине. Велико разнообразие случаев, когда приходится пользоваться этим методом. Охватить их какой-либо общей рекомендацией, разумеется, невозможно... (М. И. Сканави)

20. Решить уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 15$.

◀ В таком случае шаблонная обработка уравнения приведет его к уравнению четвертой степени без рациональных корней, что решающего устроить не может. После обдумывания начинаем понимать, что полезно перемножить отдельно крайние и средние скобки, тогда уравнение примет вид

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 15.$$

Выбрав подстановку $x^2 + 5x + 4 = y$, преобразуем данное уравнение к значительно более простому квадратному уравнению

$$y^2 + 2y - 15 = 0,$$

корни которого $y_1 = -5$, $y_2 = 3$. Тогда для нахождения x имеем еще два квадратных уравнения: 1) $x^2 + 5x + 9 = 0$ и 2) $x^2 + 5x + 1 = 0$. Первое корней не имеет, решая второе, находим

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

☛ **Ответ:** $(-5 \pm \sqrt{21})/2$.

Удачная группировка слагаемых — ключ к решению многих уравнений. Вот два примера.

21. Решить уравнение

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+4}{x-4} = \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+3}{x-3}.$$

◀ Перепишем уравнение так:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} - \frac{x+4}{x-4}$$

и только после этого приведем каждую пару дробей к общему знаменателю:

$$\frac{-2x}{x^2-4} = \frac{-2x}{x^2-7x+12}.$$

Это уравнение распадается на два простейших: 1) $-2x = 0$ и 2) $x^2 - 4 = x^2 - 7x + 12$. ▶

☛ **Ответ:** $-16/7, 0$.

22. Решить уравнение

$$9 + x^3\sqrt{5} + 5x + \frac{\sqrt{5}}{x^3} = 3x^2\sqrt{5} + 3x + \frac{3\sqrt{5}-1}{x} + \frac{3}{x^2}.$$

◀ Группируем слагаемые попарно следующим образом:

$$(9 - 3\sqrt{5}x^2) + (x^3\sqrt{5} - 3x) - \left(\frac{3\sqrt{5}}{x} - 5x\right) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{5}}{x^3}$$

или

$$3(3 - x^2\sqrt{5}) - x(3 - x^2\sqrt{5}) - \frac{\sqrt{5}}{x}(3 - x^2\sqrt{5}) = \frac{1}{x^2}\left(3 - x - \frac{\sqrt{5}}{x}\right),$$

$$(3 - x^2\sqrt{5})\left(3 - x - \frac{\sqrt{5}}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(3 - x - \frac{\sqrt{5}}{x}\right).$$

Отсюда: 1) $3 - x - \sqrt{5}/x = 0$; 2) $3 - x^2\sqrt{5} = 1/x^2$.

Из первого уравнения получаем

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Второе уравнение приводится к биквадратному $\sqrt{5}x^4 - 3x^2 + 1 = 0$. Тогда

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \text{или} \quad x^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

откуда

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}}, \quad x_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

☛ **Ответ:** $(5 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2, \pm\sqrt{(\sqrt{5} + 1)/(2\sqrt{5})}, \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$.

Наверное, хорошо как можно раньше упомянуть о таком законном персонаже, как ОДЗ — «области допустимых значений неизвестного». Что это такое? Конечно, все знают. Это что-то вроде налоговой инспекции, уменьшающей наш доход: кажется, корень найден, и с немалым трудом, однако его надо отбросить (отдать врагу) как негодный, потому что «он не входит в ОДЗ»! Как, например, в таком уравнении

$$\frac{x - 5}{x - 5} - 1 = x^2 - 10x + 25.$$

Если вы понимаете, что это не то же самое, что $x^2 - 10x + 25 = 0$, можете смело идти на экзамен!

Надо ли искать ОДЗ? Это вопрос философский. Возможны разные ответы. В дальнейших примерах ОДЗ будет то появляться, когда без нее нельзя обойтись, то оставаться в тени, чтобы не удлинять изложение. Общий рецепт? ОДЗ полезно всё время держать в поле зрения как запасной выход из кинотеатра, пользоваться которым в мирное время не обязательно; как резервный полк, который пускается в дело по мере необходимости.

Впрочем, не столь далеки от нас времена, когда абитуриентам всерьез предлагались такие уравнения:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 0$$

(корнем которого является только $x = 3$, но не $x = -2$). Может быть, они еще вернутся?.. Но надо продолжать восхождение...

23. Решить уравнение

$$x^2 + \frac{25x^2}{(x-5)^2} = 11.$$

◀ Снова не будем торопиться разрушить структуру уравнения приведением к общему знаменателю и прочим шаблонными действиями. Заметим, что левая часть равенства — сумма квадратов, а потому дополним ее до квадрата суммы; имеем

$$\left(x + \frac{5x}{x-5}\right)^2 - \frac{10x^2}{x-5} = 11 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x^2}{x-5}\right)^2 - \frac{10x^2}{x-5} = 11.$$

Теперь уже ясно, что к цели ведет замена $x^2/(x-5) = y$. Уравнение

$$y^2 - 10y - 11 = 0$$

имеет корни $y_1 = -1$, $y_2 = 11$. Если

$$\frac{x^2}{x-5} = -1 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 5 = 0, \quad \text{то} \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2};$$

если $x^2/(x-5) = 11$, $x^2 - 11x + 55 = 0$, то решений нет. ►

✎ **Ответ:** $(-1 \pm \sqrt{21})/2$.

24. Решить уравнение $x^4 + (x-4)^4 = 136$.

◀ Надеемся, читатель уже понял, чего делать не следует... При решении уравнений вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$ наряду с дополнением до квадрата суммы (разности) применяется прием, называемый *симметризацией*: вводится новая переменная $y = x - (a+b)/2$, сводящая уравнение к биквадратному. В данном случае $y = x - 2$. Уравнение принимает вид $(y+2)^4 + (y-2)^4 = 136$. Возведение в 4 степень по формулам

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

и приведение подобных даёт:

$$2y^4 + 48y^2 - 104 = 0 \quad \text{или} \quad y^4 + 24y^2 - 52 = 0.$$

Отсюда $(y^2 + 12)^2 = 52 + 144 = 196$, т.е.

$$y^2 + 12 = 14 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}. \quad \blacktriangleright$$

✎ **Ответ:** $2 \pm \sqrt{2}$.

25. Решить уравнение $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) + 30 = 0$.

◀ Обращает на себя внимание возможность разложить на множители трехчлены во второй и третьей скобке:

$$(x^2 - 3x + 1)(x + 1)(x + 2)(x - 4)(x - 5) + 30 = 0.$$

Если теперь их снова раскрыть через одну, получится

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10) + 30 = 0$$

и в принципе «дальнейшее ясно». Заменить на новую переменную можно любую из скобок; в целях симметризации заменим среднюю, т. е. положим $x^2 - 3x - 4 = y$. Тогда имеем $(y - 5)y(y + 6) + 30 = 0$ или

$$y^3 - y^2 - 30y + 30 = 0 \Rightarrow y^2(y - 1) - 30(y - 1) = 0 \Rightarrow (y - 1)(y^2 - 30) = 0.$$

Если $y = 1$, то

$$x^2 - 3x - 4 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Если $y = \pm\sqrt{30}$, то

$$x_{3,4,5,6} = \frac{3 \pm \sqrt{25 \pm 4\sqrt{30}}}{2}.$$

◉ **Ответ:** $(3 \pm \sqrt{29})/2$, $(3 \pm \sqrt{25 \pm 4\sqrt{30}})/2$.

В разных одеждах выступает в абитуриентской математике так называемое *однородное уравнение*. Обычно оно содержит две переменные, скажем x и y , и числовые коэффициенты, обозначаемые буквами a, b, c и т. д. Например:

$ax + by = 0$ — однородное уравнение 1-й степени;

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ — однородное уравнение 2-й степени;

$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ — третий.

Все они сводятся к линейному, квадратному, кубическому уравнению относительно новой переменной $t = x/y$.

26. Решить уравнение $x^4 + 5x^2(x + 1) = 6(x + 1)^2$.

◀ Если положить $x^2 = u$, $x + 1 = v$, то получится однородное уравнение 2-й степени $u^2 + 5uv - 6v^2 = 0$. Заметим, что при $v = 0$ уравнение решений не имеет, и заменим $u/v = t$ или $u = vt$; мы получим $v^2t^2 + 5v^2t - 6v^2 = 0$, что после сокращения на $v^2 \neq 0$ даст

$$t^2 + 5t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -6, \quad t_2 = 1.$$

Если $t = 1$, то $u = v \Rightarrow x^2 = x + 1$; при $t = -6$ имеем $x^2 = -6(x + 1)$. Решая получившиеся квадратные уравнения, получаем ответ: $(-1 \pm \sqrt{5})/2$, $3 \pm \sqrt{3}$. ►

☛ **Ответ:** $(-1 \pm \sqrt{5})/2$, $3 \pm \sqrt{3}$.

27. Решить уравнение $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$.

◀ А здесь преобразуем уравнение к однородному и для этого выделим компоненту $x^2 + 4x + 8$ в «хвосте»:

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0.$$

Теперь можно полагать $x^2 + 4x + 8 = u$, тогда

$$u^2 + 3ux + 2x^2 = 0 \Rightarrow (u + x)(u + 2x) = 0$$

и т. д. ►

☛ **Ответ:** -4 , -2 .

28. Решить уравнение $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x - 1) = 3x^2 - 6x + 3$.

◀ Пусть $x^2 - 3x + 1 = u$, $x - 1 = v$; тогда $x^2 - x - 1 = u + 2v$, и уравнение принимает вид

$$u(u + 2v) = 3v^2, \quad \text{или} \quad u^2 + 2uv - 3v^2 = 0,$$

т. е. мы снова пришли к однородному уравнению 2-й степени. Решая его, получим: 1) $u = v$; 2) $u = -3v$. Остается разделить с двумя квадратными уравнениями: $x^2 - 3x + 1 = x - 1$ и $x^2 - 3x + 1 = -3(x - 1)$. ►

☛ **Ответ:** $\pm\sqrt{2}$, $2 \pm \sqrt{2}$.

Введение в уравнение новой переменной (тем более — двух) принуждает нас начать разговор о *параметрах*, которые всегда уstraшают учащихся. Что это такое? Некие таинственные символы, наделенные способностью к перевоплощению?

Не станем сразу отвечать. Чтобы удар, который параметры неизбежно нанесут по нашей неокрепшей нервной системе, не оказался слишком болезненным, разберем несколько предварительных примеров, в которых параметры (a , b и т. д.) еще играют пассивную роль, т. е. от нас не требуется анализировать, как решение (т. е. x) от них зависит. Мы должны решить уравнение «в общем виде», при всех допустимых значениях параметров. Как правило, их (параметров) наличие затрудняет выкладки, поскольку нельзя всё «посчитать» — нужен рациональный ход.

29. Решить уравнение

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}, \quad a, b \neq 0.$$

◀ По терминологии автора знаменитого сборника интересных задач Ч. Тригга, это — задача «с изюминкой». То есть: с прагматической точки зрения, перед нами уравнение, которое приводится к кубическому, с корнем $x = 0$, и проблем, собственно, нет. Но постараемся на миг отвлечься от прямолинейности и поищем «красивое решение», без вульгарного приведения дробей к общему знаменателю.

Это красивое решение состоит — всего лишь — в том, что мы вводим *два новых неизвестных* вместо одного, а именно

$$\frac{x-a}{b} = u, \quad \frac{x-b}{a} = v;$$

благодаря этому уравнение переписывается в компактном и симметричном виде

$$u + v = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}.$$

Конечно, из одного уравнения с двумя неизвестными только в исключительных обстоятельствах можно найти оба неизвестных; и всё же не стоит бояться черепахи, сударь! Нам ведь и не нужно искать оба неизвестных — достаточно, если мы свяжем их каким-либо условием. И в данном случае это делается очень быстро:

$$u + v = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \Rightarrow (u+v)uv = u + v,$$

откуда 1) $u + v = 0$; 2) $uv = 1$.

Мат в три хода, как говорят шахматисты.

Из первого условия получаем

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 0, \quad \text{и} \quad x = \frac{a^2 + b^2}{a+b}.$$

Второе дает

$$\frac{(x-a)(x-b)}{ab} = 1 \Rightarrow x = 0 \quad \text{или} \quad x = a + b. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $0, a + b, (a^2 + b^2)/(a + b)$.

30. Решить уравнение

$$\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1,$$

$$a, b, c, a+b+c \neq 0.$$

◀ Поскольку это уравнение и вовсе линейное, здесь предполагается экономичная запись ответа, а не просто

$$x = \frac{1 - (a+b)/c - (a+c)/b - (b+c)/a}{4/(a+b+c) - 1/a - 1/b - 1/c},$$

т. е. это скорее задача на упрощение, на поиск рационального хода, «изюминки».

В целях симметризации заменим $a+b+c = p$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{m-c-x}{c} + \frac{m-b-x}{b} + \frac{m-a-x}{a} + \frac{4x}{m} = 1 \quad \text{или}$$

$$\frac{m-c}{c} + \frac{m-b}{b} + \frac{m-a}{a} + \frac{4x}{m} = 1 + x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Теперь:

$$m \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{4x}{m} = 4 + x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (m-x) = 4 \left(\frac{m-x}{m} \right).$$

Отсюда $x = m = a+b+c$. ▶

☛ **Ответ:** $a+b+c$.

31. Решить уравнение $x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + a^2 - a = 0$.

◀ Попробуем разложить левую часть уравнения на множители группировкой и для этого перепишем так:

$$x^3 - 2x^2 + x - (a^2 - a)x + a^2 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)^2 - (a^2 - a)(x-1) = 0.$$

Отсюда либо $x-1 = 0$, либо $x^2 - x - a^2 + a = 0$. Окончательный ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = a$, $x_3 = 1-a$. ▶

☛ **Ответ:** $x_1 = 1$, $x_2 = a$, $x_3 = 1-a$.

32. Решить уравнение $x^3 - (a^2 - a + 7)x - 3(a^2 - a - 2) = 0$.

◀ Имеем:

$$x^3 - 9x - (a^2 - a - 2)x - 3(a^2 - a - 2) = 0,$$

$$x(x^2 - 9) - (a^2 - a - 2)(x + 3) = 0,$$

$$x(x - 3)(x + 3) - (a^2 - a - 2)(x - 3) = 0,$$

значит,

$$\begin{cases} x + 3 = 0, \\ x^2 - 3x - a^2 + a + 2 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет вид $x^2 - 3x + 2 = a^2 - a$ или $(x - 1)(x - 2) = a(a - 1)$, отсюда

$$\begin{cases} x - 1 = a, \\ 2 - x = a, \end{cases}$$

и тогда окончательный ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = a + 1$, $x_3 = 2 - a$. ▶

🔍 **Ответ:** $x_1 = -3$, $x_2 = a + 1$, $x_3 = 2 - a$.

33. Решить уравнение $x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 2a\sqrt{3} - 9)x - (2a^2\sqrt{3} - 12a + 6\sqrt{3}) = 0$.

◀ Здесь жизнь поворачивается к нам такой стороной, что уже почти невозможно обойтись без теоремы Виета, но теперь — для кубического уравнения. Мы ее не знаем?

Пусть тогда x_1 , x_2 и x_3 — корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, т. е. можно написать равенство $x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Раскроем скобки; мы получим после группировки

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3$$

Откуда следует, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q, \\ x_1x_2x_3 = -r. \end{cases}$$

Это и есть нужное нам утверждение.

Возвращаемся к уравнению. После более или менее утомительных попыток группировки, решаемся ставить на то, что, переписанное в виде

$$x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 2a\sqrt{3} - 9)x - 2\sqrt{3}(a - \sqrt{3})^2 = 0$$

уравнение со свободным членом $-2\sqrt{3}(a - \sqrt{3})^2$ может иметь хотя бы корень $x_1 = 2\sqrt{3}$. Подстановка подтверждает. Возникает более смелая мысль: а вдруг и $x_2 = x_3 = a - \sqrt{3}$? Торжество Виета было бы полным. И поскольку $a - \sqrt{3}$ подходит, а кроме того, $x_1 + x_2 + x_3 = 2a$, что согласуется с теоремой, всё так и есть. Скажем спасибо, что обошлось без деления уголком. ►

☞ **Ответ:** $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = x_3 = a - \sqrt{3}$.

Теорему Виета можно использовать и для решения кубического уравнения с нецелыми корнями, если искать рациональный корень не хочется (а он есть). Из Сканава нам что-нибудь...

34. Решить уравнение $8x^3 - 20x^2 - 10x + 33 = 0$.

◀ Стандартный путь — перебор чисел ± 1 , ± 3 , ± 11 , ± 33 , $\pm 1/2$, $\pm 1/4$ и т. д. Перепишем уравнение в виде

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{33}{8} = 0$$

и запустим теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -\frac{5}{4}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{33}{8}. \end{cases}$$

Пусть $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b$; тогда из первого уравнения $x_3 = 5/2 - a$, из второго —

$$b + a\left(\frac{5}{2} - a\right) = -\frac{5}{4} \quad \text{или} \quad b = -a\left(\frac{5}{2} - a\right) - \frac{5}{4} = a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{5}{4},$$

и третье уравнение имеет вид

$$\left(\frac{5}{2} - a\right)\left(a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{5}{4}\right) = -\frac{33}{8},$$

что после упрощений дает $a^3 - 5a^2 + 5a - 1 = 0$, т. е. $a^3 - 1 = 5a(a - 1)$, откуда $a = 1$ или $a^2 + a + 1 = 5a$, $a^2 - 4a + 1 = 0$.

Если $a = 1$, то $x_3 = 3/2$. Два других корня — $x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{3}$.

Случай $a^2 - 4a + 1 = 0$ приводит (естественно) к тем же двум корням. ►

☞ **Ответ:** $x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{3}$, $x_3 = 3/2$.

И еще раз покажем в работе *разность квадратов*.

35. Решить уравнение $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.

◀ Конечно, хочется переписать это уравнение более «правильно»:

$$(x^2 - x - 1)^2 - 4 = x^3 + 1$$

и дальше уже всё просто:

$$(x^2 - x - 1 - 2)(x^2 - x - 1 + 2) = (x + 1)(x^2 - x + 1),$$

$$(x^2 - x - 3)(x^2 - x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1),$$

1) $x^2 - x + 1 = 0$ (решений нет); 2) $x^2 - x - 3 = x + 1 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$. ▶

☞ **Ответ:** $1 \pm \sqrt{5}$.

36. Решить уравнение $(x^2 - 3)^3 - (4x + 6)^3 + 216 = 18(4x + 6)(3 - x^2)$.

◀ В уравнениях, связанных с кубами (и корнями кубическими) иногда используется уже известное нам экзотическое тождество

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \quad (*)$$

Ученик, который знает, что $216 = 6^3$, может представить данное уравнение в виде равенства $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, где $a = x^2 - 3$, $b = -(4x + 6)$, $c = 6$.

Тогда из тождества (*) следует, что имеются две возможности:

1) $a + b + c = 0$; 2) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

1) приводит к уравнению $x^2 - 3 - 4x - 6 + 6 = 0$ или $x^2 - 4x - 3 = 0$, откуда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$.

Из 2) следует $a^2 - (b + c)a + b^2 + c^2 - bc = 0$. Рассматривая это соотношение как квадратное уравнение относительно a , найдем дискриминант:

$$D = (b + c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b - c)^2.$$

Это выражение неотрицательно только при $b = c$; тогда и $a = b = c$. Таким образом, получаем два уравнения: $x^2 - 3 = -4x - 6 = 6$. Решая их, находим $x_3 = -3$. ▶

☞ **Ответ:** $-3; 2 \pm \sqrt{7}$.

Пока мы ограничивались такими уравнениями, методы решения которых основывались исключительно на алгебраических преобразованиях. Однако при решении уравнений иногда приходится применять и *другие методы*. Пора сказать несколько слов и о них.

37. Доказать, что уравнение $2x - x^2 = 2/x$ не имеет положительных решений.

◀ Нетрудно построить графики левой и правой частей, из которых, что называется, *всё видно* (рис. 3). Но если видно, то можно доказать и математически, делая, м-м... вид, что никаких графиков и не было.

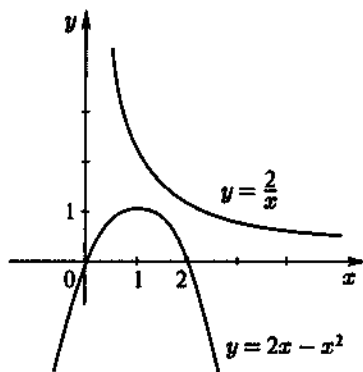


Рис. 3

Найдем то, что называется *разделяющим числом*. При $x < 2$ имеем $2/x > 1$ (напоминаем, что $x > 0$), но $2x - x^2 \leq 1$ (потому что наибольшее значение трехчлена $2x - x^2$, достигаемое в точке $x = -b/2a = 1$, равно 1). Значит, равенство $2x - x^2 = 2/x$ при $0 < x < 2$ невозможно.

Если $x > 2$, то

$$2x - x^2 = x(2 - x) < 0,$$

а $2/x > 0$ и равенство $2x - x^2 = 2/x$ опять невозможно. Остается проверить, что и при $x = 2$ значения правой и левой частей не совпадают. ►

38. Решить уравнение $5x^3 - 2x^2 = 3$.

◀ Сразу замечаем, что корнями этого уравнения могут быть только положительные числа. Поскольку $x = 0$ — не корень, можно поделить обе части равенства на x^2 ; мы получим $5x^3 - 2 = 3/x^2$. Левая часть представляет собой строго возрастающую функцию, правая — строго убывающую (ведь $x > 0$). Значит, наше уравнение не может иметь более одного корня. Осталось его найти; нетрудно видеть, что подходит $x = 1$. ►

🔍 **Ответ:** 1.

39. Найти все пары $(x; y)$, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 + y^2 - 12x + 8y + 25 = 0.$$

(Можно сказать и проще: «решить уравнение с двумя неизвестными».)

◀ Выделяя полные квадраты, перепишем уравнение так:

$$(2x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0.$$

Это равенство возможно только, если

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0, \\ y + 4 = 0, \end{cases}$$

т. е. при $x = 3/2$, $y = -4$. ▶

☛ **Ответ:** $(3/2; -4)$.

40. Решить уравнение $3x^2 + 3y^2 - 4xy - 2x - 2y + 2 = 0$.

◀ Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно x ; перепишем его так:

$$3x^2 - 2(2y + 1)x + (3y^2 - 2y + 2) = 0.$$

Дискриминант

$$D = 4(2y + 1)^2 - 12(3y^2 - 2y + 2) = -20y^2 + 40y - 20 = -20(y - 1)^2.$$

Отсюда $y = 1$; уравнение приобретает вид $3x^2 - 6x + 3 = 0$. Тогда $x = 1$. ▶

☛ **Ответ:** $(1; 1)$.

Уравнения типа 39–40 допускают геометрическое истолкование в виде некоторой кривой на плоскости xOy — так называемой *кривой 2-го порядка*. Содержательные кривые 2-го порядка — это окружность, парабола, гипербола, эллипс. Тот факт, что уравнению удовлетворяет только одна пара чисел $(x; y)$ означает, что кривая вырождается в точку. Иными словами — уравнение допускает представление в виде суммы нескольких полных квадратов. В примере 39 так и получилось, а в 40-м это как-то прошло мимо нашего внимания. Однако такое представление возможно и здесь; действительно,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 4xy - 2x - 2y + 2 &= \\ &= 2(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0, \\ 2(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

41. Решить уравнение $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6$.

◀ Перепишем уравнение так: $((x - 1)^2 + 2)((y + 3)^2 + 3) = 6$. Таким образом, первая скобка не меньше 2, а вторая — не меньше 3. Значит, произведение не меньше 6, а равно 6 только если $x = 1$, $y = -3$. ▶

☛ **Ответ:** $x = 1$, $y = -3$.

Ситуация, с которой нам предстоит свыкнуться в оставшейся части параграфа, в старину с пафосом предварялась словами: «Внимание: в уравнении параметр!» В смысле: «Берегись Зузу!» Да, если в условии задачи сказано: «Решите уравнение $ax + b = 0$ при всех значениях параметров», это не то же самое что решить какое-либо конкретное уравнение, например $2x + 3 = 0$. Это значит: разобрать *все возможности*, в том числе и случаи равенства нулю как одного из параметров, так и обоих вместе. Таким образом, ответ выглядит не просто: « $x = -b/a$ », а вот как:

«Если $a \neq 0$, то $x = -b/a$. Если $a = 0$, то при $b \neq 0$ решений нет, а при $b = 0$ x — любое число».

Задача с параметром требует не просто решить уравнение (неравенство, систему), а *исследовать* его. Разберем предварительно несколько примеров именно на исследование уравнений; по духу эти примеры можно считать примыкающими к тематике задач с параметром. Материал предоставлен бессмертным сборником задач под редакцией Марка Ивановича Сканави.

Если кто-то скажет вам, дорогой читатель, что Сканави устарел, что его недостаточно для подготовки... Да отрежут лгуну его гнусный язык! Задачник сей и поныне полон шедевров. Уже 500 задач на тригонометрические преобразования чего-то да стоят! А что такое Сканави для репетитора? Самый близкий человек!.. С которым съедена тонна математической соли!..

42. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Составить уравнение с корнями x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 и воспользоваться результатом для решения уравнения

$$x^3 - 3\sqrt{2} \cdot x^2 + 7x - 3\sqrt{2} = 0.$$

◀ Пусть $x_1x_2 = a, x_2x_3 = b, x_3x_1 = c$. Согласно теореме Виета для кубического уравнения, $a + b + c = q$, $abc = (x_1x_2x_3)^2 = r^2$, и тогда

$$ab + bc + ac = x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_2x_3 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -r(-p) = pr.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $x^3 - qx^2 + prx - r^2 = 0$.

Переходя ко второй части, составляем уравнение $x^3 - 7x^2 + 18x - 18 = 0$, которое легко решается, поскольку имеет целый корень $x = 3$. В наших обозначениях это означает, что $a = 3$.

Итак, $x_1 x_2 = 3$, где x_1, x_2 — корни уравнения

$$x^3 - 3\sqrt{2} \cdot x^2 + 7x - 3\sqrt{2} = 0.$$

Виет моментально дает тогда $x_1 x_2 x_3 = 3\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = \sqrt{2}$.

Вместо деления уголком можно опять-таки использовать теорему Виета, ибо условие $x_1 + x_2 + x_3 = 3\sqrt{2}$ влечет $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}$ и в сочетании с $x_1 x_2 = 3$ позволяет найти два других корня. Точнее — позволило бы, если бы они были. Но их нет. Поэтому задача не вполне корректна — вместо трех корней, о которых идет речь в задаче, налицо только один (два других являются комплексными числами). ►

☛ **Ответ:** $x^3 - qx^2 + prx - r^2 = 0$; $x = \sqrt{2}$.

43. Решить уравнения $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ и $6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, если у них есть общий корень.

◄ Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе; мы получим $12x^3 - 20x + 7 = 0$, откуда $x_1 = 1/2$, $x_2 = 7/6$. Общим корнем может быть только $x_1 = 1/2$, поскольку свободный член второго уравнения не кратен 7. Завершение решения труда не представляет. ►

☛ **Ответ:** 1-е уравнение имеет один корень $x = 1/2$; 2-е — еще два корня: $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

44. Решить уравнения $x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0$ и $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, если один корень первого уравнения в два раза меньше одного из корней второго.

◄ Пусть $x = a$ — корень первого уравнения, $x = 2a$ — корень второго. Тогда одновременно выполнены равенства

$$a^3 - 7a^2 + 12a - 10 = 0 \quad \text{и} \quad 8a^3 - 40a^2 - 4a + 20 = 0.$$

Умножая первое равенство на 8 и вычитая из второго, получим после упрощений $4a^2 - 25a + 25 = 0$, откуда $a = 5$ (второй корень $a = 5/4$ не может быть общим корнем исходных уравнений). Значит, первое уравнение имеет корень $x = 5$, а второе — $x = 10$. Понижая степень каждого уравнения, убеждаемся, что первое уравнение других корней не имеет, а второе имеет еще два: $x = \pm\sqrt{2}$. ►

☛ **Ответ:** $x = 5$; $x = 10$ и $x = \pm\sqrt{2}$.

Конечно, при решении этой задачи можно было не придавать никакого значения условию, а просто решить оба уравнения подбором корня (благо, он целый).

Но вот мы наконец вплотную подошли к задачам *собственно* с параметрами. Две отсрочки, которые были призваны смягчить удар, использованы. И теперь нам кажется, что первое обстоятельное знакомство с такой важной вещью как задачи с параметром следует оформить более торжественно — чтобы оно запомнилось. Но каким образом? Выделить отдельный параграф? Нет, это слишком нарушит пропорции, если к каждому разделу будет добавляться соответствующий ему отдел «с параметрами». Поэтому сделаем одно-единственное исключение и разделим данный параграф на две части — без параметров и с ними. Итак...

Часть вторая. Алгебраические уравнения с параметром

Задачи с параметром, как правило, бывают двух основных типов. Либо надо решить уравнение (неравенство, систему) *при всех значениях параметра* — и тогда это, в сущности, несколько обычных уравнений (неравенств, систем), в которых необходимо исследовать все возможности. Либо надо найти *отдельные значения параметра*, при которых выполнено то или иное условие, связанное с уравнением (неравенством, ...). И тогда это *совсем другая* задача, нежели обычное решение уравнения (...), поскольку решать его, возможно, и не надо (и нельзя), а требуется именно выяснить, каким образом и при каких значениях параметра выполняется поставленное условие. Здесь могут понадобиться и графические иллюстрации, и вообще всё что угодно, — такие заковыристые иной раз ставятся вопросы.

Нет, мы не станем классифицировать задачи с параметром с целью всестороннего их изучения, а просто воздадим должное богатейшей фауне, населяющей джунгли абитуриентской математики. Мы посвятим им заключительные страницы большинства параграфов, они послужат своеобразным грузом, который придаст устойчивость всей конструкции. И тогда к концу книги у нас накопится некоторый опыт перед встречей с подобной задачей в жизни, т. е. на экзамене.

Характер у параметра таков, что он может навести туман и на безоблачное небо страны квадратных уравнений. Да что там квадратных — даже просто линейных.

1. Решить при всех значениях параметра уравнение $(a^2 - 1)x - a^2 + 3a + 4 = 0$.

◀ Запишем: $(a - 1)(a + 1)x = (a + 1)(a - 4)$. Если $a = 1$, имеем $0 \cdot x = -6$. Решений нет.

Если $a = -1$, имеем $0 \cdot x = 0$. Решением является любое число.

Если $a \neq \pm 1$, то $x = (a - 4)/(a - 1)$. ▶

☛ **Ответ:** Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, то $x = \frac{a - 4}{a - 1}$; если $a = -1$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a = 1$, то решений нет.

2. Решить уравнение $x^2 + a = 0$.

◀ Если $a > 0$, то решений нет. Если $a = 0$, то $x = 0$. Если $a < 0$, то $x = \pm\sqrt{-a}$. Это решение выглядит как запись ответа, однако такое тоже бывает. Редко, но бывает. ▶

3. Решить уравнение $ax^2 + 3(a+1)x + 2a + 7 = 0$.

◀ Прежде всего, рассмотрим случай $a = 0$, когда уравнение не будет квадратным. Тогда оно имеет вид $3x + 7 = 0$, откуда $x = -7/3$.

Пусть теперь $a \neq 0$. Найдём дискриминант:

$$D = a^2 - 10a + 9.$$

Если $D < 0$, т.е. $1 < a < 9$, решений нет. Если $a = 1$, то $x = -3$; если $a = 9$, то $x = -5/3$. В остальных случаях

$$x_{1,2} = \frac{-3a - 3 \pm \sqrt{a^2 - 10a + 9}}{2a}. \quad (*)$$

Можно было и не рассматривать отдельно случаи $a = 1$ и $a = 9$, поскольку при этих значениях параметра ответ все равно дается формулой (*), но на первых порах хотелось подчеркнуть отличие разобранных случаев друг от друга. ▶

🔑 **Ответ:** Если $a = 0$, то $x = -7/3$; если $-\infty < a < 0$, или $0 < a \leq 1$, или $a \geq 9$, то

$$x_{1,2} = \frac{-3a - 3 \pm \sqrt{a^2 - 10a + 9}}{2a};$$

в остальных случаях решений нет.

4. Решить уравнение $a^2 + \frac{a^2 - 1}{x^2 - 2x} = \frac{x + 2}{x - 2}$.

◀ Избавляясь от знаменателей, приводим уравнение к виду

$$(a^2 - 1)x^2 - (2a^2 + 2)x + a^2 - 1 = 0.$$

Если $a \neq \pm 1$, то уравнение — квадратное. Дискриминант $D = 16a^2$, корни

$$x_1 = \frac{a + 1}{a - 1}, \quad x_2 = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

ОДЗ исходного уравнения определяется условиями $x \neq 0$ и $x \neq 2$, поэтому необходимо отдельно рассмотреть те значения параметра, при которых хотя бы один из корней равен 0 или 2. Легко видеть, что эти значения таковы: $a = \pm 1$, $a = \pm 3$.

Если $a = \pm 1$, то уравнение принимает вид

$$\frac{x-1}{x+1} = 1$$

и решений нет.

Если $a = \pm 3$, то уравнение приводится к виду $2x^2 - 5x + 2 = 0$ и единственный его корень, входящий в ОДЗ, это $x = 1/2$. ►

⦿ **Ответ:** Если $a = \pm 1$, то $\emptyset$; если $a = \pm 3$, то $x = 1/2$; если $a \neq \pm 1, \pm 3$, то

$$x_1 = \frac{a+1}{a-1}, \quad x_2 = \frac{a-1}{a+1}.$$

5. Решить уравнение $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+a)x - (a^2-a) = 0$.

◀ С целью разложения на множители перепишем уравнение так

$$x^3 - x^2 + a^2x - a^2 - 2ax^2 + ax + a = 0$$

или

$$x^2(x-1) + a^2(x-1) - a(2x^2-x-1) = 0,$$

т.е.

$$x^2(x-1) + a^2(x-1) - a(x-1)(2x+1) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} x-1=0, \\ x^2+a^2-a(2x+1)=0. \end{cases}$$

Поскольку второе уравнение приводится к виду $(x-a)^2 - a = 0$, ясно, что при $a < 0$ оно не имеет корней. Если же $a \geq 0$, то $x = a \pm \sqrt{a}$. ►

⦿ **Ответ:** Если $a < 0$, то $x = 1$; если $a \geq 0$, то $x = 1, x = a \pm \sqrt{a}$.

6. Решить уравнение $x^3 - 3x = a^3 + 1/a^3$.

◀ Поскольку

$$x^3 - 3x = x(x^2 - 3), \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right),$$

один корень уравнения достаточно очевиден: $x = a + 1/a$.

Разделив многочлен

$$x^3 - 3x - a^3 - \frac{1}{a^3}$$

на

$$x - a - \frac{1}{a} = x - \frac{a^2 + 1}{a},$$

получим уравнение

$$a^3 x^2 + a^2(a^2 + 1)x + a(a^4 - a^2 + 1) = 0.$$

Его дискриминант после упрощений принимает вид $D = -3a^4(a^2 - 1)^2$. Условие $D \geq 0$ означает тогда, что $a = 0$ (недопустимое значение параметра) или $a = \pm 1$. Таким образом, если $a = \pm 1$, то добавляются еще корни: $x = -1$ при $a = 1$ и $x = 1$ при $a = -1$. ►

☞ **Ответ:** Если $a \neq 0, \pm 1$, то $x = a + 1/a$; если $a = 1$, то $x = -1, x = 2$; если $a = -1$, то $x = 1, x = -2$.

7. Решить уравнение $x^4 + x^3 - 3a^2x^2 - 2a^2x + 2a^4 = 0$.

◀ Рассмотрим уравнение как квадратное относительно $a^2 = t$. Имеем

$$2t^2 - (3x^2 + 2x)t + x^4 + x^3 = 0.$$

Его дискриминант $D = (x^2 + 2x)^2$. Тогда 1) $t = x^2 + x$; 2) $t = x^2/2$.

Первый случай дает уравнение $x^2 + x - a^2 = 0$, при любом a имеющее корни

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a^2 + 1}}{2}.$$

Второй приводит к корням $x_{3,4} = \pm a\sqrt{2}$. ►

☞ **Ответ:** $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{4a^2 + 1})/2$, $x_{3,4} = \pm a\sqrt{2}$.

Примеры 5–7 не назовешь простыми, но их сложность была бы только выше, если бы на месте параметра в них стояли какие-то конкретные числа. Между тем изучение задач с параметрами вырабатывает готовность отвечать на всё более странные и неожиданные вопросы. Ниже предлагается подборка из дюжины (примерно) достаточно характерных формулировок.

8. Найти все значения a , при которых уравнение $(3a-1)x^2 + 2ax + 3a-2 = 0$ имеет два корня.

◀ Научимся сразу отделять случай, когда уравнение, имеющее видимость квадратного, не является таковым, и первым делом отбросим значение $a = 1/3$.

Если $a \neq 1/3$, то для выполнения условия задачи необходимо потребовать положительности дискриминанта. Таким образом,

$$4a^2 - 4(3a - 1)(3a - 2) > 0, \quad \text{т.е.} \quad 8a^2 - 9a + 2 < 0,$$

откуда

$$a \in \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{16}; \frac{9 + \sqrt{17}}{16} \right),$$

но это еще не всё: надо проверить, не принадлежит ли найденному интервалу отброшенное значение $a = 1/3$. Для прошедших школу задач на сравнение чисел в предыдущих параграфах не составит труда доказать, что

$$\frac{9 - \sqrt{17}}{16} < \frac{1}{3} < \frac{9 + \sqrt{17}}{16},$$

поскольку правое неравенство очевидно, а левое равносильно неравенству $11 < 3\sqrt{17}$, что верно, так как $11 < 3 \cdot 4 < 3\sqrt{17}$. ►

☛ **Ответ:** $a \in ((9 - \sqrt{17})/16; (9 + \sqrt{17})/16) \setminus \{1/3\}$.

9. Найти все значения a , при которых разность корней уравнения

$$x^2 + ax + 12 = 0$$

равна 1.

◀ По условию $x_2 - x_1 = 1$. Кроме того, по теореме Виета $x_1 x_2 = 12$. Отсюда либо $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, либо $x_1 = -4$, $x_2 = -3$. Поскольку по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, для параметра получаются два значения: $a = -7$ и $a = 7$. ►

☛ **Ответ:** При $a = -7$ или $a = 7$.

10. Найти все значения a , при которых корни x_1 и x_2 уравнения

$$(a^2 - 5a + 3)x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$$

удовлетворяют условию $x_2 = 2x_1$.

◀ В данном случае по теореме Виета имеем

$$x_1 + x_2 = -\frac{3a - 1}{a^2 - 5a + 3}, \quad x_1 x_2 = \frac{2}{a^2 - 5a + 3},$$

что после подстановки $x_2 = 2x_1$ дает нам систему

$$\begin{cases} 3x_1 = \frac{1-3a}{a^2-5a+3}, \\ 2x_1^2 = \frac{2}{a^2-5a+3}. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, найдем

$$x_1 = \frac{3}{1-3a}.$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы, получим уравнение для нахождения a , а именно

$$\frac{9}{1-3a} = \frac{1-3a}{a^2-5a+3}, \quad \text{откуда} \quad a = 2/3.$$

При найденном значении исходное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{9}x^2 + x = 2 = 0$$

и его корни $x_1 = -3$, $x_2 = -6$. Как видим, условие выполнено. ►

☛ **Ответ:** $a = 2/3$.

11. Решить уравнение $x^2 - 6ax - 2b = 0$, если известно, что числа a , x_1 , x_2 , b — четыре последовательных члена геометрической прогрессии и $x_1 \neq x_2$.

◀ Из условия следует, что

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{b}{x_2}$$

и тогда $x_1x_2 = ab$. Но по теореме Виета $x_1x_2 = -2b$. Таким образом, $-2b = ab$. Это равенство дает две возможности.

1) Если $b = 0$, то исходное уравнение имеет вид $x^2 - 6ax = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 6a$. Но числа a , 0 , $6a$, 0 образуют геометрическую прогрессию только при $a = 0$ и тогда $x_1 = x_2$, что противоречит условию.

2) Если $a = -2$, то $x^2 + 12x - 2b = 0$. Тогда условия $x_1 + x_2 = -12$ и $x_1^2 = -2x_2$ приводят к уравнению

$$x_1^2 - 2x_1 - 24 = 0,$$

из которого $x_1 = 6$ (и тогда $x_2 = -18$) или $x_1 = -4$ (и тогда $x_2 = -8$). ►

☛ **Ответ:** $x_1 = 6$, $x_2 = -18$; $x_1 = -4$, $x_2 = -8$.

- 12.** Найти все значения параметра a , при которых оба корня уравнения $x^2 - (2a - 1)x + 2a^2 - 5a + 2 = 0$ положительны.

◀ Поскольку уравнение квадратное, и параметр легко наводит на него туман, пара «Дискриминант — теорема Виета» доставляет практически полное решение вопроса.

Итак, во-первых, уравнение должно иметь два корня; гарантией этого служит условие $D > 0$, т. е.

$$4a^2 - 4a + 1 - 8a^2 + 20a - 8 > 0 \quad \text{или} \quad 4a^2 - 16a + 7 < 0,$$

откуда

$$0,5 < a < 3,5.$$

Дальше. Положительность обоих корней равносильна выполнению двух условий: $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$, которые, согласно теореме Виета, означают:

$$2a - 1 > 0 \quad \text{и} \quad 2a^2 - 5a + 2 > 0.$$

Первое неравенство выполнено при $a > 1/2$. Второе: при

$$a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

Одновременно то и другое имеет место, если $a > 2$. Тогда, с учетом полученного ранее условия, находим: $2 < a < 3,5$. ►

☛ **Ответ:** $2 < a < 3,5$.

- 13.** Найти все a , при которых корни уравнения $(a-1)x^2 + 2(a-2)x - 3a = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 < 1$, $x_2 > 2$.

◀ Во-первых, $a \neq 1$. Во-вторых, $D > 0$, т. е.

$$(a-2)^2 + 3a(a-1) > 0 \quad \text{или} \quad 4a^2 - 7a + 4 > 0.$$

Это неравенство выполнено при всех a , поскольку его дискриминант $49 - 64 < 0$.

Условие задачи означает, что отрезок $[1; 2]$ оси Ox находится внутри отрезка $[x_1; x_2]$. Пусть вначале $a - 1 > 0$; тогда ветви параболы

$$y = (a-1)x^2 + 2(a-2)x - 3a$$

направлены вверх и гарантией требуемого расположения будут неравенства $y(1) < 0$, $y(2) < 0$. Поскольку

$$y(1) = a - 1 + 2a - 4 - 3a = -5, \quad y(2) = 5a - 12,$$

отсюда следует, что $1 < a < 12/5$.

Пусть теперь $a < 1$; тогда ветви направлены вниз, и надо потребовать выполнения неравенств $y(1) > 0$, $y(2) > 0$. Но первое из них заведомо не выполнено, поэтому этот случай невозможен. ►

☞ **Ответ:** $1 < a < 12/5$.

Если оба корня квадратного уравнения лежат внутри интервала $(a; b)$, то нужно потребовать выполнения условий: $D > 0$, $y(a)y(b) > 0$ и $a < x_0 < b$, где x_0 — абсцисса вершины параболы. Случаи $x_1 < a < x_2 < b$ и $a < x_1 < b < x_2$ также могут быть исследованы при помощи графика. Мы не пытаемся проанализировать все возможности, которые здесь открываются, а только кратко намечаем путь решения подобных задач.

14. Найти все a , при которых уравнение $ax^2 + (4a - 7)x + 4a - 5 = 0$ имеет в точности один корень на отрезке $[-4; 0]$.

◄ Если $a = 0$, то уравнение имеет вид $-7x - 5 = 0$, откуда $x = -5/7$ — единственный корень уравнения. Таким образом, при $a = 0$ требуемое условие выполнено.

Пусть $a \neq 0$, но уравнение имеет один корень, т.е. $D = 0$ или

$$(4a - 7)^2 - 4a(4a - 5) = 0,$$

откуда $a = 49/36$. При данном значении параметра $x = 2/7$. Этот корень не принадлежит отрезку $[-4; 0]$, значит, $a = 49/36$ не годится.

Пусть теперь $D > 0$, т.е. $a < 49/36$. Рассмотрим сначала случай, когда ни один из корней не совпадает с концами заданного отрезка. Тогда условие будет выполнено, если $y(0)y(-4) < 0$, где $y = ax^2 + (4a - 7)x + 4a - 5$, что равносильно неравенству

$$(4a - 5)(4a + 23) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{23}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

Если же один из корней совпадает с одним из концов отрезка, то либо $a = -23/4$, либо $a = 5/4$. В первом случае уравнение приводится к виду

$$23x^2 + 120x + 112 = 0$$

и имеет корни $x_1 = -4$, $x_2 = -28/23$; они оба лежат на рассматриваемом отрезке, значит, $a = -23/4$ условию не удовлетворяет.

Если $a = 5/4$, то корни уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 8/5$. На отрезке $[-4; 0]$ лежит только первый корень. Таким образом, ответ: $a \in (-23/4; 5/4]$. ►

☞ **Ответ:** $a \in (-23/4; 5/4]$.

Нельзя не помянуть здесь добрым словом добрые старые времена: как хорошо писались книжки для абитуриентов 40 лет назад!

При решении уравнений с параметром особое значение имеет рассмотрение всех возможных случаев. При этом заранее трудно предсказать, какие случаи выявятся в процессе решения. Это, с одной стороны, затрудняет решение, но, с другой, делают работу более интересной, придавая ей исследовательский характер. (Г. Мордкович и др., «Квант». № 1, 1970)

- 15.** Найти все такие значения a , что для любого b уравнение $x^2 + bx + a = 0$ имеет хотя бы один корень.

◀ В этой задаче считать почти нечего, зато пораскинуть мозгами придется. Заметим прежде всего, что если $a = 0$, то при любом b уравнение имеет корень $x = 0$.

Если $a < 0$, то $D > 0$ при любом b и уравнение также имеет корни.

Если теперь $a > 0$, то при $b = 0$ уравнение принимает вид $x^2 + a = 0$ и, очевидно, не имеет корней. ▶

☛ **Ответ:** $a \leq 0$.

- 16.** Найти все a , при которых все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$$

удовлетворяют условию $|x| < 1$.

◀ Начав и здесь, как хорошие ребята, с дискриминанта, видим, однако, что дело швах. (Да и не тянет, конечно, с него начинать: но что еще делать?..) Да, тут нам приходится столкнуться с так называемой *хитрой задачей*, которую голыми руками не возьмешь. К счастью, мы уже накопили небольшой опыт решения уравнений с буквенными коэффициентами (поклон М. И. Сканами) и знаем, что помочь может разложение на множители. Попробуем. Прежде всего — раскроем все скобки и перепишем уравнение, группируя слагаемые через два, т. е.

$$3ax^2 - x + 3a^3x - a^2 - 12a^2x + 4a = 0.$$

Вынося в каждой паре общий множитель, получаем

$$x(3ax - 1) + a^2(3ax - 1) - 4a(3ax - 1) = 0,$$

откуда $(3ax - 1)(x + a^2 - 4a) = 0$.

Если $a = 0$, то уравнение имеет один корень $x = 0$, который удовлетворяет условию $|x| < 1$. Значит, $a = 0$ годится.

Если $a \neq 0$, то $x_1 = 1/3a$, $x_2 = 4a - a^2$. Неравенство $|1/3a| < 1$ означает

$$|a| > \frac{1}{3}. \quad (*)$$

Неравенство $|4a - a^2| < 1$ равносильно двойному неравенству $-1 < 4a - a^2 < 1$, которое в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} 4a - a^2 < 1, \\ 4a - a^2 > -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a-2)^2 > 3, \\ (a-2)^2 < 5, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \sqrt{3} < |a-2| < \sqrt{5}. \quad (**)$$

Одновременное выполнение неравенств (*) и (**) имеет место при

$$2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}.$$

(Подробности решения неравенств с модулем можно посмотреть в § 8; здесь не хотелось бы удлинять решение аккуратным разбором...)

Заметим, что попутно приходится установить, что $2 - \sqrt{3} < 1/3$, а $2 - \sqrt{5} > -1/3$, на чем мы также позволим себе не задерживаться. ►

☛ **Ответ:** $a = 0$, $2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}$.

17. Найти все a , при которых уравнения

$$ax^2 - x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad (2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

◀ Данные уравнения можно рассматривать как систему; тогда, чтобы избавиться от констант, вычтем из второго уравнения первое. Мы получим

$$(a - 1)x^2 + (6a + 1)x = 0.$$

Это уравнение-следствие имеет корень $x = 0$, который заведомо не является общим для исходных уравнений. Второй корень (при $a \neq 1$) равен

$$x = -\frac{6a + 1}{a - 1}.$$

Подставим этот корень в первое уравнение. После преобразований мы получим $36a^3 + 19a^2 - 6a = 0$, откуда $a_1 = 0$, $a_2 = -3/4$, $a_3 = 2/9$. Это и есть искомые значения.

Осталось рассмотреть случай $a = 1$; но при этом значении параметра первое уравнение вообще не имеет корней. ►

☛ **Ответ:** $-3/4$, 0 , $2/9$.

18. Найти все a , при которых уравнения

$$x^2 + (a^2 - 4a + 3)x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2(a - 3)x + a^2 - 7a + 12 = 0$$

равносильны.

◀ Равносильность уравнений означает, что их множества решений совпадают. Корни первого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = -a^2 + 4a - 3$. Второе уравнение имеет корень $x = 0$ только в случае $a^2 - 7a + 12 = 0$, т. е. при $a = 3$ и $a = 4$.

Если $a = 3$, то оба уравнения принимают вид $x^2 = 0$ и, очевидно, равносильны. Если $a = 4$, то корни первого уравнения $x = 0$ и $x = -3$, а второго $x = 0$ и $x = -2$, т. е. уравнения не равносильны. ▶

🔍 **Ответ:** $a = 3$.

19. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

максимальна? Найти это максимальное значение.

◀ При решении подобных задач необходимо иметь в виду такое обстоятельство: квадратное уравнение с нулевым дискриминантом все равно считается имеющим два корня (совпадающих) $x_1 = x_2$.

Пусть $t = x_1^2 + x_2^2$. Тогда, поскольку

$$t = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

а по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -2a, \quad x_1x_2 = 2a^2 + 4a + 3,$$

для искомой величины получаем выражение $t = -8a - 6$.

Уравнение имеет корни при $D \geq 0$, т. е. при $a^2 + 4a + 3 \leq 0$ или $a \in [-3; -1]$. На данном отрезке линейная (по переменной a) функция $t = -8a - 6$ достигает наибольшего значения в крайней левой точке, т. е. при $a = -3$. Это значение равно 18.

Заметим, что если бы не указанное выше соображение, то, например, при $a = -2$ данное уравнение имело корни $x = 1$ и $x = 3$, сумма квадратов которых равна 10, что больше квадрата корня $x = -3$, получающегося при $a = -3$. Заметим еще, что в таком случае нелогично говорить о том, что какое-то квадратное уравнение имеет *единственный корень*; однако, как мы знаем, такая формулировка тоже весьма часто встречается в задачах. ▶

🔍 **Ответ:** При $a = -3$; наибольшее значение равно 18.

20. Найти все значения a , удовлетворяющие условию $a \geq 1$, при которых больший корень уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает максимальное значение.

◀ Представим уравнение в виде $(x + a - 3)^2 = a^2 - 7a + 22$. Поскольку дискриминант трехчлена $a^2 - 7a + 22$ отрицателен, данный трехчлен положителен при любом a и таким образом

$$x + a - 3 = \pm \sqrt{a^2 - 7a + 22}.$$

Больший корень уравнения

$$x = 3 - a + \sqrt{a^2 - 7a + 22}.$$

Он максимален, если максимальна сумма $y = -a + \sqrt{a^2 - 7a + 22}$. Здесь уже не обойтись без производной. Имеем

$$y' = -1 + \frac{2a - 7}{2\sqrt{a^2 - 7a + 22}} = \frac{2a - 7 - 2\sqrt{a^2 - 7a + 22}}{2\sqrt{a^2 - 7a + 22}}.$$

Уравнение $y' = 0$ равносильно уравнению

$$2a - 7 = 2\sqrt{a^2 - 7a + 22}.$$

Возводя в квадрат, получаем после упрощений равенство $49 = 88$, т. е. решений нет. Значит, производная везде сохраняет постоянный знак. Какой? Чтобы это выяснить, достаточно подставить любое значение a , например, $a = 0$. Видим, что $y' < 0$. Отсюда следует, что наша функция

$$y = -a + \sqrt{a^2 - 7a + 22}$$

убывает на всей числовой прямой. Поскольку нас интересует наибольшее ее значение при $a \geq 1$, ясно, что оно достигается при $a = 1$. ▶

🔍 **Ответ:** $a = 1$.

21. Найти все a , при которых уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ имеет только целые корни.

◀ Если $a = 0$, то единственный корень уравнения $x = 1$ — целый. Значит, данное значение параметра нам подходит.

Пусть теперь $a \neq 0$. Поскольку дискриминант

$$D = 9 - 8a^3 + 12a = (3 - 2a)(4a^2 + 6a + 3),$$

уравнение имеет корни при $a \leq 3/2$.

Если $a = 3/2$, то уравнение имеет корень $x = 1$ — условие выполнено.

Однако больше для исследования целочисленности корней дискриминант ничего не дает. Обратимся к теореме Виета.

Из равенств

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{a} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{2a^2 - 3}{a}$$

следует, что для целочисленности корней необходимо (но недостаточно) потребовать, чтобы целым было хотя бы одно из чисел $1/a$ или $3/a$, т.е. $a = 1/n$ или $a = 3/k$, где $n, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Если $a = 1/n$, то

$$x_1 x_2 = \frac{2a^2 - 3}{a} = \frac{2}{n} - 3n.$$

Это число будет целым при $n = \pm 1$ и $n = \pm 2$.

Если $n = 1$, то $a = 3$; это значение нам не подходит, так как отрицателен дискриминант.

Если $n = -1$, то $a = -1$ и уравнение имеет вид $-x^2 + 3x - 1 = 0$; его корни не являются целыми.

Если $n = 2$, то $a = 1/2$; уравнение $x^2 + 6x - 5 = 0$ имеет нецелые корни.

Если $n = -2$, то $a = -1/2$ и корни уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$ целые.

Аналогично разбирается возможность $a = 3/k$, где $k = \pm 1$ или $k = \pm 3$. Она новых значений параметра не дает. ►

☛ **Ответ:** $a = 0$, $a = -1/2$, $a = 3/2$.

Предыдущие примеры были связаны с квадратными (всего лишь) уравнениями. Для сохранения хотя бы частичного равновесия обратимся к уравнениям более высоких степеней. Посчитаем, однако, нелишним успокоить читателя, что решение таких уравнений, да еще с параметром, почти всегда представляет собой некий фокус (и если вы не фокусник, не отчаивайтесь: есть и другие ремесла).

22. Найти все a , при которых уравнение

$$\frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)} = a$$

имеет единственное решение.

◀ Поскольку $x \neq 0$, уравнение можно переписать так:

$$\frac{x^2 + 1/x^2}{x + 1/x} = a.$$

Отсюда видно, что если корнем является число x_0 , то число $1/x_0$ — тоже. Корень будет только один, если $x_0 = 1/x_0$, т.е. $x_0 = \pm 1$. При этих значениях x получаем $a = \pm 1$.

Заметим, что мы нашли только необходимые условия того, что уравнение имеет единственный корень. Являются ли они также и достаточными, мы пока не знаем. Пусть $a = 1$; заменив $x + 1/x = y$, получаем уравнение

$$\frac{y^2 - 2}{y} = 1,$$

откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Уравнение $x + 1/x = y$ разрешимо, только если $|y| \geq 2$, поэтому первое значение не годится, для второго получаем единственный корень $x = 1$. Таким образом, $a = 1$ удовлетворяет требованиям задачи.

Пусть теперь $a = -1$; тогда

$$\frac{y^2 - 2}{y} = -1 \Rightarrow y_1 = -2, \quad y_2 = 1.$$

Первое значение дает единственный корень $x = -1$, второе не подходит. ►

☛ **Ответ:** $a = \pm 1$.

23. Найти все a , при которых уравнение $(x^2 - x + a^2 + 1)^2 = 4a^2(5x^2 - x + 1)$ имеет ровно три различных решения.

◀ Уравнение выглядит во все стороны аккуратно, но коэффициент 5 во второй скобке подбивает поискать более симметричную запись и выделить компоненту $x^2 - x + 1 = u$.

Отправляясь в путь, приходим сначала к

$$\begin{aligned} (u + a^2)^2 &= 4a^2(u + 4x^2) \Rightarrow u^2 + 2ua^2 + a^4 = 4a^2u + 16a^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u^2 - 2ua^2 + a^4 = 16a^2x^2 \quad \text{или} \quad (u - a^2)^2 = 16a^2x^2. \end{aligned}$$

И тогда $u - a^2 = \pm 4ax$, откуда

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 - a^2 = 4ax, \\ x^2 - x + 1 - a^2 = -4ax, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - (4a + 1)x + 1 - a^2 = 0, \\ x^2 + (4a - 1)x + 1 - a^2 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Для того чтобы эта совокупность имела три различных решения, нужно одно из двух: либо одно уравнение имеет один корень x_1 , второе — два, не совпадающих с x_1 ; либо оба уравнения имеют по два корня, но один из них является общим.

Первая возможность реализуется в двух случаях: а) $D_1 > 0$, $D_2 = 0$; б) $D_1 = 0$, $D_2 > 0$, где $D_1 = 20a^2 + 8a - 3$, $D_2 = 20a^2 - 8a - 3$.

Неравенство

$$20a^2 + 8a - 3 > 0$$

выполнено при

$$a \notin \left[\frac{-2 - \sqrt{19}}{10}; \frac{-2 + \sqrt{19}}{10} \right].$$

Корни уравнения $20a^2 - 8a - 3 = 0$ таковы:

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{10}.$$

Указанному отрезку не принадлежит корень $(2 + \sqrt{19})/10$ — он и является ответом в случае а) Аналогично в случае б) находится удовлетворяющее условию задаче значение $(-2 - \sqrt{19})/10$.

Чтобы найти условия, при котором уравнения (*) имеют общий корень, вычтем второе уравнение из первого, мы получим $-8ax = 0$, откуда $x = 0$ (поскольку если $a = 0$, уравнения вообще не имеют корней). Значит, общим корнем уравнений может быть только $x = 0$. Но тогда $1 - a^2 = 0$ или $a = \pm 1$.

Подставив эти значения, убеждаемся, что получается совокупность уравнений $x^2 - 5x = 0$ и $x^2 + 3x = 0$, имеющая три корня: 5, 0 и -3. ►

☛ **Ответ:** $a = \pm 1$, $a = \pm(2 + \sqrt{19})/10$.

24. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $x^3 + ax + 2a + 40 = 0$.

◀ Количество корней у данного уравнения равно числу точек пересечения графика функции $y = x^3 + ax + 2a + 40$ с осью Ox . И развитые школьники наших дней знают, что три корня будет в случае

$$\begin{cases} y(x_{\max}) > 0, \\ y(x_{\min}) < 0, \end{cases}$$

два корня в случае $y(x_{\max})y(x_{\min}) = 0$ и один корень в остальных случаях. Поскольку $y' = 3x^2 + a$ и y' может равняться нулю, только если $a \leq 0$, при $a > 0$ уравнение имеет ровно один корень. То же будет и при $a = 0$. При $a < 0$ имеем

$$x_{\max} = -\sqrt{-\frac{a}{3}}, \quad x_{\min} = \sqrt{-\frac{a}{3}}.$$

Условие $y(x_{\max}) > 0$ даст нам неравенство

$$\frac{a}{3} \sqrt{-\frac{a}{3}} - a \sqrt{-\frac{a}{3}} + 2a + 40 > 0 \quad \text{или} \quad 2t^3 - 6t^2 + 40 > 0,$$

т.е. $t^3 - 3t^2 + 20 > 0$, если обозначить $t = \sqrt{-a/3}$. Это неравенство выполнено при $t > -2$.

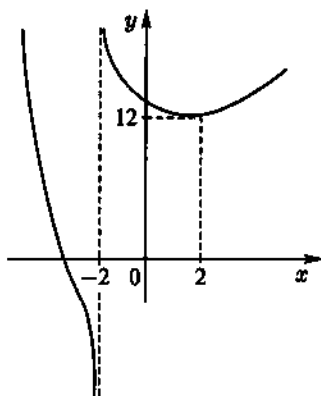


Рис. 4

Условие $y(x_{\min}) < 0$ таким же образом приводит нас к неравенству

$$t^3 + 3t^2 - 20 > 0,$$

решение которого является $t > 2$.

Значит, уравнение имеет три корня, если $\sqrt{-a/3} > 2$, т.е. $a < -12$.

Условие $y(x_{\max})y(x_{\min}) = 0$ дает нам два найденных выше значения t , при которых уравнение имеет два корня. Однако значение $t = -2$ не годится, поскольку $t = \sqrt{-a/3} \geq 0$. При $t = -2$ получаем $a = -12$.

Соответственно, при $a > -12$ уравнение имеет ровно один корень.

Есть и другой подход к этой задаче, основанный на решении относительно параметра. Действительно, поскольку $x = -2$ не является корнем уравнения ни при каком a , уравнение можно переписать так:

$$-a = \frac{x^3 + 40}{x + 2}.$$

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{x^3 + 40}{x + 2}$$

и построим ее график (рис. 4). Он состоит из двух ветвей, разделенных прямой $x = -2$ (асимптотой).

Поскольку

$$y = \frac{x^3 + 8 + 32}{x + 2} = x^2 - 2x + 4 + \frac{32}{x + 2},$$

производная

$$y' = 2x - 2 - \frac{32}{(x + 2)^2} = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 20)}{(x + 2)^2}.$$

Уравнение $y' = 0$ имеет единственный корень $x = 2$. Это — точка минимума функции

$$y = \frac{x^3 + 40}{x + 2},$$

поскольку производная меняет знак с «−» на «+». При этом $y(2) = 12$. Функция убывает на промежутках $(-\infty; -2) \cup (-2; 2)$ и возрастает на промежутке $(2; +\infty)$.

Таким образом, если $-a > 12$, уравнение имеет три корня; если $-a = 12$, уравнение имеет 2 корня; если $-a < 12$, уравнение имеет один корень — по числу пересечений горизонтальной прямой $y = -a$ с графиком функции

$$y = \frac{x^3 + 40}{x + 2}.$$



❖ **Ответ:** Если $a < -12$, то 3 корня; если $a = -12$, то 2 корня; если $a > -12$, то 1 корень.

25. Найти все a и b , при которых два различных корня уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 7x - a = 0$$

являются также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$.

◀ Обратимся к теореме Виета для кубического уравнения. Пусть первое уравнение имеет корни x_1, x_2, x_3 , второе — корни x_1, x_2, x_4 . Тогда первое и третье условия Виета позволяют написать:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 x_2 x_3 = a, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 x_2 x_4 = -b. \end{cases}$$

Отсюда $x_3 - x_4 = 5$, $x_3/x_4 = -a/b$ (легко убедиться, что если $x = 0$, то условие задачи не выполнено). Решая эти два уравнения, получим

$$x_3 = \frac{5ab}{a+b}, \quad x_4 = -\frac{5b}{a+b} \quad \text{и тогда} \quad x_1 x_2 = \frac{a+b}{5}.$$

Теперь вторые условия Виета для каждого уравнения дают равенства

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 7, \\ x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_4 x_1 = -8. \end{cases}$$

Вычитая второе из первого, получим $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4) = 15$, откуда $x_1 + x_2 = 3$. Тогда $x_4 = -3$ и, подставляя в уравнение $x^3 - 8x + b = 0$, находим $b = 3$. Но $x_3 = 2$ и, подставляя в уравнение $x^3 - 5x^2 + 7x - a = 0$, получаем $a = 2$. ▶

❖ **Ответ:** $a = 2$, $b = 3$.

26. Дано уравнение

$$x^2 + 3xy + 3ay^2 + \left(\frac{9}{2} - a\right)y + 4x + 5 = 0.$$

Найти все a , при которых: это уравнение имеет хотя бы одно решение при $y = 2$; найдется хотя бы одна пара (x, y) , удовлетворяющая этому уравнению.

- ◀ 1) При $y = 2$ исходное уравнение таково:

$$x^2 + 10x + 10a + 14 = 0.$$

Оно имеет корни, если $D \geq 0$, т.е. $25 - 10a - 14 \geq 0$ или $a \leq 11/10$.

2) Поскольку уравнение является квадратным относительно x , его дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. должно выполняться неравенство

$$(3y + 4)^2 - 12ay^2 - (18 - 4a)y - 20 \geq 0 \quad \text{или} \\ (9 - 12a)y^2 + (6 + 4a)y - 4 \geq 0.$$

Это неравенство, в свою очередь, является квадратным относительно y (пусть пока $9 - 12a \neq 0$). Если $9 - 12a > 0$, т.е. $a < 3/4$, то ветви параболы направлены вверх и неравенство всегда имеет решения. Если $9 - 12a < 0$, $a > 3/4$, то решения есть, если

$$D = (6 + 4a)^2 + 16(9 - 12a) \geq 0,$$

т.е. $a \leq 3/2$ или $a \geq 15/2$.

Наконец, при $a = 3/4$ приходим к неравенству $9y - 4 \geq 0$ — оно также имеет решения. ▶

☞ **Ответ:** 1) $a \leq 11/10$; 2) $a \leq 3/2$ или $a \geq 15/2$.

27. На координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты (a, b) которых удовлетворяют условиям $a < b$, $|a| < 3$, $|b| < 3$ и таковы, что уравнение

$$(a^3 - b^3)x^4 + (3a + b)x^2 + \frac{1}{a - b} = 0$$

не имеет решений.

1) Принадлежит ли точка $P(-2; -1)$ множеству M ?

2) Найти площадь многоугольника, внутренней частью которого является множество M .

- ◀ 1) При $a = -2$, $b = -1$ уравнение приводится к виду

$$7x^4 + 7x^2 + 1 = 0$$

и корней у него нет, т. е. точка $P(-2; -1)$ принадлежит множеству M .

2) Рассматриваемое уравнение не имеет решений в двух случаях: а) $D < 0$; б) оба корня уравнения

$$(a^3 - b^3)y^2 + (3a + b)y + \frac{1}{a - b} = 0$$

отрицательны.

а) Поскольку

$$D = 5a^2 + 2ab - 3b^2 = (a + b)(5a - 3b),$$

неравенство $D < 0$ задает на координатной плоскости область, заключенную между прямыми $b = -a$ и $b = 5a/3$ (рис. 5).

б) Отрицательность корней означает (теорема Виета), что переменные удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{3a + b}{a^3 - b^3} > 0, \\ a^2 + ab + b^2 > 0. \end{cases}$$

Второе неравенство выполняется везде, кроме начала координат. Первое равносильно условию $(3a + b)(a - b) > 0$, которое задает область, заключенную между прямыми $b = a$ и $b = -3a$ (рис. 6).

Условия $a < b$, $|a| < 3$, $|b| < 3$ задают треугольник, ограниченный прямыми $b = \pm 3$, $b = a$. Таким образом, множество M состоит из квадрата с вершинами

$$A(-3; 0), \quad B(-3; 3), \quad C(0; 3), \quad O(0; 0)$$

и двух треугольников: OCD и $ЕАО$, где $D(9/5; 3)$ — точка пересечения прямых $b = 5a/3$ и $b = 3$, $E(-3; -3)$ (рис. 7).

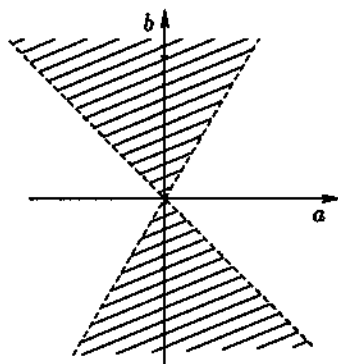


Рис. 5

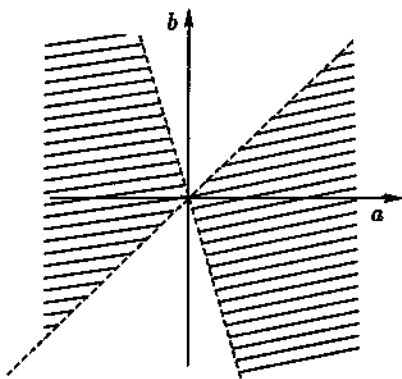


Рис. 6

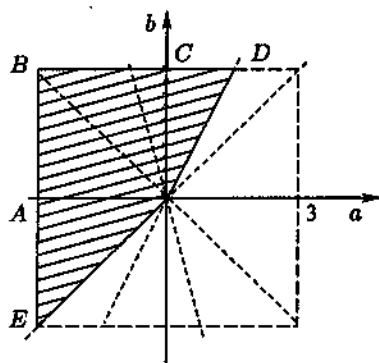


Рис. 7

Площадь квадрата равна 9, площадь первого треугольника

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{5} = \frac{27}{10},$$

второго — $9/2$, площадь всей фигуры $81/5$. ►

☛ **Ответ:** 1) Принадлежит; 2) $81/5$.

В этом параграфе мы, кажется, потрудились больше обычного. Но не будем обольщаться, полагая, что как-то особенно застраховали себя: «Пока мы ставим мосты над реками невежества, они меняют свои русла» (С. С. Аверинцев).

Ибо, как сказал поэт,

Блуждает жизнь извивами Меандра...



Долгожданный привал зачарованных охотников

Решите устно:

0. а) $2008x^2 - 2007x - 1 = 0$; б) $x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$.

Решите уравнения:

1. а) $x^3 - 3x - 2 = 0$; б) $3x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$.

2. а) $x^4 - 6x^3 + 54x - 81 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0$.

3. $64x^6 + 48x^4 + 12x^2 + 1 = 128x^3$.

4. а) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 84$; б) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) = 3x^2$;
в) $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.

5. а) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{2x+1}{2x-2} = \frac{2x-1}{2x+2} + \frac{x+1}{x+2}$; б) $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+2} + \frac{10}{x+3} + \frac{4}{x+4} = 0$;
в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$.

6. а) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} +$
 $+\frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} = \frac{1}{10}$;

б) $\frac{10}{x+10} + \frac{10 \cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{(x+10)(x+9)(x+8)} + \dots +$
 $+\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \dots 2 \cdot 1}{(x+10) \dots (x+1)} = 11$.

7. $(x^2 - x - 1)^3 + (2x^2 - x - 7)^3 = (3x^2 - 2x - 8)^3$.

8. $\frac{x-3}{x^2-12x+36} - \frac{x-6}{x^2-6x+9} = 9(21-9x+x^2)$.

9. $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$.

10. а) $(x^2 - 3x + 1)^2 + 3(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 4(x-1)^2$;

б) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 4\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 0$;

в) $(x^2 + x + 3)^2 = 3x^2(5x^2 + x + 3)$.

11. $(x^2 - 3x - 1)(x^2 - 9x + 8) = 4(4x^2 - 12x + 9)$.

12. а) $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$;

в) $\frac{11x-6}{6x-11} = x^4$.

13. а) $18x^2 + \frac{2}{x^2} = 16 - 3x - \frac{1}{x}$; б) $\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) - 2\left(2x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$.

14. $\frac{x^6 + 1}{x(x^4 + 1)} = \frac{65}{34}$.

15. $2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 66x^3 + 80x^2 - 72x + 32 = 0$.

16. а) $6x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$; б) $3x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$.
 17. а) $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$; б) $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$.
 18. $(x^2 - 3x - 2)^2 = 3x^2 - 8x - 4$.
 19. а) $x^4 - 12x + 13 = 0$; б) $x^5 + 2009x + 2010 = 0$.
 20. а) $\frac{5}{x^8 + 5} + \frac{10}{x^6 + 10} = 2$; б) $(x + 1)^8 + (x - 1)^8 = 256$.
 21. а) $2(x^4 - 2x^2 + 3)(y^4 - 3y^2 + 4) = 7$; б) $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$;
 в) $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x + 4y + 10 = 0$.
 22. $(2 - x^3)^3 = 2 - x$.

23*. а) $x^3 + 9x - 6 = 0$; б) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$.

24. Дано уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$. Не находя его корней x_1 и x_2 , вычислите значение выражений: а) $x_1^3 + x_2^3$; б) $1/\sqrt{x_1} + 1/\sqrt{x_2}$; в) $1/\sqrt[3]{x_1} + 1/\sqrt[3]{x_2}$.
 25. Докажите, что уравнение $x^2 - 5x + 5 + 4/x = 0$ не имеет положительных корней.
 26. Докажите, что корни x_1, x_2, x_3 уравнения $x^3 + px + q = 0$ удовлетворяют соотношению $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.
 27. Найдите количество корней уравнения $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x - 10 = 0$ на отрезке $[0; 3]$.
 28. Решите уравнение $5x^5 - 5x^3 + x + 5 = 0$.
 29. Разложите на линейные множители: $4x^4 - 20x^3y + 33x^2y^2 - 20xy^3 + 4y^4$.
 30. Числа a и b таковы, что $a^3 - 3a^2 + 5a - 1 = 0$, $b^3 - 3b^2 + 5b - 5 = 0$. Не решая этих уравнений, найдите сумму $a + b$.
 31. Решите при всех значениях параметров уравнения:
 а) $x^3 - (3a - 1)x^2 + (2a^2 - 3a)x + 2a^2 = 0$.
 б) $x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - b)x - (a^2 - b) = 0$.
 в) $\frac{(b^2 + x)a^2}{(a^2 + b^2 + x)(a^2 + b^2 + x - 1)} = \frac{a^2}{4a^2 - 1}$.
 г) $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} = 0$
 д) $3abc + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}$.

е) $\frac{2a^2 + x^2}{a^3 - x^3} - \frac{2x}{ax + a^2 + x^2} + \frac{1}{x - a} = 0$.

Найдите все значения a , при которых:

32. Уравнение $a^4x + a^2 + (2 + \sqrt{2})a = a^2(a + \sqrt{2}) + 4x$ имеет бесконечно много решений.
33. Расстояние между корнями уравнения $ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$ больше 1.
34. Оба корня уравнения $(a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 5a + 2 = 0$ больше 1.
35. Все корни уравнения $(a - 1)x^2 + (a^2 - 2a + 2)x + a + 1 = 0$ положительны и меньше 2.
36. Сумма кубов корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$, $a > 0$, минимальна.
37. Корни уравнения $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$ удовлетворяют условиям $-4 < x_1 < 0 < x_2 < 4$.
38. Уравнение $(a + 1)x^2 + (1 - a)x - 5a - 3 = 0$ имеет хотя бы один корень и все его корни целые.
39. Отношение суммы коэффициентов многочлена $(ax^2 - 7)^{18}$ к его свободному члену минимально.
40. Уравнения $a^2x - a - x^3 + 5x^2 - 4 = 0$ и

$$(x + 1)a^2 + (x^2 - x - 2)a - 2x^3 + 10x^2 - 8 = 0$$

не имеют общих корней.

41. Уравнение $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = a$ имеет хотя бы одно решение.
42. Уравнение $(x^2 - a)^2 = 6x^2 - 4x - 2a$ имеет три корня.
43. Три различных корня уравнения $x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.
44. Все корни уравнения

$$x^4 + (x + 1)((3a - 2)x^2 + (2a^2 - a - 3)(x + 1)) = 0$$

принадлежат отрезку $[-3; 0]$.

45. Уравнение $25x^5 + 25(a - 1)x^3 - 4(a - 7)x = 0$ имеет 5 различных корней, а сами корни, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.
46. Уравнение $x(x + 1)(x + a)(x + a + 1) = a^2$ имеет 4 различных корня.
47. Все корни уравнения $x^2 - ax + 2a = 0$ являются корнями уравнения $x^3 - (a + 1)x^2 + 3ax + a^2 - 3a - 2 = 0$.

48. Уравнение

$$(x^2 + 2(a+1)x + a^2 + 2a)^2 + \\ + (a+5)(x^2 + 2(a+1)x + a^2 + 2a) - a^2 - 7a - 10 = 0$$

имеет: 1) единственное решение; 2) ровно два различных решения.

49. Многочлен $p(x) = x^4 + (b+2)x^3 + (a+2b)x^2 + (3a+b-4)x + 2a-3$ имеет корень, не зависящий ни от a , ни от b . Найдите его. Найдите все a и b , при которых данный многочлен является квадратом некоторого квадратного трехчлена.
50. Найдите все a , при которых уравнения $22x^4 + 33x^3 - 16ax^2 - 3x + 2 = 0$ и $11x^4 + 33x^3 + 21x^2 - 2ax - 2 = 0$ имеют общие корни. Найдите эти корни.

Замечание. В этом параграфе мы, по-видимому, собираем наибольшее количество задач с параметром, чтобы на самом простом типе уравнений дать возможность для самых широких исследований. Потом, с усложнением материала, это потребовало бы слишком много места.

Кунсткамера¹⁾

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{1 + 1/(1 + 1/(3x + 2))} = \frac{3x^2 + 11x + 10}{36x^2 - 25} - \frac{3 - 2x}{6x - 5}.$$

2. $(x^2 - 2x - 2)^2 + x^2 = 7$.

3. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

Советы и решения

Р 1. а) Подбором находим $x_1 = -1$, после деления на $x + 1$ находится еще один корень: $x_2 = 2$.

Р 2. а) ... $\Leftrightarrow (x^4 - 81) - 6x(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9 - 6x) = 0$.

б) Подбор дает: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; после деления находим еще два корня.

Р 3. Поскольку $x = 0$ — не корень уравнения, можно поделить обе части на x^3 . Уравнение примет вид

$$64x^3 + 48x + \frac{12}{x} + \frac{1}{x^3} = 128 \quad \text{или} \quad \left(64x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 12\left(4x + \frac{1}{x}\right) = 128.$$

¹⁾ То есть задачи, которые, как говорится, и в страшном сне не привидятся, однако ж на вступительных экзаменах — предлагались.

Заменим $4x + 1/x = y$; тогда

$$64x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(4x + \frac{1}{x}\right) \left(16x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}\right) = y \left(\left(4x + \frac{1}{x}\right)^2 - 12\right) = y(y^2 - 12).$$

Приходим к уравнению $y^3 = 128$, откуда $y = \sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2}$. Осталось решить уравнение

$$4x + \frac{1}{x} = 4\sqrt[3]{2} \quad \text{или} \quad 4x^2 - 4x\sqrt[3]{2} + 1 = 0.$$

Р 4. а) Разложим трехчлены на множители, а потом перегруппируем эти множители по-другому:

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) = 84 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2)(x+4) = 84 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8) = 84.$$

Заменив $x^2 + 2x - 3 = y$, получим $y(y-5) = 84$, откуда $y_1 = -7$, $y_2 = 12$. Теперь остается решить уравнения $x^2 + 2x - 3 = -7$ и $x^2 + 2x - 3 = 12$.

б) ... $\Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 3x^2$. После деления на $x^2 \neq 0$ получаем

$$\left(x + 7 + \frac{6}{x}\right) \left(x + 5 + \frac{6}{x}\right) = 3.$$

Заменив первую скобку на y , получаем уравнение $y(y-2) = 3$, корни которого $y_1 = -1$ и $y_2 = 3$.

в) ... $\Leftrightarrow (12(3x^2 + 5x) + 25)(3x^2 + 5x + 2) = 35 \Leftrightarrow (12y + 25)(y + 2) = 35$ (где $y = 3x^2 + 5x$). Отсюда $y_1 = -15/4$, $y_2 = -1/3$.

Р 5. а) ... $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{2x-1}{2x+2} - \frac{2x+1}{2x-2} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-4} = -\frac{3x}{x^2-1}$.

$$\text{б) } \dots \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+4} + \frac{4}{x+2} + \frac{10}{x+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x+16}{(x+1)(x+4)} + \frac{14x+32}{(x+2)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1) 7x+16=0; 2) \frac{1}{(x+1)(x+4)} + \frac{2}{(x+2)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+5x+4} + \frac{2}{x^2+5x+6} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{2}{y+2} = 0,$$

где $y = x^2 + 5x + 4$. Единственный корень $y = -2/3$.

$$\text{в) } \dots \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right) - \frac{2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+4}{x^2+4x} + \frac{2x+4}{x^2+4x+3} - \frac{2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y}{y^2-4} + \frac{2y}{y^2-1} - \frac{2}{y} = 0,$$

где $y = x + 2$. После упрощений получаем $y^4 - 4 = 0$, т. е. $y = \pm\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Р 6. а) } \dots &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x(x+5) = 50. \end{aligned}$$

б) Будем складывать дроби попарно, начиная с конца. Две последние дроби дадут

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2}{(x+10) \dots (x+2)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}{(x+10) \dots (x+1)} = \frac{10!}{(x+10) \dots (x+3)(x+1)}$$

(в последнем знаменателе есть все множители, кроме $x+2$, который сократился). Далее:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3}{(x+10) \dots (x+3)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}{(x+10) \dots (x+3)(x+1)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3}{(x+10) \dots (x+4)(x+1)}.$$

Аналогично

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4}{(x+10) \dots (x+4)} + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3}{(x+10) \dots (x+4)(x+1)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4}{(x+10) \dots (x+5)(x+1)}$$

и т.д. В итоге приходим к равенству

$$\frac{10 \cdot 9}{(x+10)(x+1)} + \frac{10}{x+10} = 11 \quad \text{или} \quad \frac{10}{x+1} = 11.$$

Р 7. Если $u = x^2 - x - 1$, $v = 2x^2 - x - 7$, то уравнение имеет вид $u^3 + v^3 = (u+v)^3$, откуда $uv(u+v) = 0$, т.е. либо $u+v = 0$, либо $u = 0$, либо $v = 0$. Получаем совокупность трех уравнений:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0, \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad 2x^2 - x - 7 = 0.$$

Р 8. Избавляясь от знаменателей, имеем $(x-3)^3 - (x-6)^3 = 9(x^2 - 9x + 21)(x-6)^2(x-3)^2$. Разложение разности кубов в левой части дает уравнение

$$9(x^2 - 9x + 21) = 9(x^2 - 9x + 21)(x-6)^2(x-3)^2,$$

откуда либо $x^2 - 9x + 21 = 0$, либо $(x-6)(x-3) = \pm 1$.

$$\text{Р 9. } \dots \Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} = 16$$

или $y^2 + 6y = 16$, где $y = x^2/(x+3)$. Отсюда $y_1 = 2$, $y_2 = -8$.

Р 10. а) Заменяя $x^2 - 3x + 1 = u$, $x - 1 = v$, имеем однородное уравнение

$$u^2 + 3uv - 4v^2 = 0,$$

из которого либо $u = v$, либо $u = -4v$. Первое равенство приводит к уравнению $x^2 - 4x + 2 = 0$, второе — к уравнению $x^2 + x - 3 = 0$.

б) Перепишем уравнение так:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 4\left(\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x}\right) + 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 0$$

и заменив

$$\frac{x+1}{x-1} = u, \quad \frac{x-1}{x} = v,$$

придем к однородному уравнению $u^2 - 4uv + 3v^2 = 0$, из которого либо $u = v$, либо $u = 3v$.

в) Уравнение можно переписать в виде $(x^2 + x + 3)^2 - 3x^2(x^2 + x + 3) - 12x^4 = 0$, и тогда снова получается однородное уравнение $u^2 - 3uv - 12v^2 = 0$ относительно $u = x^2 + x + 3$ и $v = x^2$.

Р 11. Пусть $x^2 - 3x - 1 = u$, $v = x^2 - 9x + 8$, тогда уравнение имеет вид

$$uv = 4\left(\frac{u-v}{3}\right)^2 \quad \text{или} \quad 4u^2 - 17uv + 4v^2 = 0,$$

откуда либо $u = 4v$, либо $v = 4u$.

Р 12. а) Имеем возвратное уравнение; после деления на $x^2 \neq 0$, группировки и замены $x - 1/x = y$ приходим к уравнению $2y^2 + 3y + 1 = 0$, из которого $y_1 = -1$, $y_2 = -1/2$.

б) И тут имеем возвратное уравнение, решаемое заменой $x + 2/x = y$.

в) После приведения к каноническому виду получаем возвратное уравнение

$$6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0;$$

далее $y = x + 1/x$.

Р 13. а) Еще одно продолжение «возвратной» темы. Уравнение переписывается в виде

$$2\left(9x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(3x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$

и решается заменой $3x + 1/x = y$, сводящей его к квадратному уравнению $2y^2 + y - 28 = 0$ с корнями $y_1 = -4$ и $y_2 = 7/2$.

б) Здесь имеем

$$\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{2x}\right) + 5 = 0, \quad x + 1/2x = y, \quad y^2 - 4y + 4 = 0$$

и т.д.

Р 14. Трудно не заметить, что

$$\begin{cases} 65 = 2^6 + 1, \\ 34 = 2(2^4 + 1), \end{cases}$$

т. е. $x = 2$ — корень. Но тогда и $x = 1/2$ — тоже корень, поскольку уравнение можно представить в виде

$$\frac{x^3 + 1/x^3}{x^2 + 1/x^2} = \frac{65}{34}.$$

Заменяв $x + 1/x = y$, придем к уравнению $34y^3 - 65y^2 - 102y + 130 = 0$, решать которое на пустом месте было бы не слишком приятно; но ведь один корень $y = 2 + 1/2 = 5/2$ у нас уже есть, поэтому дальнейшее труда не представляет.

Р 15. Достойное завершение возвратной темы. После деления на $x^4 \neq 0$ и замены $x + 2/x = y$, которая дает нам:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4; \quad x^3 + \frac{8}{x^3} = y(x^2 - 2 + \frac{4}{x^2}) = y(y^2 - 6);$$

$$x^4 + \frac{16}{x^4} = \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^2 - 8 = y^4 - 8y^2 + 8,$$

получаем уравнение $2y^4 - 9y^3 + 4y^2 + 21y - 18 = 0$, имеющее корни $y_1 = -3/2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$.

Р 16. а) Имеем:

$$5x^3 + (x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{5} = -x-1 \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{5}+1) = -1 \Leftrightarrow x = -1/(\sqrt[3]{5}+1).$$

б) Представим уравнение в виде $4x^3 - (x-1)^3 = 0$ и тогда $x\sqrt[3]{4} = x-1$.

Р 17. а) Прежде всего, раскроем скобки: $x^3 - x^2\sqrt{2} - x^2 + 2 = 0$ и разложим на множители:

$$x^2(x - \sqrt{2}) - (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{2})(x^2 - x - \sqrt{2}) = 0.$$

б) Это уравнение решается принудительным введением параметра — заменой $\sqrt{3}$ на a . Тогда имеем $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$ или $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 + x = 0$ — уравнение, квадратное относительно a . Его дискриминант $D(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$, поэтому

$$a = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2}.$$

Таким образом, мы получаем два уравнения

$$\begin{cases} x^2 + x = \sqrt{3}, \\ x^2 - x + 1 = \sqrt{3}, \end{cases}$$

которые решаются.

Р 18. Используем разность квадратов. Имеем $(x^2 - 3x - 2)^2 - x^2 = 2x^4 - 8x - 4$ и тогда $(x^2 - 3x - 2 - x)(x^2 - 3x - 2 + x) = 2(x^2 - 4x - 2)$ или $(x^2 - 4x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 2(x^2 - 4x - 2)$, откуда либо $x^2 - 4x - 2 = 0$, либо $x^2 - 2x - 2 = 2$.

Р 19. а) Уравнение можно представить в виде $(x^2 - 2)^2 + (2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow$ корней нет.

б) $(x^5 + 1) + 2009(x + 1) = 0$, откуда либо $x = -1$, либо

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 2010 = 0 \quad (*).$$

Корень исходного уравнения может быть только отрицательным, уравнение (*) таких корней, напротив, иметь не может.

Р 20. а) Единственным корнем является $x = 0$, поскольку если $x \neq 0$, обе дроби меньше 1.

б) Корни $x = \pm 1$ очевидны, а других нет, поскольку если $x > 1$ или $x < -1$, то для функции $f(x) = (x+1)^8 + (x-1)^8$ имеем $f(x) > 256$; если же $-1 < x < 1$, то $f(x) < 256$. (Это последнее утверждение следует, например, из того, что $f(x)$ убывает на отрезке $[-1; 0]$ и возрастает на отрезке $[0; 1]$, поскольку производная

$$f'(x) = 8(x+1)^7 + 8(x-1)^7$$

обращается в нуль при $x = 0$, меняя при этом знак с минуса на плюс.)

Р 21. а) Поскольку

$$2((x^2 - 1)^2 + 2)\left(\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right) \leq 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{4} = 7,$$

равенство достигается только в случае $x^2 - 1 = 0$ и $y^2 - 3/2 = 0$.

б) Выделим полный квадрат и представим уравнение так:

$$(x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 + 2 = 4xy \quad \text{или} \quad (x^2 - y^2)^2 + 2(x^2y^2 - 2xy + 1) = 0,$$

т. е. $(x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 = 0$. Значит, $x^2 = y^2$ и $xy = 1$.

в) Выделяем полные квадраты: $(x + y - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$, отсюда

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y = 3. \end{cases}$$

Р 22. После более или менее успешных попыток решить уравнение становится ясно, что $x = 1$ — корень. Других, по-видимому, нет. Чтобы доказать это, перепишем уравнение в виде $2 - x^3 = \sqrt[3]{2 - x}$ и рассмотрим функцию $y = 2 - x^3$. Обратной к ней как раз и является $y = \sqrt[3]{2 - x}$, таким образом, построив графики, симметричные относительно прямой $y = x$ (рис. 8), убеждаемся, что других точек пересечения, кроме (1; 1) нет.

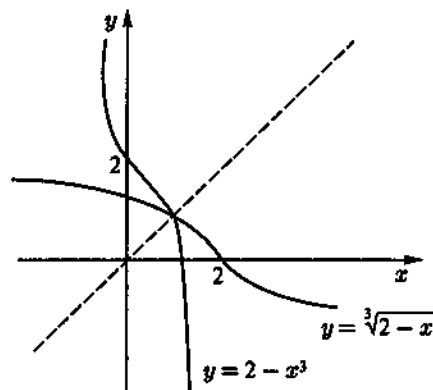


Рис. 8

«Из графика видно» — аргумент, конечно, неотразимый, однако пример уравнения

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{1/16} x$$

(которое на первый взгляд имеет один корень, а на самом деле — три) показывает, что видно не всё и не всегда (хотя обычно доверять графикам не только можно, но и нужно). На всякий случай застрахуем себя более строгим рассуждением. Рассмотрим вначале интервал $(1; \sqrt[3]{2})$, на котором чисто теоретически может лежать корень. Уравнение касательной к графику функции $y = 2 - x^3$ имеет вид $y = -3x + 4$. Вот и докажем, что касательная «разделяет» графики на данном интервале, т. е. проверим, что

$$\sqrt[3]{2 - x} > -3x + 4 > 2 - x^3.$$

Второе неравенство равносильно неравенству

$$x^3 - 3x + 2 > 0 \quad \text{или} \quad (x - 1)^2(x + 2) > 0,$$

которое на интервале $(1; \sqrt[3]{2})$ выполнено. Первое неравенство после возведения в куб приводится к виду

$$(x-1)(27x^2-81x+62) > 0$$

и также выполнено при $x > 1$, поскольку дискриминант квадратного трехчлена отрицателен. Ввиду симметрии те же рассуждения можно применить к касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{2-x}$ на интервале $(0; 1)$.

Р 23. а) По методу Кардано:

$$\begin{aligned} x = u + v &\Rightarrow (u+v)^3 + 9(u+v) - 6 = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv+3) - 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 6, \\ uv + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 6, \\ u^3 v^3 = -27, \end{cases} \Rightarrow t^2 - 6t - 27 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_1 = -3, \quad t_2 = 9 \Rightarrow u^3 = -3, \quad v^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

б) По методу Феррари (приведение к разности квадратов): вводим вспомогательный параметр a и записываем

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}x + a\right)^2 = -x^2 - 4x + 6 + \frac{9}{4}x^2 + a^2 - 3ax + 2ax^2$$

или

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}x + a\right)^2 = \left(\frac{5}{4} + 2a\right)x^2 - (4 + 3a)x + 6 + a^2,$$

после чего приравняем к нулю дискриминант

$$D = (4 + 3a)^2 - 4\left(2a + \frac{5}{4}\right)(a^2 + 6).$$

Это дает уравнение $8a^3 - 4a^2 + 24a + 14 = 0$, из которого $a = -1/2$. Исходное уравнение принимает вид

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\right)^2$$

и распадается на два квадратных.

Р 24. Поскольку $x^2 - 4x + 1 = 0$, по теореме Виета $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 1$. Отсюда

а) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 4(16 - 3) = 52$, в силу равенства

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2.$$

б) Пусть $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = a$, $a > 0$; тогда $x_1 + x_2 = a^2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = a^2 - 2 = 4$. Отсюда $a = \sqrt{6}$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{6}.$$

в) Если $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = b$, то

$$x_1 + x_2 = b^3 - 3b\sqrt[3]{x_1 x_2},$$

откуда $b^3 - 3b - 4 = 0$. Видимо, по чьему-то недосмотру это уравнение не имеет рациональных корней, поэтому привлекаем метод Кардано и находим

$$b = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}.$$

Р 25. Перепишем уравнение так:

$$x + \frac{4}{x} = 4 - x^2 + 6x - 9 \quad \text{или} \quad x + \frac{4}{x} = 4 - (x-3)^2.$$

В силу неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ имеем

$$x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

Однако $4 - (x-3)^2 \leq 4$, значит, необходимо потребовать одновременного выполнения равенств

$$x + \frac{4}{x} = 4 \quad \text{и} \quad x = 3,$$

что невозможно.

Р 26. Утверждение следует из формулы

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

и теоремы Виета для кубического уравнения. В данном случае $x_1+x_2+x_3=0$, а потому и $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=0$.

Р 27. Исследуем функцию $y = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x - 10 = 0$. Имея в виду вопрос задачи, мы первым делом замечаем, что $y(0) < 0$, $y(3) > 0$, поэтому на данном отрезке есть по крайней мере один корень. Продолжая исследование, найдем и разложим на множители производную:

$$y' = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 12(x+2)(x-1)(x+1).$$

Отсюда видно, что на отрезке $[0; 3]$ лежит точка $x = 1$, в которой наша функция имеет локальный минимум. Теперь поведение функции нам ясно: $y(0) < 0$; дальше функция убывает на отрезке $[0; 1]$, оставаясь отрицательной; на отрезке $[1; 3]$ функция возрастает, причем $y(3) > 0$. Значит, функция всего один раз пересекает ось Ox и данное уравнение имеет на отрезке $[0; 3]$ ровно один корень. (Для решения этой задачи (ЛГУ, 1982) лучше ничего не знать о методе Феррари.)

Р 28. Заменяя $x = u + v$ и подставив, получим уравнение

$$5(u^5 + v^5 + 1) + 5(u^3 + v^3)(5uv - 1) + (u + v)(50u^2v^2 - 15uv + 1) = 0,$$

по которому составляем систему

$$\begin{cases} u^5 + v^5 + 1 = 0, \\ 5uv - 1 = 0. \end{cases}$$

В силу второго уравнения равна нулю и скобка $50u^2v^2 - 15uv + 1$.

Р 29. Решая вспомогательное однородное уравнение

$$4x^4 - 20x^3y + 33x^2y^2 - 20xy^3 + 4y^4 = 0,$$

которое приводится к возвратному уравнению

$$4t^4 - 20t^3 + 33t^2 - 20t + 4 = 0$$

относительно $t = x/y$, находим два корня: $t_1 = 1/2$ и $t_2 = 2$, откуда

$$4t^4 - 20t^3 + 33t^2 - 20t + 4 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-2)^2 = (2t-1)^2(t-2)^2.$$

Остается подставить сюда $t = x/y$ и домножить на y^4 .

Р 30. Преобразуем данные равенства, выделив в каждом из них полный куб. Тогда

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 1 = (a-1)^3 + 2(a-1) + 2 = 0, \quad b^3 - 3b^2 + 3a - 1 = (b-1)^3 + 2(b-1) - 2 = 0.$$

Заменим $a-1 = x$, $b-1 = y$ и сложим равенства. Получим $x^3 + y^3 + 2(x+y) = 0$, откуда $x+y=0$ (поскольку $x^2 - xy + y^2 + 2 > 0$ при всех x и y). Значит,

$$a-1+b-1=0 \quad \text{и} \quad a+b=2.$$

Р 31. а) ... $\Leftrightarrow (x+1)x^2 - 3ax(x+1) + 2a^2(x+1) = 0$ и т.д.

$$б) \dots \Leftrightarrow x(x-a)^2 - (x-a)^2 - b(x-1) = 0, \quad (x-1)(x-a)^2 - b(x-1) = 0.$$

в) Если $a=0$, то корнем уравнения будет любое число, кроме

$$x = -b^2 \quad \text{и} \quad x = 1 - b^2.$$

Теперь сокращаем на a^2 и преобразовываем уравнение к виду

$$x^2 + 2(b^2 - a^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0 \quad \text{или} \quad (x + b^2 - a^2)^2 = 0,$$

откуда $x = a^2 - b^2$.

$$г) \text{ Домножение на } \frac{x^2 - b^2}{x^2 - a^2} \text{ дает уравнение } t + \frac{1}{t} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \text{ где } t = \frac{(x+a)(x-b)}{(x-a)(x+b)},$$

откуда $t = \frac{a}{b}$ или $t = \frac{b}{a}$, и т.д.

$$д) \dots \Leftrightarrow 3abc - 3cx + \frac{xb}{a} \left(\frac{(2a+b)b}{(a+b)^2} - 1 \right) + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3abc - 3cx + \frac{xb}{a} \left(-\frac{a^2}{(a+b)^2} \right) + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3abc - x \left(3c + \frac{ab}{(a+b)^2} \right) + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3abc(a+b)^2 + a^2b^2 = x(3c(a+b)^2 + ab),$$

откуда $x = ab$, если $3c(a+b)^2 + ab \neq 0$.

е) После упрощений получаем $2x^2 - 3ax + a^2 = 0$, откуда $x_1 = a$, $x_2 = a/2$. Первый корень посторонний. Второй является корнем уравнения при всех $a \neq 0$.

Р 32. Поскольку $ax+b = Ax+B$ при всех x тогда и только тогда, когда $a=A$, $b=B$ (см. § 24), требование задачи равносильно системе

$$\begin{cases} a^4 = 4, \\ a^2 + (2 + \sqrt{2})a + 2\sqrt{2} = a^2(a + \sqrt{2}). \end{cases}$$

Р 33. Случай $a=0$ сразу отбрасываем. Условие $D > 0$ дает $a < 1$. Условие $|x_2 - x_1| > 1$ приводит к неравенству $\sqrt{D}/a > 1$ или $2\sqrt{1-a} > |a|$. Возводя в квадрат, находим

$$-2 - 2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2} - 2.$$

Р 34. Заменим $x - 1 = t$; тогда оба корня t_1 и t_2 полученного уравнения

$$(a-1)t^2 - 3t + 4a = 0$$

должны быть положительными. Условия $t_1 + t_2 > 0$ и $t_1 t_2 > 0$ после применения теоремы Виета дают $a > 1$. Положительность дискриминанта приводит к неравенству

$$\frac{2 - \sqrt{13}}{4} < a < \frac{2 + \sqrt{13}}{4}.$$

Таким образом,

$$1 < a < \frac{2 + \sqrt{13}}{4}.$$

Р 35. При $a = 1$ имеем $x = -2$ — требование не выполнено. «Плохой» дискриминант $D = (a^2 - 2a)^2 - 8(a - 1)$ принуждает думать. И становится видно, что если $a > 1$, то уравнение не может иметь положительных корней. А при $a < 1$ дискриминант положителен. И тогда надо потребовать:

$$y(0) < 0, \quad y(2) < 0, \quad 0 < -\frac{a^2 - 2a + 2}{2(a - 1)} < 2$$

(абсцисса вершины); здесь $y = (a-1)x^2 + (a^2 - 2a + 2)x + a + 1$. Первые два неравенства дают $a < -1$. Левая половинка двойного неравенства выполнена, так как $a - 1 < 0$, $a^2 - 2a + 2 > 0$; правая равносильна неравенству $-a^2 + 2a - 2 > 4a - 4$, откуда

$$-\sqrt{3} - 1 < a < \sqrt{3} - 1.$$

Р 36. Поскольку

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = a(a^2 - 3a - 3),$$

исследуем функцию $y = a^3 - 3a^2 - 3a$. Ее производная $y' = 3a^2 - 6a - 3$ обращается в нуль при $a = 1 \pm \sqrt{2}$; нас интересует только $a = 1 + \sqrt{2}$ (точка минимума). Неотрицательность дискриминанта исходного уравнения дает $a \geq 2 + 2\sqrt{2}$. Найденное значение $a = 1 + \sqrt{2}$ этому условию не удовлетворяет. Поскольку при $a \geq 2 + 2\sqrt{2}$ имеем $y' > 0$, при данных значениях а функция $y = a^3 - 3a^2 - 3a$ возрастает, т.е. минимальное значение достигается в граничной точке — при $a = 2 + 2\sqrt{2}$.

Р 37. Условие задачи равносильно требованиям:

$$y(0) < 0, \quad y(\pm 4) > 0, \quad \text{где } y = x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1.$$

Р 38. При $a = -1$ находим $x = -1$ и условие выполнено. При $a \neq -1$ из теоремы Виета следует, что число $2/(a+1)$ должно быть целым, т.е. $a = (2-n)/n$. Дискриминант

$$D = 21a^2 + 30a + 13 = \frac{4(n^2 - 6n + 21)}{n^2},$$

откуда $n^2 - 6n + 21 = m^2$ или $(m - n + 3)(m + n - 3) = 12$. Разбирая все возможности представления 12 в виде произведения целых чисел и решая соответствующие системы, находим в итоге: $m = 4$, $n = 5$ и тогда $a = -3/5$; $m = 4$, $n = 1$ и тогда $a = 1$.

Р 39. Сумма коэффициентов любого многочлена $f(x)$ равна $f(1)$. В данном случае $f(1) = (a-7)^{18}$, свободный член равен 7^{18} . Отношение $(a-7)^{18}/7^{18}$ минимально при $a = 7$ (т.е. равно 0, а меньше некуда).

Р 40. Перепишем уравнения так:

$$x^3 - 5x^2 - a^2x + a + 4 = 0 \quad \text{и} \quad 2(x^3 - 5x^2 - a^2x + a + 4) - ax^2 + a^2x + ax - a^2 = 0.$$

Если уравнения имеют общий корень, то их можно рассматривать одновременно, поэтому из первого равенства следует и равенство

$$-ax^2 + a^2x + ax - a^2 = 0,$$

откуда $a^2(x-1) = ax(x-1)$. При $a = 0$ уравнения совпадают и имеют общий корень $x = 1$. При $x = 1$ из первого уравнения находим $a = 1$ — еще одно значение, при котором есть общий корень ($x = 1$). При $a = x$ получаем $5a^2 - a - 4 = 0$, откуда $a = -4/5$ (и еще раз $a = 1$). Нетрудно убедиться, что в этом случае $x = -4/5$ — общий корень. В остальных случаях уравнения общих корней не имеют.

Р 41. $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) = a \Rightarrow (x^2+2x-3)(x^2+2x-8) = a,$
 $t(t-5) - a = 0.$

Это уравнение имеет решения, если $D = 25 + 4a \geq 0$, т.е. $a \geq -25/4$.

Остается проверить, что при этих значениях разрешимо уравнение

$$x^2 + 2x - 3 = t, \quad \text{где} \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4a}}{2}.$$

Это верно, поскольку из $x^2 + 2x - 3 = t$ следует

$$(x+1)^2 = t+4 = \frac{13 \pm \sqrt{25 + 4a}}{2}$$

и выражение в правой части хотя бы в одном случае (плюс перед корнем) положительно.

Р 42. Заметим, что уравнение будет квадратным относительно a , поэтому перепишем его в виде $a^2 + 2a(1-x^2) + x^4 - 6x^2 + 4x = 0$ и найдем $a = x^2 + 2x - 2$ или $a = x^2 - 2x$. Имеем два уравнения $x^2 + 2x - a - 2 = 0$ (1) и $x^2 - 2x - a = 0$. (2) Условие задачи выполнено, если: одно уравнение имеет 1 корень, а другое два; оба уравнения имеют по два корня, но один из них общий.

Первая возможность означает: $D_1 > 0$, $D_2 = 0$ (откуда $a = -1$) или $D_1 = 0$, $D_2 > 0$ (эти условия несовместимы). Вторая возможность — общий корень — реализуется при $a = -3/4$ (общий корень $x = 1/2$ находим вычитанием уравнения (1) из уравнения (2) и определяем a непосредственной подстановкой).

Р 43. Пусть t, tq, tq^2 — корни; тогда по теореме Виста их произведение равно 64, откуда $tq = 4$. Подставив $x = 4$ в уравнение, найдем $a_1 = 0$, $a_2 = 7$. Первое значение не годится, поскольку найденный корень $x = 4$ оказывается единственным. При $a = 7$ приходим к уравнению

$$x^3 - 14x^2 + 56x - 64,$$

корни которого 2, 4, 8.

Р 44. Если $x = 0$, то $2a^2 - a - 3 = 0$, откуда $a_1 = -1$, $a_2 = 3/2$. В первом случае имеем

$$x^4 - 5x^2(x+1) = 0,$$

откуда $x^2 - 5x - 5 = 0$; оба корня этого уравнения не лежат в указанном отрезке. Во втором случае уравнение не имеет корней, отличных от $x = 0$.

Если $x \neq 0$ решаем уравнение как квадратное относительно $t = x^2/(x+1)$, (деление на $(x+1)^2$ законно, так как $x = -1$ — не корень уравнения), причем $t \in [-9/2; 0]$.

Поскольку $x^2 - tx - t = 0$, требуем $D = t^2 + 4t \geq 0$, что дает уточнение: $t \in [-9/2; -4]$. Решая уравнение

$$t^2 + (3a - 2)t + 2a^2 - a - 3 = 0,$$

находим

$$t_{1,2} = \frac{2a - 3 \pm |a - 4|}{2}$$

и требуя выполнения условия $t \in [-9/2; -4]$, получаем $a \in [3; 7/2]$.

Р 45. После отделения корня $x = 0$ получаем уравнение $25y^2 + 25(a-1)y - 4(a-7) = 0$, где $y = x^2$. Оно имеет два положительных корня, если

$$\begin{cases} a - 7 < 0, \\ a - 1 < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Корни $-x_2, -x_1, 0, x_1, x_2$ образуют арифметическую прогрессию, если $2x_1 = x_2$, т.е. $y_2 = 4y_1$. Но

$$y_1 + y_2 = 1 - a, \quad y_1 y_2 = -\frac{4(a-7)}{25}.$$

Исключая y_1 и y_2 , получаем уравнение $(1-a)^2 = 7-a$, из которого $a_1 = -2, a_2 = 3$. Второе значение не удовлетворяет системе, написанной выше.

Р 46. Перепишем уравнение так:

$$(x^3 + ax + x)(x^2 + ax + x + a) = a^2$$

и заменим $t = x^2 + ax + x$. Тогда $t^2 + at - a^2 = 0$ (1). Если $a = 0$, то $t = 0$ и уравнение имеет два корня $x = 0$ и $x = -1$.

Уравнение $t = x^2 + ax + x$ или $x^2 + (a+1)x - t = 0$ имеет два корня в двух случаях: 1) если $t > 0$; 2) если $t < 0$, но $(a+1)^2 + 4t > 0$. (2)

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) имеет корни

$$t_1 = -\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}, \quad t_2 = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2},$$

один из которых заведомо положителен. Значит, отрицательный надо проверить на условие (2).

Если $a > 0$, то $t_1 < 0$ и для нахождения a имеем неравенство

$$(a+1)^2 - 2a(\sqrt{5}+1) > 0 \quad \text{или} \quad a^2 - 2a\sqrt{5} + 1 > 0,$$

откуда $0 < a < \sqrt{5} - 2$ или $a > \sqrt{5} + 2$.

Если $a < 0$, то $t_2 < 0$ и имеем $(a+1)^2 - 2a(\sqrt{5}-1) > 0$, откуда

$$a < -\sqrt{5} - 2 \quad \text{или} \quad 2 - \sqrt{5} < a < 0.$$

Р 47. Многочлен $x^3 - (a+1)x^2 + 3ax + a^2 - 3a - 2$ должен делиться на $x^2 - ax + 2a$ без остатка, т.е. должно выполняться равенство

$$x^3 - (a+1)x^2 + 3ax + a^2 - 3a - 2 = (x - x_0)(x^2 - ax + 2a),$$

что после раскрытия скобок приводит нас к двум равенствам:

$$-2ax_0 = -3a - 2 \quad \text{и} \quad -a - x_0 = -a - 1,$$

из которых находим $x_0 = 1, a = -2$.

Р 48. Пусть $x^2 + 2(a+1)x + a^2 + 2a = (x+a+1)^2 - 1 = y \geq -1$. Дискриминант уравнения

$$y^2 + (a+5)y - a^2 - 7a - 10 = 0 \quad (1)$$

равен $D = (a+5)(5a+13)$.

Пусть $D = 0$. Если $a = -5$, то $y = 0$ и $(x-4)^2 = 1$, т.е. при данном значении параметра уравнение имеет два корня. Если $a = -13/5$, получаем $y = -6/5$ и данное значение параметра не годится.

Пусть теперь $D > 0$. Исходное уравнение имеет одно решение, если корни уравнения (1) таковы: $y_1 = -1$, $y_2 < -1$. Первое условие дает $a^2 + 8a + 14 = 0$, откуда $a = -4 \pm \sqrt{2}$.

Поскольку $y_1 + y_2 < -2$, из теоремы Виета следует, что $-(a+5) < -2$, т.е. $a > -3$. Значит, $a = -4 - \sqrt{2}$ надо отбросить. При $a = -4 + \sqrt{2}$ уравнение (1) имеет корни $y_1 = -1$ и $y_2 = -\sqrt{2}$, что и требуется для единственности корней исходного уравнения.

Исходное уравнение будет иметь два решения, если $y_1 > -1$, $y_2 < -1$ при $D > 0$. Для этого достаточно потребовать, чтобы при $y = -1$ трехчлен был отрицателен, т.е.

$$1 - a - 5 - a^2 - 7a - 10 < 0,$$

откуда $a < -4 - \sqrt{2}$ или $a > -4 + \sqrt{2}$.

Р 49. Найти корень можно только одним путем (наверное) — угадать его. Подстановкой убеждаемся, что $x = -1$. Если

$$p(x) = (x^2 + mx + n)^2, \quad (*)$$

то, поскольку $p(-1) = 0$, получаем $1 - m + n = 0$ или $n = m - 1$. Теперь раскрываем скобки в правой части (*) и приравниваем полученное выражение к $p(x)$. Коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны, что дает нам систему уравнений

$$\begin{cases} 2m = b + 2, \\ m^2 + 2n = a + 2b, \\ 2mn = 3a + b - 4, \\ n^2 = 2a - 3. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2m = b + 2, \\ m^2 + 2m = a + 2b + 2, \\ 2m^2 - 2m = 3a + b - 4, \\ m^2 - 2m = 2a - 4. \end{cases}$$

с учетом условия $n = m - 1$. Вычитая из третьего уравнения четвертое, получаем $m^2 = a + b$. Тогда $2m = b - a + 4$ (четвертое уравнение). Подставив эти выражения во второе уравнение, найдем $a = 2$. Теперь $m^2 = b + 2$, $2m = b + 2$, откуда

$$b + 2 = \left(\frac{b+2}{2}\right)^2.$$

Это дает $b = \pm 2$.

Р 50. Сложив уравнения, получим $33x^4 + 66x^3 + (21 - 16a)x^2 - (2a + 3)x = 0$ или, поскольку $x = 0$ не является корнем ни одного из уравнений,

$$33x^3 + 66x^2 + (21 - 16a)x - 2a - 3 = 0. \quad (1)$$

Теперь вычтем из первого уравнения удвоенное второе, мы получим

$$-33x^3 - (16a + 42)x^2 + (4a - 3)x + 6 = 0. \quad (2)$$

Наконец, сложим уравнения (1) и (2). Это даст $(24 - 16a)x^2 + (18 - 12a)x + 3 - 2a = 0$ или $(3 - 2a)(8x^2 + 6x + 1) = 0$.

Если $a = 3/2$, то исходные уравнения принимают вид

$$22x^4 + 33x^3 - 24x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad 11x^4 + 33x^3 + 21x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Вычитая, получаем $11x^4 - 45x^2 + 4 = 0$. Это уравнение имеет корни

$$x = \pm 2 \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Подстановка показывает, что корень $x = 2$ посторонний.

Если $a \neq 3/2$, то $8x^2 + 6x + 1 = 0$, откуда $x = -1/2$ или $x = -1/4$. Это общие корни исходных уравнений. Подставляя их, найдем значения параметра, соответствующие каждому, а именно $a = 3/16$ и $a = 297/128$.

Кунсткамера

Р 1. Как и следовало ждать, задача устрашает только на первый взгляд, ибо многоэтажная дробь в левой части равна

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3x+3}{3x+2}}} = \frac{1}{1 + \frac{3x+2}{3x+3}} = \frac{3x+3}{6x+5}$$

и уравнение имеет вид

$$\frac{3x+3}{6x+5} + \frac{3-2x}{6x-5} = \frac{3x^2 + 11x + 10}{36x^2 - 25},$$

откуда

$$(3x+3)(6x-5) + (3-2x)(6x+5) = 3x^2 + 11x + 10 \quad \text{или} \quad 3x^2 = 10.$$

Р 2. Пусть для начала $x - 1 = t$; тогда уравнение преобразуется к виду

$$(t^2 - 3)^2 + (t + 1)^2 = 7 \quad \text{или} \quad (t^2 - 3)^2 = 6 - 2t - t^2.$$

Заменим теперь $t^2 - 3 = u$ и запишем систему

$$\begin{cases} t^2 = u + 3, \\ u^2 = 3 - 2t - u, \end{cases}$$

вычитая из первого уравнения которой второе, получим $t^2 - u^2 = 2(u + t)$, откуда

$$\begin{cases} t + u = 0, \\ t - u = 2. \end{cases}$$

Это дает нам два уравнения: $x^2 - x - 3 = 0$ и $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Справедливости ради заметим, что, аккуратно раскрыв скобки в исходном уравнении, получим уравнение $x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 3 = 0$, решаемое методом Феррари: значение вспомогательного параметра $a = -1$ позволяет прийти к $(x^2 - 2x - 1)^2 = (x - 2)^2$. Однако метод Феррари и вступительный экзамен...

Р 3. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x . Имеем

$$(3y + 1)^2 x^2 + (3y + 1)(3y + 5)x + 2y^2 + 7y + 6 = 0.$$

Вычисляем дискриминант $D = (3y + 1)^2(y + 1)^2$ и находим корни:

$$x_1 = -\frac{6y^2 + 11y + 3}{(3y + 1)^2} = -\frac{2y + 3}{3y + 1}, \quad x_2 = -\frac{3y^2 + 7y + 2}{(3y + 1)^2} = -\frac{y + 2}{3y + 1}.$$

Таким образом, целым должно быть хотя бы одно из чисел

$$\frac{2y+3}{3y+1} \quad \text{и} \quad \frac{y+2}{3y+1}.$$

Для того чтобы число $(2y+3)/(3y+1)$ было целым (отличным от 0), нужно, чтобы, как минимум, выполнялось условие

$$|2y+3| \geq |3y+1|.$$

Этому неравенству удовлетворяют только три целых значения y : 0, 1 и 2. Они дают нам два решения исходного уравнения: $(-3; 0)$ и $(-1; 2)$. Аналогичное неравенство для дроби $(y+2)/(3y+1)$ выполнено только при $y = 0$, откуда получается еще одно решение: $(-2; 0)$.

Ответы

0. а) $-1/2008$; 1. б) $1/4$; 4; 1. а) -1 ; 2. б) $-2/3$; 2. а) ± 3 ; б) -3 ; 2; $(5 \pm \sqrt{33})/2$;
 3. $(\sqrt{2} \pm \sqrt{\sqrt{4}-1})/2$; 4. а) -5 ; 3. б) $-4 \pm \sqrt{10}$; в) $(-5 \pm \sqrt{21})/6$; 5. а) 0;
 $\pm \sqrt{14/5}$; б) $-16/7$; $(-15 \pm \sqrt{57})/6$; в) $-2 \pm \sqrt{2}$; 6. а) -10 ; 5. б) $-1/11$; 7. $-4/3$; 2;
 $(1 \pm \sqrt{5})/2$; $(1 \pm \sqrt{57})/4$; 8. $(9 \pm \sqrt{13})/2$; $(9 \pm \sqrt{5})/2$; 9. $1 \pm \sqrt{7}$; 10. а) $2 \pm \sqrt{2}$;
 $(-1 \pm \sqrt{13})/2$; б) $1/3$; $1/2$; 3. в) $(1 \pm \sqrt{37})/6$; 11. $(11 \pm \sqrt{77})/2$; $(1 \pm \sqrt{17})/2$;
 12. а) $(-1 \pm \sqrt{5})/2$; $(1 \pm \sqrt{17})/4$; б) $-2 \pm \sqrt{2}$; в) $1/2$; 2; 13. а) -1 ; $-1/3$; $1/2$; $2/3$.
 б) $1 \pm \sqrt{1/2}$; 14. $1/2$; 2; 15. 1; 2; 16. а) $x = -1/(\sqrt[3]{5}+1)$; б) $x = 1/(1-\sqrt[3]{4})$;
 17. а) $\sqrt{2}$; $(1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}})/2$; б) $(-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{3}})/2$; $(1 \pm \sqrt{4\sqrt{3}-3})/2$;
 18. $2 \pm \sqrt{6}$; $1 \pm \sqrt{5}$; 19. а) $\emptyset$; б) -1 ; 20. а) 0; б) ± 1 ; 21. а) $x = \pm 1$,
 $y = \pm \sqrt{3/2}$ (все комбинации знаков); б) $(1; 1)$, $(-1; -1)$; в) $(-2; 3)$; 22. 1;
 23. а) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$; б) $(1 \pm \sqrt{13})/2$; 24. а) 52; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$;
 27. Один корень; 28. $x = \sqrt[5]{(-1+\sqrt{D})/2} + \sqrt[5]{(-1-\sqrt{D})/2}$, где $D = 3121/3125$;
 29. $(x-2y)^2(y-2x)^2$; 30. 2; 31. а) -1 ; а) $2a$; б) Если $b < 0$, то $x = 1$; если
 $b \geq 0$, то $x = 1$, $x = a \pm \sqrt{b}$; в) Если $a = 0$, то $x \neq -b^2$, $x \neq 1-b^2$; если $a \neq 0$, то
 $x = a^2 - b^2$; г) $x_{1,2} = (-a-b \pm \sqrt{a^2+b^2+6ab})/2$, $x_{3,4} = (a+b \pm \sqrt{a^2+b^2+6ab})/2$,
 если $a^2+b^2+6ab \geq 0$; д) $x = ab$, если $3c(a+b)^2+ab \neq 0$; е) Если $a \neq 0$, то $x = a/2$;
 если $a = 0$, то решений нет; 32. $-\sqrt{2}$; 33. $-2-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}-2$, $a \neq 0$;
 34. $1 < a < (2+\sqrt{13})/4$; 35. $-\sqrt{3}-1 < a < -1$; 36. $2+2\sqrt{2}$;
 37. $-9/10 < a < -1/2$; 38. ± 1 ; $-3/5$; 39. 7; 40. $a \neq 0$; $a \neq 1$; $a \neq -4/5$;
 41. $a \geq -25/4$; 42. -1 ; $-3/4$; 43. $a = 7$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$; 44. $3/2$;
 $[3; 7/2]$; 45. -2 ; 46. $a < -\sqrt{5}-2$, $2-\sqrt{5} < a < 0$, $0 < a < \sqrt{5}-2$, $a > \sqrt{5}+2$;
 47. -2 ; 48. 1) $a = -4 + \sqrt{2}$; 2) $a = -5$, $a < -4 - \sqrt{2}$, $a > -4 + \sqrt{2}$;
 49. $x = -1$; $a = 2$, $b = \pm 2$; 50. При $a = 3/2$ три общих корня $x = \pm 1/\sqrt{11}$
 и $x = -2$; при $a = 3/16$ один общий корень $x = -1/2$; при $a = 297/128$ один общий
 корень $x = -1/4$.

Кунсткамера

1. $\pm \sqrt{10/3}$; 2. $(1 \pm \sqrt{13})/2$; $(3 \pm \sqrt{5})/2$; 3. $(-3; 0)$, $(-1; 2)$, $(-2; 0)$.

§ 5. Иррациональные уравнения

Первая неприятность, подстерегающая нас при решении иррациональных уравнений — *необходимость делать проверку*. Нет, мы не можем передоверить эту операцию другой инстанции: «конфидент не поймёт, не бери конфидента». И проверка вовсе не всегда состоит в непосредственной подстановке числа в уравнение: как правило, достаточно сравнить с нулем какое-либо числовое выражение.

Большинство иррациональных уравнений приводится к простейшему уравнению вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x),$$

которое решается возведением в квадрат; надо, однако, учитывать, что при этом уравнение следует заменить равносильной ему смешанной системой

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

а для проверки достаточно посмотреть, удовлетворяют ли корни её уравнения неравенству. Часто к двум указанным условиям добавляют неравенство $f(x) \geq 0$ (ОДЗ), но в этом нет необходимости, поскольку уравнению

$$f(x) = g^2(x)$$

не могут удовлетворять такие значения x , для которых $f(x) < 0$.

Здесь уместно вспомнить прекрасное, восходящее к Гегелю, выражение о развитии по спирали. Оно означает, что мы часто в начале нового параграфа как будто забываем всё, что умели в предыдущих, и начинаем восхождение заново. В § 3 мы выполняли головокружительные действия с радикалами и вдруг — снова возвращаемся к элементарному. Так? Нет, не так. Поднимемся-то мы заведомо выше, вера в Гегеля спасет нас.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{5x^2 - 1} = 3x - 2.$$

$$\leftarrow 5x^2 - 1 = (3x - 2)^2 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2, \quad x_2 = 5/2.$$

Проверка: условию

$$3x - 2 \geq 0$$

удовлетворяет только $x_2 = 5/2$. ►

🔍 **Ответ:** $5/2$.

Конечно, в этом уравнении проверку можно осуществить и непосредственно — подстановкой. Однако следующий пример заставляет если не разрушить стереотип, состоящий в том, что *надо искать ОДЗ*, то, по крайней мере, ограничить его. Иногда ОДЗ только мешает.

2. Решить уравнение $\sqrt{6x^3 - 6x^2 - 13x - 4} = 3x + 1$.

◀ После возведения в квадрат и приведения подобных получаем уравнение $6x^3 - 15x^2 - 19x - 5 = 0$. Целых корней у него нет, но есть дробный $x_1 = -1/2$. После деления на $2x + 1$ и решения уравнения $3x^2 - 9x - 5 = 0$ найдем

$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{141}}{6}, \quad x_3 = \frac{9 + \sqrt{141}}{6}.$$

Корни должны удовлетворять условию $3x + 1 \geq 0$, т. е. $x \geq -1/3$. Третий корень, очевидно, годится, а вот первые два нет:

$$x_1 < -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{141}}{6} < \frac{9 - \sqrt{121}}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Если бы мы стали искать ОДЗ, нам бы пришлось решать неравенство $6x^3 - 6x^2 - 13x - 4 \geq 0$, что затруднительно и, главное, совершенно не нужно. ▶

✎ **Ответ:** $(9 + \sqrt{141})/6$.

3. Решить уравнение $(x + 2)\sqrt{16x + 33} = (x + 2)(8x - 15)$.

◀ Как ни странно, находятся люди, которые думают, что от них при решении этого уравнения не ждут ничего другого, как сокращения на $x + 2$. Но сокращение на выражение, содержащее неизвестную величину, возможно только после того, как выяснено, может ли это выражение равняться нулю. Итак, имеем два случая:

- 1) $x + 2 = 0$;
- 2) $x + 2 \neq 0$.

В первом случае $x_1 = -2$, и это значение является корнем уравнения, поскольку при этом $16x + 33 = 1 \geq 0$ (т. е. корень принадлежит ОДЗ).

Во втором случае сокращение на $x + 2$ законно и мы приходим к уравнению

$$\sqrt{16x + 33} = 8x - 15.$$

Решая его, найдем еще один корень $x_2 = 3$. ▶

✎ **Ответ:** -2 ; 3 .

Иногда уравнение по внешнему виду кажется «сильно иррациональным» (много корней), однако при его решении эффективнее не возведение в квадрат, а что-то другое: замена переменной или домножение на сопряженное.

4. Решить уравнение $\sqrt{4 - x} = \sqrt{2} + 2 - x$.

◀ Чаще всего при решении иррациональных уравнений используется замена на новую переменную того или иного радикала (хотя бы потому, что при этом уменьшается их количество). Пусть $\sqrt{4-x} = y$; при этом $y \geq 0$. Тогда

$$4-x=y^2, \quad x=4-y^2,$$

и уравнение принимает вид:

$$y^2 - y - 2 + \sqrt{2} = 0 \quad \text{или} \quad y^2 - 2 = y - \sqrt{2},$$

т.е.

$$(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) = y - \sqrt{2},$$

откуда $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = 1 - \sqrt{2}$. Второй корень не годится, так как $y \geq 0$.
Окончательный ответ: $x = 2$. ▶

🔍 **Ответ:** $x = 2$.

5. Решить уравнение $\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x-1} = \sqrt{5-x}$.

◀ И здесь не станем сразу возводить в квадрат (не потому, что этот способ не ведет к цели, — ведет; а потому, что есть к цели и другие пути: «Избегай торных дорог, ходи тропинками», — гласит один из принципов пифагорейской жизни), но прежде всего перепишем уравнение так:

$$\sqrt{5-x} - \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-1}.$$

Домножим обе части равенства на выражение, сопряженное левой части. Мы получим уравнение

$$2 - 2x = 2\sqrt{x-1} \cdot (\sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}) \quad \text{или}$$

$$1 - x = \sqrt{x-1} \cdot (\sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}).$$

ОДЗ уравнения требует выполнения неравенства $x-1 \geq 0$. Однако если $x-1 > 0$, то левая часть отрицательна, а правая положительна. Значит, корнем может быть только $x = 1$. ▶

🔍 **Ответ:** 1.

В «идейном» плане иррациональные уравнения не представляют большой загадки: ведь путём последовательного возведения в ту или иную степень практически любое иррациональное уравнение можно превратить в алгебраическое. Но стоит ли к этому стремиться? Нередко форма записи (или какая-то промежуточная фаза преобразований) может подсказать ключ к решению. Вот пять примеров.

6. Решить уравнение $2\sqrt{x-1} = x^2 + x + 1$.

◀ Кажется, всего одно возведение и получится уравнение, которое, может быть, удастся решить! Но не поддадимся соблазну: лучше заметим, что $2\sqrt{x-1}$ вполне сойдёт за «удвоенное произведение» $\sqrt{x-1}$ и 1, и попробуем выделить полный квадрат. Имеем:

$$(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1 = (x-1) + (x^2 + x + 1) + 1, \\ (\sqrt{x-1} + 1)^2 = (x+1)^2.$$

Получаем: 1) $\sqrt{x-1} = x$; 2) $\sqrt{x-1} + x + 2 = 0$.

Увы, ни 1), ни 2) решений не имеют, но это уже не наша вина. ▶

✎ **Ответ:** $\emptyset$.

7. Решить уравнение $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

◀ Повозившись с этим уравнением, в конце концов воскликнешь: «Ба, знакомые всё лица!» Какие? Смотрите:

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}, \\ 2((x+1) + (x^2 - x + 1)) = 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)};$$

т.е. приходим к однородному уравнению

$$2(u^2 + v^2) = 5uv, \quad \text{где } u = \sqrt{x+1}, \quad v = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Отсюда 1) $u = 2v$ или 2) $u = v/2$; дальнейшее предоставляем читателю. ▶

✎ **Ответ:** $x_{1,2} = (5 \pm \sqrt{37})/2$.

8. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} = \sqrt{(x+1)^3}$.

◀ Хотя и страшно вводить в квадрат, а деваться некуда; попробуем:

$$x + 2x\sqrt{x+2} + x(x+2) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Уединяя радикал и приводя подобные, получим

$$2x\sqrt{x+2} = x^2(x+2) + 1,$$

и, не пройдя мимо намёка, заменим $x\sqrt{x+2} = y$. Теперь всё просто:

$$y^2 - 2y + 1 = 0, \quad y = 1.$$

Уравнение $x^2(x+2) = 1$ или $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$, конечно, кубическое, но у него есть целый корень $x_1 = -1$ (посторонний). После деления на $x + 1$ приходим к уравнению $x^2 + x - 1 = 0$, откуда

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Меньший из этих корней отрицателен (а по смыслу исходного уравнения $x \geq 0$), поэтому окончательно

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

☛ **Ответ:** $(\sqrt{5} - 1)/2$.

9. Решить уравнение $\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1}$.

◀ «Если пытаться освободить уравнение от радикалов возведением его в квадрат, то страшно подумать о том, какая получится степень уравнения после того, как все радикалы исчезнут!» (М. И. Сканави.) Поэтому сделаем «рентген» и посмотрим, что у этих корней внутри, т. е. разложим все трёхчлены на множители. Мы получим

$$\sqrt{(4x+5)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+1)} = \sqrt{(2x-1)(x+1)}.$$

Картина ясна: если $x + 1 = 0$, то $x = -1$ — корень уравнения. Теперь осторожно: конечно, хочется сократить на $\sqrt{x+1} \neq 0$ и получить уравнение

$$\sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}.$$

Но законно ли это? Ведь мы даже не поинтересовались, какова ОДЗ? Наверстаем упущенное. ОДЗ определяется неравенствами

$$4x^2 + 9x + 5 \geq 0, \quad x^2 - 1 \geq 0, \quad 2x^2 + x - 1 \geq 0.$$

Совместное их выполнение возможно в трех случаях: 1) $x \leq -5/4$; 2) $x = -1$; 3) $x \geq 1$ (в этом месте хорошо бы сделать экскурс в тему «системы неравенств», но мы отвлекаться не будем). Кроме того, нелишне заметить, что должно быть выполнено условие

$$4x^2 + 9x + 5 \geq x^2 - 1.$$

Это неравенство вносит окончательные коррективы: 1) $x \leq -2$; 2) $x = -1$; 3) $x \geq 1$.

Со вторым случаем мы разобрались. В третьем мы действительно имеем право перейти к уравнению

$$\sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}. \quad (*)$$

Решим его. При этом снова постараемся избежать двукратного возведения в квадрат. Домножая обе части на сопряженное левой, получаем

$$3x + 6 = \sqrt{2x+1}(\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}) \quad \text{или} \quad \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = \frac{3x+6}{\sqrt{2x-1}}.$$

Сложение этого соотношения с исходным уравнением даст

$$2\sqrt{4x+5} = \sqrt{2x-1} + \frac{3x+6}{\sqrt{2x-1}} \quad \text{или} \quad 2\sqrt{4x+5} = \frac{5x+5}{\sqrt{2x-1}},$$

т. е.

$$2\sqrt{(4x+5)(2x-1)} = 5x+5.$$

Вот теперь можно, наконец, возвести в квадрат (у читателя руки давно чешутся).

Получим квадратное уравнение $7x^2 - 26x - 45 = 0$, корни которого $x_1 = -9/7$, $x_2 = 5$. Первый корень посторонний, поскольку не удовлетворяет условию $x \geq 1$.

Но не забудем еще про случай $x \leq -2$, в котором невозможен переход к уравнению (*), поскольку подкоренные выражения оказываются отрицательными. Что же делать? Весь труд напрасен?

Нет и нет. Легко понять, что в этом случае мы вместо уравнения (*) имеем уравнение-двойник

$$\sqrt{-4x-5} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x},$$

которое решается аналогично и имеет те же корни. И снова корень $x = -9/7$ оказывается лишним, на этот раз он не удовлетворяет уже условию $x \leq -2$. ►

 **Ответ:** $-1; 5$.

10. Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 2x + 1$.

◀ И здесь «рентген» позволяет увидеть, что

$$(x^2 + 5x + 3) - (x^2 + 3x + 2) = 2x + 1,$$

поэтому уравнение символически представляется в виде $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, а поскольку $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, мы имеем два варианта:

$$1) \sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 0;$$

$$2) \sqrt{x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 1.$$

Первое уравнение дает $x_1 = -1/2$, являющийся корнем исходного уравнения.

Для решения второго снова используем тот же прием — домножение на сопряженное. Имеем

$$2x + 1 = \sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 2},$$

откуда $2\sqrt{x^2 + 5x + 3} = 2x + 2$. Решая это уравнение, найдем $x_2 = -2/3$. И этот корень подходит. ►

☛ **Ответ:** $-2/3; -1/2$.

Замена переменной предпочтительна в уравнениях, содержащих радикалы разной степени.

11. Решить уравнение $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$.

◀ Заменим кубический радикал (а не квадратный), тогда придётся возводить всего лишь в квадрат (а не в куб).

$$\sqrt[3]{24+x}=y \Rightarrow x=y^3-24 \Rightarrow y+\sqrt{36-y^3}=6 \Rightarrow y^3+y^2-12y=0.$$

Отсюда $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = 3$; соответственно $x_1 = -24$, $x_2 = 3$, $x_3 = -88$. Все корни подходят. ►

☛ **Ответ:** $-88; -24; 3$.

В следующем примере получит дальнейшее развитие идея, которая наметилась при решении примеров 10 и 11 — замена не одного, а большего количества радикалов. Этот метод называется так: «От уравнения — к системе!» Возведение в квадрат (а тем более в куб и т. д.) — действие громоздкое, и действия с радикалами почти всегда можно заменить преобразованием выражений без радикалов.

12. Решить уравнение $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$.

◀ Пусть $\sqrt{x+5} = y \Rightarrow x = y^2 - 5$ или $y^2 - x = 5$, а само уравнение имеет вид $x^2 + y = 5$. Отсюда

$$y^2 - x = x^2 + y \text{ или } y^2 - x^2 = x + y, \quad (y-x)(y+x) = y+x.$$

Уравнение распадается на два:

$$1) \quad x + y = 0 \text{ или } x + \sqrt{x+5} = 0;$$

$$2) \quad y - x = 1 \text{ или } \sqrt{x+5} = x + 1.$$

Решая каждое из них обычным методом, получим ответ:

$$\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \quad \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

☛ **Ответ:** $(1 - \sqrt{21})/2, (\sqrt{17} - 1)/2$.

При решении уравнений, содержащих корни более высокой степени, в частности уравнений вида

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)} \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{f(x)} + \sqrt[4]{g(x)} = a,$$

можно использовать формулы

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b), \quad (1)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2. \quad (2)$$

Формула (2) после замены $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ приводится к виду

$$(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4(a+b)^2ab - 2(ab)^2.$$

При этом надо везде сумму $a+b$ заменять на равное ей выражение в правой части уравнения.

13. Решить уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-4} = \sqrt[3]{4x+8}$.

◀ Возводя в куб по формуле (1) имеем:

$$x + 3x - 4 + 3\sqrt[3]{x(3x-4)(4x+8)} = 4x + 8 \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{x(3x-4)(4x+8)} = 4.$$

Снова возводя в куб, после упрощений получаем уравнение

$$3x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0,$$

имеющее целый корень $x = 2$. Деление на двучлен $x - 2$ приводит нас к уравнению $3x^2 + 8x + 8 = 0$, у которого корней нет. ►

🍷 **Ответ:** 2.

14. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$.

◀ В идеологическом плане это уравнение не содержит ничего нового по сравнению с предыдущим. Однако способ решения здесь можно предложить отличный от разобранного выше. Стоит даже процитировать журнал «Квант» (№ 7 за 1972 г. С. 63): «Один из самых красивых методов решения этого уравнения заключается в „угадывании“ корня $x = -2$. После этого докажете, что уравнение не имеет других корней, так как в левой части уравнения стоит строго возрастающая функция».

На этом, собственно, можно закончить. ►

🍷 **Ответ:** -2.

15. Решить уравнение $\sqrt[4]{x+3} + \sqrt[4]{94-x} = 5$.

◀ Применяем формулу (2) к $a = \sqrt[4]{x+3}$, $b = \sqrt[4]{94-x}$. Имеем:

$$97 + 100 \sqrt[4]{(x+3)(94-x)} - 2 \sqrt{(x+3)(94-x)} = 625.$$

Обозначив теперь

$$\sqrt[4]{(x+3)(94-x)} = y,$$

получаем квадратное уравнение

$$y^2 - 50y + 264 = 0,$$

корни которого $y_1 = 6$, $y_2 = 44$.

Осталось решить еще два квадратных уравнения:

$$1) (x+3)(94-x) = 6^4 \text{ и } 2) (x+3)(94-x) = 44^4.$$

Первое имеет корни $x_1 = 13$, $x_2 = 78$; у второго корней нет. Найденные значения удовлетворяют уравнению. ▶

● **Ответ:** 13; 78.

$$16. \text{ Решить уравнение } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{x+2}.$$

◀ В данном уравнении уже предпочтительнее переход к системе — это как бы рассредоточивает трудности... Прежде всего произведем «симметризацию», которая напрашивается, т. е. заменим $x+1 = t^4$; это даст нам уравнение

$$\sqrt[4]{t^4-1} + t = \sqrt[4]{t^4+1}.$$

Разделив обе части равенства на $t > 0$, получим

$$\sqrt[4]{1-\frac{1}{t^4}} + 1 = \sqrt[4]{1+\frac{1}{t^4}}.$$

Теперь можно заменить уравнение системой: для этого обозначим

$$\sqrt[4]{1-\frac{1}{t^4}} = u, \quad \sqrt[4]{1+\frac{1}{t^4}} = v.$$

Система такова:

$$\begin{cases} u+1=v, \\ v^4+u^4=2. \end{cases}$$

Исключая v , получим уравнение $u^4 + (u+1)^4 = 2$. И тут, мы знаем, помогает симметризация $z = u + 1/2$, сводящая последнее уравнение к биквадратному $2z^4 + 3z^2 - 15/8 = 0$. Нас интересуют только положительные корни; такой корень один:

$$z = \frac{\sqrt{2\sqrt{6}-3}}{2}; \quad \text{тогда} \quad u = \frac{\sqrt{2\sqrt{6}-3}-1}{2}.$$

Постепенно возвращаемся к первоначальным неизвестным:

$$1 - \frac{1}{t^4} = u^4 \Rightarrow t^4 = \frac{1}{1 - u^4};$$

отсюда

$$\begin{aligned} x = t^4 - 1 &= \frac{1}{1 - u^4} - 1 = \frac{16}{16 - (\sqrt{2\sqrt{6} - 3} - 1)^4} - 1 = \\ &= \frac{2}{15} \sqrt{27 + 12\sqrt{6}} - 1 \quad (\approx 0,001). \end{aligned}$$

☞ **Ответ:** $(2/15)\sqrt{27 + 12\sqrt{6}} - 1$.

17. Решить уравнение

$$(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} + (2x - 1)\sqrt{x^2 - x + 1} + 4x = 0.$$

◀ Выглядит уравнение страшновато, но это не значит, что нужны какие-то новые сильные методы. Переписав уравнение в виде

$$2x(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}) + (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) + 4x = 0,$$

нельзя не попробовать прием № 1 при работе с радикалами, т. е. домножение на сопряжённое. Однако не надо пересаливать — преобразуем только вторую скобку, и — тогда всё получится само собой:

$$2x(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}) + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} + 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1) \ x = 0;$$

$$2) \ y + \frac{1}{y} = -2, \quad \text{где } y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad y > 0.$$

Второе уравнение положительных решений не имеет. ▶

☞ **Ответ:** 0.

Иногда помощь может оказать и такая простая вещь, как формула разности квадратов, способная сделаться страшной силой (как мы видели на примере метода Феррари решения уравнений 4-й степени, который, собственно, и состоит в принудительном приведении уравнения к разности квадратов).

18. Решить уравнение $\sqrt{14x^2 + 12x + 3} = 10x^2 + 10x + 3$.

◀ Поскольку $10x^2 + 10x + 3 > 0$ при всех x (дискриминант трехчлена отрицателен), уравнение равносильно уравнению $14x^2 + 12x + 3 = (10x^2 + 10x + 3)^2$ или $10x^2 + 12x + 3 = (10x^2 + 10x + 3)^2 - 4x^2$. Раскладывая правую часть как разность квадратов, получаем

$$10x^2 + 12x + 3 = (10x^2 + 12x + 3)(10x^2 + 8x + 3).$$

Отсюда 1) $10x^2 + 12x + 3 = 0$; 2) $10x^2 + 8x + 2 = 0$.

Корни первого уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6}}{10},$$

у второго корней нет. Проверка не нужна. ▶

☛ **Ответ:** $(-6 \pm \sqrt{6})/10$.

При решении иррациональных уравнений нередко приходится оценивать левые и правые части уравнений, и на этом основании делать вывод о наличии или отсутствии корней.

19. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

◀ Перепишем:

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{3x^2 - 5x - 1} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Заметим, что обе части должны быть одного знака. Это очевидное соображение означает: либо одновременно

$$3x^2 - 7x + 3 \geq 3x^2 - 5x - 1 \quad \text{и} \quad x^2 - 2 \geq x^2 - 3x + 4;$$

либо наоборот. Первое неравенство дает нам $x \leq 2$, второе $x \geq 2$. «Наоборот» приводит к тем же двум неравенствам. Значит, корнем уравнения может быть только $x = 2$. Подстановка (обязательная!) показывает, что это значение подходит. ▶

☛ **Ответ:** 2.

Оценка частей уравнения может начинаться после того как корень каким-либо образом угадан (и это вполне законный, «красивый», говоря словами «Кванта», способ решения).

20. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = 2 - x$.

◀ Имеем: $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} + x = 2$; «легко видеть» (как любят писать авторы математических книг), что $x = 0$ — корень уравнения. Кроме того, отрицательных корней уравнение иметь не может (ОДЗ). Но если мы подставим любое число, большее 0, в левую часть равенства, то получим число, большее 2, поскольку $\sqrt{x} > 0$, $\sqrt{x+4} > \sqrt{4} = 2$, $x > 0$. Значит, корней, отличных от найденного, нет. ►

🔍 **Ответ:** 0.

За последние 40 лет практики вступительных экзаменов фантазия составителей проделала впечатляющий путь. Если когда-то сложным считалось уравнение примера 20 (нет другого способа найти корень, чем угадать его, а потом еще нужно доказывать, что других корней нет), то теперь могут предложить уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{3} + 1} + \sqrt{4x - 5} + \sqrt{\frac{4x}{\sqrt{3}}} + 11 = 6,$$

в котором бедный, бедный абитуриент *должен угадать* корень $x = 3 - \sqrt{3}$. Конечно, читатель возмущен. И напрасно. Наше дело — принять к сведению задачи, которые бывают на экзаменах, без злобы и пристрастия. Чему мы и учимся.

Вот ещё одно уравнение из категории: «а нет ли ошибки в условии?»

21. $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} + x\sqrt{x+1} + 5 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-5} + 2x$.

◀ Да, если такое уравнение найдешь в задачнике, то, порешав, полезешь в ответ: не опечатка ли? Что-то не выходит...

При решении мы, разумеется, пытаемся разложить на множители: другой идеи и предположить трудно (да её, наверное, и нет). Имеем:

$$\sqrt{(x+1)(2x-5)} + x\sqrt{x+1} + 5 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-5} + 2x,$$

$$\sqrt{x+1}(\sqrt{2x-5} + x) - 2(\sqrt{2x-5} + x) = 4\sqrt{x+1} - 5,$$

$$(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{2x-5} + x) = 4(\sqrt{x+1} - 2) + 3,$$

$$(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{2x-5} + x - 4) = 3.$$

Вот и всё. Дальше нужно снова угадать корень, а это $x = 6$, и доказать, что корней, отличных от найденного, нет. ►

🔍 **Ответ:** 6.

Как мы знаем, для обоснования единственности угаданного корня одно из лучших средств — ссылка на монотонность соответствующей функции.

22. Решить уравнение $(5x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 4\sqrt{2}$.

◀ Чтобы угадать корень, приравняем отдельно «рациональные» и «иррациональные» составляющие, т. е. потребуем одновременного выполнения равенств $5x - 1 = 4$ и $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2}$. Как ни странно, нужное значение x имеется — это $x = 1$. Теперь включаем монотонность: функция

$$f(x) = (5x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$$

является строго возрастающей как произведение двух возрастающих функций, значит уравнение $f(x) = 4\sqrt{2}$ не может иметь более одного решения. ►

🔑 **Ответ:** 1.

Нередко при решении иррациональных уравнений решающая роль принадлежит нахождению ОДЗ. Кажется, до сего момента она оставалась несколько в тени; это не случайно: функции, входящие в уравнения, которые мы решали, были еще достаточно простыми...

23. Решить уравнение $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4 - 5x} = x^2$.

◀ Область существования первого радикала определяется неравенством $2x - 3 \geq 0$, откуда $x \geq 3/2$. Аналогично второй радикал дает неравенство $4 - 5x \geq 0$ или $x \leq 4/5$. Но то и другое, как говорится, две вещи несовместные. Поэтому ОДЗ пуста, и уравнение решений не имеет. ►

🔑 **Ответ:** $\emptyset$.

24. Решить уравнение $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{2x^2 - 7x + 6} = 1$.

◀ Будем считать, что нам снова предоставляется возможность забросить удочку в тему «неравенства». Первый радикал имеет смысл, если $2x - 3 \geq 0$, т. е. при $x \geq 3/2$; второй — при $4 - x^2 \geq 0$, т. е. при $-2 \leq x \leq 2$. Оба условия вместе дают $x \in [3/2; 2]$. Осталось рассмотреть третий радикал: неравенство

$$2x^2 - 7x + 6 \geq 0 \quad \text{или} \quad (2x - 3)(x - 2) \geq 0$$

верно при $x \notin [3/2; 2]$.

Поскольку условия $x \in [3/2; 2]$ и $x \notin [3/2; 2]$ совместимы только при $x = 3/2$ и $x = 2$, ОДЗ состоит из этих двух значений. Непосредственная подстановка в уравнение показывает, что его корнем является $x = 2$. ►

☞ **Ответ:** 2.

Как видите, это уравнение нам, так сказать, вообще не пришлось «решать»: достаточно было проанализировать ОДЗ. Вот еще один характерный пример.

25. Решить уравнение

$$\sqrt{3x-4} + \sqrt{6x+1} + 2\sqrt{12x-7} + 3\sqrt{x^2+1} = 14.$$

◄ Условия существования первых трех радикалов (четвертый существует при всех x) дают нам $x \geq 4/3$. Это нестрогое неравенство означает: либо $x = 4/3$, либо $x > 4/3$. Подставив $x = 4/3$ в уравнение, убеждаемся, что получается верное равенство. Если же $x > 4/3$, то каждый корень больше того значения, которое он имеет при $x = 4/3$, и, значит, общая сумма больше 14. Таким образом, $x = 4/3$ — единственный корень уравнения. ►

☞ **Ответ:** 4/3.

Иногда приходится и оценивать обе части равенства, и активно использовать ОДЗ.

26. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{\frac{3-x}{2}} = \frac{x^2+9}{6x}.$$

◄ ОДЗ определяется условием $x \in [1; 3]$.

Большую помощь в разных задачах оказывает неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел (оно же *неравенство Коши*), а именно $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ или $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

Поскольку

$$\frac{x^2+9}{6x} = \frac{x}{6} + \frac{3}{2x},$$

согласно указанному неравенству имеем

$$\frac{x}{6} + \frac{3}{2x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{6} \cdot \frac{3}{2x}} = 1.$$

Значит, правая часть уравнения не меньше 1. Осталось заметить, что левая часть *не больше* 1. Действительно, она не больше первого корня $\sqrt{(x-1)/2}$, который принимает свое наибольшее значение 1 только в крайней точке ОДЗ — при $x = 3$.

Отсюда следует, что $(x^2 + 9)/6x = 1$, т. е. опять-таки $x = 3$. ►

☛ **Ответ:** 3.

27. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

◀ Область допустимых значений — отрезок $[2; 4]$ — симметрична относительно точки $x = 3$ и замена $x - 3 = y$ напрашивается. Уравнение приобретает вид

$$\sqrt{y+1} + \sqrt{1-y} = y^2 + 2,$$

и если вы еще не угадали корень, то теперь самое время заметить, что подходит $y = 0$ (и соответственно $x = 3$). Осталось установить единственность корня. То, что правая часть при $y \neq 0$ больше 2, достаточно ясно. Доказать, что левая часть, напротив, меньше 2, можно многими способами.

Первый способ (лобовая атака). Просто возведем неравенство

$$\sqrt{y+1} + \sqrt{1-y} < 2$$

(которое хотим доказать) в квадрат. Получим

$$y+1 + 2\sqrt{1-y^2} + 1-y < 4 \quad \text{или} \quad \sqrt{1-y^2} < 1.$$

Но это явно верно. Строгое доказательство получается, если провести выкладки в обратном порядке, т. е.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-y^2} < 1 &\Rightarrow 2\sqrt{1-y^2} < 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y+1 + 2\sqrt{1-y^2} + 1-y < 4 &\Rightarrow \sqrt{y+1} + \sqrt{1-y} < 2. \end{aligned}$$

(Похоже на возврат удаленного текста в Microsoft Word по команде «↶».)

Второй способ (культурный). В числе того, что должен знать каждый уважающий себя, имеется еще одно неравенство между средними — уже известным нам средним арифметическим $(a+b)/2$ и *средним квадратическим*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

а именно

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \quad (*)$$

(Числа a и b должны быть неотрицательны.)

Доказательство просто:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}.\end{aligned}$$

В данном случае неравенство (*) записывается так:

$$\frac{\sqrt{y+1} + \sqrt{1-y}}{2} \leq \sqrt{\frac{y+1+1-y}{2}} \quad \text{или} \quad \sqrt{y+1} + \sqrt{1-y} \leq 2,$$

что и требовалось.

Третий способ (аналитический). Рассмотрим функцию

$$f(y) = \sqrt{y+1} + \sqrt{1-y} \quad \text{при} \quad y \in [-1; 1].$$

Ее производная

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+1}} - \frac{1}{2\sqrt{1-y}}$$

равна 0, если $\sqrt{y+1} = \sqrt{1-y}$, т.е. при $y = 0$. Поскольку

$$f'(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} > 0, \quad \text{а} \quad f'(1/2) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0,$$

производная меняет знак при переходе через данную точку ($y = 0$) с плюса на минус, т.е. $y = 0$ — точка максимума, а сам максимум равен 2.

Теперь закроем тему. Ответ (не забудем, с чего начали): $x = 3$. ►

✎ **Ответ:** $x = 3$.

28. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$$

◀ И снова не убоимся ввести три буквы, чтобы представить уравнение в виде

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (**)$$

(где $a = x^2/(x-1)$, $b = \sqrt{x-1}$, $c = (\sqrt{x-1})/x^2$), причем $abc = 1$!

Поскольку тогда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = ab + bc + ac$$

и, кроме того, $a = 1/(bc)$, равенство (**) преобразуется к

$$\frac{1}{bc} + b + c = \frac{1}{c} + bc + \frac{1}{b},$$

откуда

$$b + c - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = bc - \frac{1}{bc} \quad \text{или} \quad (b+c)\left(1 - \frac{1}{bc}\right) = bc\left(1 - \frac{1}{bc}\right)\left(1 + \frac{1}{bc}\right).$$

Значит, либо 1) $1 - 1/(bc) = 0$, либо 2) $b + c = bc + 1$.

Из 1) $\Rightarrow x - 1 = x^2$; решений нет.

Из 2) $\Rightarrow c - 1 = b(c - 1)$, т.е. $(c - 1) \vee (b = 1)$.

Если $b = 1$, то $\sqrt{x-1} = 1$ и $x = 2$. Если $c = 1$, то $\sqrt{x-1} = x^2$ и неожиданно мы сталкиваемся с неприятностью, когда всё, казалось, уже сделано. Однако достаточно нарисовать графики левой и правой частей, чтобы стало ясно: решений последнее уравнение не имеет. (Это, конечно, недостаточно «строго», и чтобы отвести все придирки, надо добавить, например, цепочку неравенств $x^2 > \sqrt{x} > \sqrt{x-1}$, верных при $x \geq 1$.) ►

☛ **Ответ:** 2.

29. Решить уравнение $1 + 2\sqrt[3]{2x+1} = x^3$.

◀ Перепишем уравнение так:

$$\sqrt[3]{2x+1} = \frac{x^3 - 1}{2}$$

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{2x+1}$; тогда $x = (y^3 - 1)/2$. Значит, функции

$$y = \sqrt[3]{2x+1} \quad \text{и} \quad y = \frac{x^3 - 1}{2}$$

взаимно обратные. Поэтому наше уравнение выражает собой факт совпадения значений двух взаимно обратных и возрастающих функций.

Поскольку графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, равенство таких функций возможно только на указанной прямой, т.е. исходное уравнение можно переписать в равносильном виде $(x^3 - 1)/2 = x$. Это уравнение имеет корни

$$x_1 = -1, \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $-1, (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Цитируя авторитетное мнение, что «иррациональные уравнения довольно часто становятся камнем преткновения на вступительных экзаменах» (А. Егоров, Ж. Раббот, «Квант». № 5 за 2001 г.), хочется попытаться подвести какой-то итог, вывести некий наиболее действенный рецепт, касающийся иррациональных уравнений. И, наверное, на первое место следует поставить старый, как мир, метод замены, поскольку именно этим путем и *составляются* самые заковыристые уравнения. Но и оценки ОДЗ, и монотонность, и разложение на множители тоже могут нас спасти в трудную минуту. Раздел оканчивается соответствующими примерами из вступительной практики последних лет.

30. Решить уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{(x+2)^3}$.

◀ Поскольку уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(x+3)} = \sqrt{(x+2)^3},$$

замена $x+2=y$ оправдана стремлением к симметризации. Имеем тогда

$$\sqrt{y-1} + \sqrt{y^2-1} = \sqrt{y^3}.$$

Побродив вокруг да около, осторожно возведем в квадрат; после упрощений получим

$$2\sqrt{(y-1)(y^2-1)} = y^3 - y^2 - y + 2 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{y^3 - y^2 - y + 1} = y^3 - y^2 - y + 2.$$

Заменяем $y^3 - y^2 - y + 1 = z^2$; тогда

$$2z = z^2 + 1 \Rightarrow z = 1.$$

Уравнение $y^3 - y^2 - y + 1 = 1$ имеет три корня: $y_1 = 0$ (не подходит по ОДЗ, которое требует $y \geq 1$); $y_2 = (1 + \sqrt{5})/2$ (подходит); $y_3 = (1 - \sqrt{5})/2$ (не подходит).

Значит,

$$x = y - 2 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}.$$

☛ **Ответ:** $(\sqrt{5} - 3)/2$.

31. Решить уравнение

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 8.$$

◀ Пусть $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = y > 0$, тогда

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{y^2 - 2}{2}. \quad (*)$$

Перемножая первые две скобки, перепишем уравнение так:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 8 \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 8,$$

т.е., с учетом сделанной замены,

$$y + \frac{y^3 - 2y}{2} + y^2 = 4(y^2 - 2) \quad \text{или} \quad y^3 - 6y^2 + 16 = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $y_1 = 2$, $y_2 = 2 - 2\sqrt{3}$ (не подходит как отрицательный), $y_3 = 2 + 2\sqrt{3}$ (тоже не подходит: отрицательна правая часть равенства (*)).

Но если $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2$, то уже нетрудно найти единственный корень исходного уравнения $x = 0$. ▶

🔍 **Ответ:** 0.

$$32. \sqrt{4x-x^2} + \sqrt{4x-x^2-3} = 3 + \sqrt{2x-x^2}.$$

◀ Потребовав прежде всего неотрицательности подкоренных выражений, найдем ОДЗ: $x \in [1; 2]$. Узкие рамки допустимого заставляют предположить, что и в этом случае корней не слишком много. Выделим навязчивые полные квадраты и перепишем уравнение так:

$$\sqrt{4-(x-2)^2} + \sqrt{1-(x-2)^2} = 3 + \sqrt{1-(x-1)^2}.$$

На рассматриваемом отрезке левая часть представляет собой возрастающую функцию, а правая, напротив того, — убывающую. Значит, если корень имеется, то он только один. Уповав на то, что подбор увенчается, находим $x = 2$. ▶

🔍 **Ответ:** 2.

$$33. \text{ Решить уравнение } 3 - x^2 + 2x = \sqrt{1-x^2} \cdot (2x^2 + 4x + 3).$$

◀ Левая часть, несомненно, раскладывается на множители $(x+1)(3-x)$, благодаря чему угадывается один из корней: $x_1 = -1$. Но если, сократив

на $\sqrt{x+1}$, получить уравнение

$$(3-x)\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \cdot (2x^2 + 4x + 3)$$

и попытаться решить его возведением в квадрат, то ничего хорошего не получится: хотя и отделяется еще один корень $x_2 = 0$, но оставшееся уравнение 3-й степени решить трудно.

Еще один ложный путь указывают полные квадраты: исходное уравнение, конечно, подмывает переписать в виде

$$4 - (x-1)^2 = \sqrt{1-x^2} \cdot (2(x+1)^2 + 1)$$

и попытаться как-то оценить обе части равенства, но, не угадав корня (или корней), далеко не уйдешь.

Попробуем получить что-либо похожее на однородное уравнение и заменим $\sqrt{1-x^2} = y$; тогда $x^2 = 1 - y^2$ и уравнение после преобразований переписывается в виде

$$2y^3 + y^2 - 5y + 2 = (4y - 2)x.$$

Нет, однородного не получилось, зато неожиданно оказывается, что обе части обращаются в нуль при $y = 1/2$!

Значит, имеются две возможности: 1) $y = 1/2$ и тогда

$$x^2 = 1 - y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и 2) (после деления углом) $y^2 + y - 2 = 2x$. Но это соотношение равносильно

$$1 - x^2 + y - 2 = 2x \quad \text{или} \quad y = (x+1)^2,$$

т. е.

$$\sqrt{1-x^2} = (x+1)^2.$$

Это уравнение уже решается возведением в квадрат: кроме найденных ранее корней $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$ оно других не имеет. ►

✎ **Ответ:** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}/2$.

Чисто теоретически, можно, конечно, представить, что решающий это уравнение додумается разложить его на множители непосредственно — проделав такие преобразования:

$$\begin{aligned} 3 - x^2 + 2x &= \sqrt{1-x^2} \cdot (2x^2 + 4x + 3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot (x+1)^2 + \sqrt{1-x^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} \cdot (x+1)^2 + \sqrt{1-x^2} &= -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} \cdot (x+1)^2 + \sqrt{1-x^2} &= (x+1)^2 - 2(x^2-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} \cdot (x+1)^2 + \sqrt{1-x^2} &= (x+1)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

после чего следует:

$$(x+1)^2(2\sqrt{1-x^2}-1) = \sqrt{1-x^2}(2\sqrt{1-x^2}-1) \quad \text{или} \\ (2\sqrt{1-x^2}-1)((x+1)^2 - \sqrt{1-x^2}) = 0,$$

но, как справедливо сетуют в таких случаях наши подопечные, очевидны они только для того, кто всё это сотворил. В качестве утешения отметим, что эксперты считают эту задачу (Геофак МГУ, 2000) «переусложненной» (см. книгу И. Н. Сергеева «Математика». С. 16).

В заключение — задача, которая, собственно, вовсе не уравнение, однако ключевая для темы идея важности ОДЗ играет здесь решающую роль.

34. Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2; 3]$, $y \in [0; 11]$.

◀ Пусть $x-1=a$, $y-x=b$, $7-y=c$, тогда данное выражение имеет смысл, если одновременно выполнены условия:

$$ab \geq 0, \quad ac \leq 0, \quad bc \geq 0.$$

Понятно, что это возможно, только если один из множителей a , b или c равен 0: ведь из первого и третьего неравенств следует, что a и b , b и c одного знака, т. е. a и c одного знака, а второе означает, что a и c разных знаков.

Если $a=0$, т. е. $x=1$, надо найти максимум выражения

$$\sqrt{(1-y)(y-7)} = \sqrt{9-(y-4)^2}$$

при $y \in [0; 11]$. Это значение равно 3 и достигается при $y=4$.

Если $c=0$, т. е. $y=7$, то надо найти максимум выражения

$$\sqrt{(x-1)(7-x)} = \sqrt{9-(x-4)^2},$$

который меньше 3, так как $x \in [-2; 3]$.

Если, наконец, $x=y$, имеем выражение

$$\sqrt{(7-x)(1-x)} = \sqrt{(x-4)^2-9},$$

в котором $x \in [0; 3]$, поскольку $x=y$, а $y \in [0; 11]$. Максимум этого выражения заведомо не больше 3. ►

☛ Ответ: 3.

А теперь — краткий (ибо параграф разросся), но необходимый разговор о параметрах.

35. Решить уравнение $\sqrt{x-2a} - \sqrt{x-a} = 1$.

◀ Чтобы сэкономить на возведениях в квадрат, обозначим $\sqrt{x-2a} = y$; тогда уравнение переписывается в виде

$$y - \sqrt{y^2 + a} = 1 \quad \text{или} \quad \sqrt{y^2 + a} = y - 1,$$

откуда

$$\begin{cases} y^2 + a = (y-1)^2, \\ y \geq 1. \end{cases}$$

Из уравнения находим $y = (1-a)/2$; условие $y \geq 1$ выполнено при $a \leq -1$. Тогда

$$x = y^2 + 2a = \frac{a^2 + 6a + 1}{4}.$$

☞ **Ответ:** $x = (a^2 + 6a + 1)/4$ при $a \leq -1$; при $a > -1$ решений нет.

36. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} = a?$$

◀ Уравнение $y = \sqrt{4x - x^2}$ задает на плоскости xOy верхнюю половину окружности $(x-2)^2 + y^2 = 4$, поэтому количество корней исходного уравнения равно числу пересечений с данной полуокружностью горизонтальной прямой вида $y = a$. Поэтому сразу пишем ответ. ▶

☞ **Ответ:** Если $a < 0$, то корней нет; если $0 \leq a < 2$, то корней два; если $a = 2$, то корень один; если $a > 2$, то корней нет.

37. Найти все a , при которых имеет решения уравнение

$$\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - \frac{x^2}{4}}} + x + \frac{x^2}{4} = 0.$$

◀ Пусть $x + x^2/4 = y \leq 0$; анализ дискриминанта показывает, что уравнение $x^2/4 + x - y = 0$ разрешимо при $y \in [-1; 0]$. Имеем

$$\sqrt{5a} + \sqrt{5a - y} = -y.$$

После двукратного возведения в квадрат приходим к уравнению

$$5a - y = y^4 - 10ay^2 + 25a^2,$$

решая которое как квадратное относительно $b = 5a$, получаем

$$\begin{cases} 5a = y^2 - y + 1, \\ 5a = y^2 + y. \end{cases}$$

Разберем каждую из двух возможностей.

Если $5a = y^2 - y + 1$, то $y - 1 = y^2 - 5a \geq 0$, поскольку

$$y^2 - 5a = \sqrt{5a - y} \geq 0.$$

Значит, $y \geq 1$, что противоречит полученному ранее условию $y \in [-1; 0]$.

Пусть теперь $5a = y^2 + y$ или $y^2 + y - 5a = 0$. Дискриминант неотрицателен при $a \geq -1/20$. Решая уравнение, находим

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 20a}}{2}.$$

Проверка условия $y \in [-1; 0]$ дает для меньшего корня:

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + 20a}}{2} \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 20a} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{20} \leq a \leq 0.$$

И для большего:

$$-1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + 20a}}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 20a \leq 1, \\ 1 + 20a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{20} \leq a \leq 0. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $-1/20 \leq a \leq 0$.

Отметим, что при решении иррациональных уравнений с параметром почти всегда приходится решать иррациональные *неравенства*, т. е. мы опять-таки забегаем вперед собственного оглавления; однако уже было не раз сказано, что мы, в сущности, всё знаем, но не всё помним и повторяем при случае...

38. При каких a уравнение $3 \cdot \sqrt[5]{x+2} - 16a^2 \cdot \sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$ имеет единственное решение?

◀ Перепишем уравнение так:

$$3 \cdot \sqrt[5]{x+2} - \sqrt[10]{(x+2)(x+1)} - 32a^2 \cdot \sqrt[5]{x+1} = 0$$

и, поскольку ОДЗ определяется условиями $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$, рассмотрим несколько случаев.

Прежде всего заметим, что при $a = 0$ уравнение имеет единственный корень $x = -2$.

Пусть теперь $a \neq 0$, $x + 1 > 0$; тогда после деления на $\sqrt[5]{x+1}$ придем к уравнению

$$3t^2 - t - 32a^2 = 0, \quad \text{где } t = \sqrt[10]{\frac{x+2}{x+1}}, \quad t > 0.$$

Это уравнение имеет один положительный корень

$$t = \frac{1 + \sqrt{384a^2 + 1}}{6};$$

тогда поскольку

$$\frac{x+2}{x+1} = t^{10}, \quad \text{находим } x_1 = \frac{t^{10} - 2}{1 - t^{10}} \quad (\text{считаем пока } t \neq 1).$$

Аналогично при $x + 2 < 0$ имеем уравнение $3t^2 + t - 32a^2 = 0$, положительный корень которого (для отличия обозначим его через u)

$$u = \frac{-1 + \sqrt{384a^2 + 1}}{6}, \quad \text{откуда } x_2 = \frac{u^{10} - 2}{1 - u^{10}} \quad (u \neq 1).$$

Условие задачи будет выполнено, если:

- а) $x_1 > -1$, $x_2 > -2$;
- б) $x_1 < -1$, $x_2 < -2$;
- в) $t = 1$, $u \neq 1$ или наоборот, $u = 1$, $t \neq 1$.

Разберем по отдельности каждую возможность.

а) Неравенство $x_1 > -1$ означает

$$\frac{t^{10} - 2}{1 - t^{10}} > -1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{t^{10} - 1} > 0,$$

что верно при $t > 1$ (поскольку $t > 0$, $t \neq 1$). Значит,

$$\frac{1 + \sqrt{384a^2 + 1}}{6} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 > \frac{1}{16} \quad \text{или} \quad |a| > \frac{1}{4}.$$

Неравенство $x_2 > -2$ равносильно

$$\frac{u^{10} - 2}{1 - u^{10}} > -2 \quad \text{или} \quad \frac{u^{10}}{u^{10} - 1} > 0,$$

откуда (учитывая положительность u) $u > 1$. Решая неравенство

$$\frac{-1 + \sqrt{384a^2 + 1}}{6} > 1,$$

получаем $|a| > 1/2\sqrt{2}$. Таким образом, при $|a| > 1/2\sqrt{2}$ условие задачи выполнено.

б) Аналогично предыдущему получаем, что значения параметра, для которых $|a| < 1/4$, условию задачи удовлетворяют.

в) В этом случае $|a| = 1/4$ или $|a| = 1/2\sqrt{2}$, т. е. граничные точки интервалов, найденных в пп. а) и б) включаются в ответ. ►

● **Ответ:** $a \in (-\infty; -1/2\sqrt{2}] \cup [-1/4; 1/4] \cup [1/2\sqrt{2}; +\infty)$.

39. При всех a решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

◀ В поисках ключа к решению обозначим $\sqrt{4x + 2a + 3a^2} = t$. Тогда уравнение заменяется равносильной системой

$$\begin{cases} 4x + 2a + 3a^2 = t^2, \\ 2x^2 + 2ax - a^2 = t. \end{cases}$$

Удвоив второе уравнение и сложив его с первым, мы получим

$$4x^2 + 4ax + a^2 + 4x + 2a = t^2 + 2t$$

или, добавив по единице к каждой части, $(2x + a + 1)^2 = (t + 1)^2$. Отсюда находим

$$\begin{cases} 2x + a = t, \\ 2x + a + t + 2 = 0. \end{cases}$$

Первая возможность приводит нас к уравнению

$$2x + a = \sqrt{4x + 2a + 3a^2},$$

решая которое получаем

$$x = \frac{1 - a \pm \sqrt{3a^2 + 1}}{2}.$$

Корни должны удовлетворять неравенству $2x + a \geq 0$ или $x \geq -a/2$. Большой корень подходит; меньший подходит только при $a = 0$. При данном значении параметра корнями являются $x = 0$ и $x = 1$.

Итак, при $a \neq 0$ имеем корень

$$x = \frac{1 - a + \sqrt{3a^2 + 1}}{2}.$$

Пусть теперь $2x + a + t + 2 = 0$, т. е.

$$\sqrt{4x + 2a + 3a^2} = -a - 2x - 2.$$

Возводя в квадрат, получаем квадратное уравнение

$$2x^2 + (2 + 2a)x + a + 2 - a^2 = 0,$$

имеющее корни при $|a| \geq 1$; это

$$x = \frac{-1 - a \pm \sqrt{3(a^2 - 1)}}{2}.$$

Проверка на условие $-a - 2x - 2 \geq 0$ показывает, что больший корень не подходит, а меньший подходит при выполнении неравенства

$$\frac{\sqrt{3(a^2 - 1)}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

т. е. при $|a| \geq 2/\sqrt{3}$. ►

☛ **Ответ:** Если $a = 0$, то $x = 0$ и $x = 1$; если $0 < |a| < 2/\sqrt{3}$, то

$$x = \frac{1 - a + \sqrt{3a^2 + 1}}{2};$$

если $|a| \geq 2/\sqrt{3}$, то

$$x = \frac{1 - a + \sqrt{3a^2 + 1}}{2}, \quad x = \frac{-1 - a - \sqrt{3(a^2 - 1)}}{2}.$$

40. Найти все a , при которых уравнение

$$\sqrt{x^3 - 24x^2 + 118x + 7} = 5\sqrt{7x - x^2} + \sqrt{a^2 - 11a + 18}$$

имеет единственное решение.

◀ Здесь понадобится мужество. Потому что вначале дело идет неплохо: удастся разложить на множители выражение под первым корнем:

$$x^3 - 24x^2 + 118x + 7 = (x - 7)(x^2 - 17x - 1),$$

и, найдя ОДЗ: $x \in [0; 7]$, представить уравнение в виде

$$\sqrt{(x - 7)(x^2 - 17x - 1)} = 5\sqrt{x(7 - x)} + b, \quad \text{где } b = \sqrt{a^2 - 11a + 18} \geq 0,$$

$$\text{или } \sqrt{7 - x}(\sqrt{17x + 1 - x^2} - 5\sqrt{x}) = b.$$

Но дальше как-то не сразу выясняется, что к чему.

Заметим, что значение $b = 0$ не удовлетворяет условию задачи, так как в этом случае уравнение имеет два корня: $x = 7$ и корень уравнения

$$\sqrt{17x+1-x^2} = 5\sqrt{x} \quad (\text{он равен } \sqrt{17}-4).$$

Значит, $b > 0$.

Используем прием, уже не раз доказал нам свою эффективность: домножение на сопряженное, и представим левую часть в виде

$$\frac{\sqrt{7-x}(1-8x-x^2)}{\sqrt{17x+1-x^2}+5\sqrt{x}} = b.$$

Ясно, что это уравнение имеет корни, только если

$$1-8x-x^2 > 0 \quad \text{или} \quad x \in (0; \sqrt{17}-4).$$

Кроме того, левая часть представляет собой убывающую функцию. Действительно, на интервале $(0; \sqrt{17}-4)$ убывающими являются множители

$$\sqrt{7-x} \quad \text{и} \quad 1-8x-x^2$$

(поскольку вершина параболы $y = 1-8x-x^2$ находится в точке с абсциссой $x = -4$). Знаменатель же

$$\sqrt{17x+1-x^2}+5\sqrt{x}$$

напротив — является возрастающей функцией (вершина параболы $y = 17x+1-x^2$ находится в точке с абсциссой $x = 8,5$, а $5\sqrt{x}$ возрастает везде). Значит, условие единственности решения уравнения совпадает с условием существования решения вообще. И решения будут, если значение b заключено между наименьшим и наибольшим значением функции

$$y = \frac{\sqrt{7-x}(1-8x-x^2)}{\sqrt{17x+1-x^2}+5\sqrt{x}}$$

на отрезке $x \in [0; \sqrt{17}-4]$. В силу монотонного убывания наибольшее значение достигается при $x = 0$, и равно оно $\sqrt{7}$; наименьшее — при $x = \sqrt{17}-4$ и равно 0 (но его, как мы выяснили, надо исключить). Итак, $0 < b \leq \sqrt{7}$. Отсюда

$$0 < a^2 - 11a + 18 \leq 7$$

и тогда

$$a \in \left[\frac{11-\sqrt{77}}{2}; 2 \right) \cup \left(9; \frac{11+\sqrt{77}}{2} \right].$$

Отметим, что и эта задача, по мнению экспертов, относится к категории «переусложненных или слишком муторных». ►

☛ **Ответ:** $a \in [(11-\sqrt{77})/2; 2) \cup (9; (11+\sqrt{77})/2]$.



Привал зачарованных

Решите уравнения:

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4.$
2. $\sqrt{x^3 + 5x^2 - 16x + 11} + 3 = 2x.$
3. $\sqrt{x^2 + 5x + 2} + \sqrt{x^2 + x + 3} = 7;$
4. $\sqrt{6 - \sqrt{5 - 4x}} = 4x + 1.$
5. $\sqrt{\sqrt{2x^2 + x - 3} + 2x^2 - 3} = x.$
6. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{x-3}.$
7. $\sqrt{9x^2 + 10x + 2} = 5x^2 + 8x + 2.$
8. $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+3} = 2x - 1.$
9. $\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x - 2}$
10. $2x - 12 = \frac{x^2}{(1 + \sqrt{x+1})^2}.$
11. $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$
12. $x^2 - 1 = 3\sqrt{3x+1}.$
13. $6x\sqrt{1-9x^2} + 18x^2 - 3\sqrt{2} \cdot x - 1 = 0.$
14. $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$
15. $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$
16. а) $5\sqrt{2x-24} + 3\sqrt{5x-59} + \sqrt{x-8} + \sqrt{3x-20} + \sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+24} = 26$
 б) $\sqrt{x-6} + \sqrt[6]{10x+5} = 2.$
17. а) $\sqrt{2008-2009x} + \sqrt{2010x-2009} = 1;$
 б) $2\sqrt{x^3-1} + \sqrt{2-x} = 1 + \sqrt{x^2-3x+2}.$
18. а) $\sqrt{2-x} + x - 3 = \sqrt{x-1},$
 б) $x^2 + 3 = \sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1}.$
19. $\sqrt{17-x^2} + 6\sqrt{x-x} = 9.$
20. $\sqrt[8]{x-1} + \sqrt[8]{x+1} = \sqrt[8]{2}.$

21. $\sqrt[3]{3x+9} = 27(x+1)^3 - 6.$

22. $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2+y^2-2y+3} = \sqrt[4]{x^4-16} + 5 - y.$

23. $x^2 + x + \sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{2}.$

24. $x^2 - x - 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}.$

25. $x + 32 = \sqrt[5]{2-x}.$

26. $2\sqrt{2x} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+2} + \sqrt{6x+2}.$

27. $x(\sqrt{x^2+3x+5} + \sqrt{x}) + x^2 = 5.$

28. $\sqrt{1 + \frac{4x+6}{x^2-2x-3}} + \sqrt{1 - \frac{4x+6}{x^2+2x+3}} + 4x^2 + 12x + 7 = 0$

29. $3x + (4x+2)\sqrt{x^2+x+2} + x\sqrt{x^2+7} + 1 = 0.$

30. $\sqrt{x(x+7)} + \sqrt{(x+7)(x+17)} + \sqrt{(x+17)(x+24)} = 12 + 17\sqrt{2}.$

31. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{a}-x} = a;$

б) $\sqrt{x+2} = a + \sqrt{x-3}.$

в) $\sqrt{x(2a-x)} = 1-x;$

г) $\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)^2} + \sqrt[3]{x^2-a^2} = \sqrt[3]{a^2};$

д) $\sqrt{x-4a+16} = 2\sqrt{x-2a+4} - \sqrt{x};$

е) $2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{x(a+x)};$

ж) $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2).$

32. При каких a уравнение $a^2x^2 + 2a(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2}-3$ имеет хотя бы один корень?

33. Найдите все a , при которых уравнение имеет единственное решение:

а) $x-2 = \sqrt{2-2(a+2)x};$

б) $a + \sqrt{6x-x^2-8} = 3 + \sqrt{1+2ax-a^2-x^2}.$

34. Найдите все x , которые не являются корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4+x^3} = a \cdot \sqrt[4]{4-a^4}(x+4x^2-8)$$

ни при каком значении a .

Кунсткамера

Решите уравнения:

- $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{6x^2 + 8x}.$
- $(10x^2 + 14x + 2)\sqrt{x^2 - 1} = 10x^3 + 14x^2 - 3x - 7.$
- $\sqrt{x^2 - y^2 - px + 3py - 2p^2} + \sqrt{x - y + p} \cdot \sqrt{4 - 2x + p} + \sqrt{-2x^2 - 2xy + (5p + 4)x + (p + 4)y - 2p^2 - 8p} = 4.$

Советы и решения

Р 1. Заменим $\sqrt{x+3} = y \geq 0$, тогда $y + \sqrt{2y^2 - 7} = 4$. Положительный корень этого уравнения $y = \sqrt{39} - 4$, тогда $x = y^2 - 3 = 52 - 8\sqrt{39}$.

Р 2. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^3 + 5x^2 - 16x + 11 = (2x - 3)^2, \\ 2x - 3 \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Уравнение (*) имеет три корня $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$, однако ни один из них не удовлетворяет неравенству.

Р 3. Домножение на сопряженное дает

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 3} = \frac{4x - 1}{7};$$

сложение с исходным уравнением — уравнение

$$2\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 7 + \frac{4x - 1}{7} \quad \text{или} \quad 7\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 24 + 2x.$$

После возведения в квадрат приходим к уравнению $45x^2 + 149x - 478 = 0$, которое энтузиазма, конечно, не вызывает. Разложив, однако, 478 на множители $478 = 2 \cdot 239$ и, за неимением лучшего (т. е. оттягивая честное вычисление дискриминанта и проч.), подставив $x = 2$ в исходное уравнение, обнаруживаем, что оно подходит. Значит, $x_2 = -239/45$. И поскольку условие $2x + 24 \geq 0$ выполнено, корень подходит. (ОДЗ он принадлежит, так как неравенство $x^2 + x + 3 \geq 0$ верно всегда, а неравенство $x^2 + 5x + 2 \geq 0$ заведомо выполнено при всех отрицательных $x < -5$.)

Р 4. Пусть $5 - 4x = u^2$, $4x + 1 = v$, тогда

$$\begin{cases} 6 - v = u^2, \\ 6 - u = v^2. \end{cases}$$

Вычитая уравнения, получим

$$\begin{cases} u = v, \\ u + v = 1. \end{cases}$$

Первое соотношение дает нам уравнение $\sqrt{5 - 4x} = 4x + 1$, из которого находим один корень исходного уравнения $x = 1/4$. Соотношение $u + v = 1$ приводит к уравнению

$$\sqrt{5 - 4x} = -4x \quad \text{или} \quad 16x^2 + 4x - 5 = 0,$$

откуда $x_1 = (\sqrt{21} - 1)/8$ (не подходит, поскольку не удовлетворяет условию $x \leq 0$),
 $x_2 = -(\sqrt{21} + 1)/8$ (также не подходит, поскольку не удовлетворяет условию $4x + 1 \geq 0$).

Р 5. После первого возведения в квадрат получаем

$$\sqrt{2x^2 + x - 3} = 3 - x^2,$$

снова возводя в квадрат имеем $2x^2 + x - 3 = (3 - x^2)^2$ или (используем разность квадратов) $x^2 - (3 - x^2)^2 = 3 - x - x^2$, откуда

$$(x - 3 + x^2)(x + 3 - x^2) = 3 - x - x^2,$$

т. е.

$$(3 - x - x^2)(x^2 - x - 3) = 3 - x - x^2.$$

Значит, либо $3 - x - x^2 = 0$, либо $x^2 - x - 3 = 1$. Из корней этих двух уравнений нам подходит только $x = (\sqrt{13} - 1)/2$ (проверку оставляем читателю).

Р 6. ... $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{3-x} = 0$. Поскольку из условия $a + b + c = 0$ следует

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc,$$

мы имеем

$$x - 1 + 2x - 3 + 3 - x = 3\sqrt[3]{(x-1)(2x-3)(3-x)},$$

откуда $(2x - 1)^3 + 27(x - 1)(2x - 3)(x - 3) = 0$. После преобразований получаем

$$62x^3 - 309x^2 + 492x - 244 = 0.$$

Уравнение не из приятных, однако $x = 2$ — его корень (посторонний для данного уравнения; почему при возведении в куб могут они появляться — тема особая: мы затрагиваем ее в «теоретическом» § 24). После деления на $x - 2$ получаем

$$62x^2 - 185x + 122 = 0,$$

отсюда снова $x = 2$ или $x = 61/62$. Этот последний корень является единственным корнем исходного уравнения.

Р 7. Пусть $5x^2 + 8x + 2 = u$, тогда

$\sqrt{4x^2 + 2x + u} = u$ и $4x^2 + 2x + u = u^2$ или $(2x - u)(2x + u) + (2x + u) = 0$,
откуда либо $2x + u = 0$, либо $2x - u + 1 = 0$.

Первая возможность дает $5x^2 + 10x + 2 = 0$, откуда $x = -1 \pm (\sqrt{15}/5)$. Проверка должна включать выполнение неравенства $5x^2 + 8x + 2 \geq 0$; подставлять сюда найденные значения не удобно, поэтому поступим иначе: соотношение

$$5x^2 + 8x + 2 = 5x^2 + 10x + 2 - 2x = -2x > 0$$

показывает, что оба корня подходят. Условие $2x - u + 1 = 0$ дает уравнение $5x^2 + 6x + 1 = 0$, откуда $x = -1$ (посторонний корень) или $x = -1/5$ (корень уравнения).

Р 8. Заменим

$$\sqrt{5x+1} = u \geq 0, \quad \sqrt{x+3} = v \geq 0$$

и составим систему

$$\begin{cases} u - v = \frac{u^2 - v^2}{2}, \\ u^2 - 5v^2 + 14 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения либо $u = v$, либо $u + v = 2$. Первая возможность дает нам корень $x = 1/2$. Вторая приводит к уравнению $2v^2 + 2v - 9 = 0$; нас интересует только положительный корень, поэтому $v = (\sqrt{19} - 1)/2$. Тогда окончательно

$$x = v^2 - 3 = \frac{4 - \sqrt{19}}{2}.$$

Р 9. Аналогично примеру 20 данного параграфа имеем либо одновременно

$$2x^2 - 1 \geq 2x^2 + 2x + 3 \quad \text{и} \quad x^2 - x + 2 \geq x^2 - 3x - 2,$$

либо наоборот. Эти неравенства равносильны условиям $x \leq -2$ и $x \geq -2$ соответственно. Значит, $x = -2$. Остается подставить и проверить, что данное значение — корень уравнения, поскольку оно принимает вид

$$\sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{8} - \sqrt{8}.$$

Р 10. После уничтожения иррациональности в знаменателе уравнение преобразуется к виду

$$2x - 12 = (1 - \sqrt{x+1})^2 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{x+1} = 14 - x,$$

откуда $x = 8$.

Р 11. Домножим обе части на разность соответствующих радикалов, мы получим

$$x \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) = x - 1,$$

откуда

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Сложив это уравнение с исходным, получим

$$2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + x \quad \text{или} \quad \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 1 \right)^2 = 0.$$

Таким образом, $x - 1/x = 1$ и тогда $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$; но по ОДЗ $x > 1$, поэтому единственный корень $x = (1 + \sqrt{5})/2$.

Р 12. Замена $\sqrt{3x+1} = y \geq 0$ позволяет свести уравнение к системе

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 3y, \\ y^2 - 1 = 3x, \end{cases}$$

которая приводит к двум условиям: 1) $x = y$, что дает квадратное уравнение $x^2 - 3x - 1 = 0$ с корнем (неотрицательным) $x = (3 + \sqrt{13})/2$; 2) $x + y + 3 = 0$. Из этого равенства получаем уравнение $x^2 + 3x + 8 = 0$, не имеющее корней.

Р 13. Перепишем уравнение так:

$$3\sqrt{2} \cdot x \cdot (\sqrt{2 - 18x^2} - 1) = 1 - 18x^2 \Leftrightarrow \frac{3x\sqrt{2}(1 - 18x^2)}{\sqrt{2 - 18x^2} + 1} = 1 - 18x^2,$$

отсюда либо 1) $1 - 18x^2 = 0$, либо 2) $3x\sqrt{2} = \sqrt{2 - 18x^2} + 1$.

Другой, «более изящный», путь — замена $3x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$, сводящая уравнение к тригонометрическому

$$\sin 2t + \cos 2t - \sqrt{2} \cos t = 0,$$

которое решается без труда, но требует некоторой возни с отбором корней.

Р 14. ОДЗ определяется условием $x \geq 1/2$, поэтому уравнение можно переписать так:

$$\sqrt{2x-1}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}) = 4 + 3(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})$$

или

$$(\sqrt{2x-1} - 3)(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}) = 4.$$

Домножая обе части на выражение, сопряженное второй скобке, получаем

$$\sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}.$$

Дважды возводя в квадрат, находим $x_1 = 3$ (посторонний корень) и $x_2 = 7$ — корень исходного уравнения (проверка).

Р 15. Выделяя полные квадраты, получаем

$$\sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2$$

или

$$\sqrt{3y+4} + \sqrt{5y+9} = 5-y, \text{ где } y = (x+1)^2 \geq 0.$$

Корень $y = 0$ угадываем, а других нет, поскольку левая часть — функция возрастающая, а правая — убывающая. Значит, $x = -1$.

Р 16. а) ОДЗ определяется условием $x \geq 12$. Если $x = 12$, то уравнение удовлетворяется, а если $x > 12$, то корней нет, так как левая часть — возрастающая функция.

б) В ОДЗ уравнения $x \geq 6$, но тогда

$$10x + 5 \geq 65 \text{ и } \sqrt[6]{10x+6} > 2,$$

т.е. уравнение корней не имеет.

Р 17. а) ОДЗ определяется условиями $2008 - 2009x \geq 0$, $2010x - 2009 \geq 0$, откуда должно быть одновременно

$$x \leq \frac{2008}{2009}, \quad x \geq \frac{2009}{2010},$$

однако $2008/2009 < 2009/2010$ (подобно тому, как $1/2 < 2/3$). Значит, ОДЗ пуста, и решений нет.

Р 18. а) ... $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 3-x + \sqrt{x-1}$. ОДЗ: $[1; 2]$. Тогда

$$\sqrt{2-x} \leq 1 \leq 3-x.$$

Но левая и правая половинки этого неравенства становятся равенствами при разных x , т.е. решений нет.

б) ОДЗ: $x \geq 5$. Но из уравнения следует также и то, что $x - 5 > 2x - 1$, т.е. $x < -4$. Противоречие.

Р 19. Пусть $\sqrt{x} = y$, тогда $17 - y^4 = (y-3)^4$ или $y^4 + (y-3)^4 = 17$. Замена симметрии $y - 3/2 = t$ приводит уравнение к биквадратному

$$2t^4 + 27t^2 - \frac{55}{8} = 0,$$

из которого $t = \pm 1/2$. Тогда $y_1 = 2$, $y_2 = 1$.

Р 20. Корень $x = 1$ очевиден, а других нет, поскольку левая часть — возрастающая функция.

Р 21. Замена $x + 1 = y$ приводит уравнение к виду

$$\sqrt[3]{3t+6} = 27t^3 - 6,$$

которое решается в том же порядке идей (рассмотрение взаимно-обратных функций), что и пример 31 настоящего параграфа.

Р 22. С одной стороны, должно быть $4 - x^2 \geq 0$, с другой $x^4 - 16 \geq 0$, т. е. $x = \pm 2$, однако кроме этого еще и $4x + 1 \geq 0$. Таким образом, в ОДЗ входит только $x = 2$. Тогда уравнение принимает вид

$$3 + \sqrt{y^2 - 2y + 7} = 5 - y,$$

откуда без труда находим $y = -3/2$.

Р 23. В ОДЗ уравнения $x \geq -1$. При $x \geq -1/2$ левая часть есть возрастающая функция, поэтому уравнение может иметь здесь не более одного корня. Угадываем его: $x = 1$. Если же

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad x^2 \leq 1, \quad x < -\frac{1}{2}, \quad \sqrt{x+1} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. левая часть уравнения не превосходит

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$

что, очевидно, меньше правой. Значит, найденный корень единственен.

Р 24. Замена $\sqrt[4]{2x-1} = t \geq 0$ и последующие преобразования приводят нас к уравнению $t^8 - 8t + 7 = 0$. Корень $t = 1$ угадывается. Доказать отсутствие других положительных корней можно при помощи производной. Если $y = t^8 - 8t + 7$, то

$$y' = 8(t^7 - 1) = 8(t-1)(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1).$$

Таким образом, $t = 1$ — точка минимума, в которой функция равна 0, значит, при $t \neq 1$ функция положительна. Итак, $x = (t^4 + 1)/2 = 1$.

Р 25. Если $\sqrt[5]{2-x} = y$, то $x = 2 - y^5$ и приходим к уравнению $y^5 + y = 34$, имеющему единственный корень $y = 2$ (снова пользуемся монотонностью). Значит, $x = -30$.

Р 26. Перепишем уравнение:

$$2\sqrt{2x} - \sqrt{6x+2} = \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+3}$$

и домножим-разделим каждую часть на сопряженное ей выражение. Получим

$$\frac{2(x-1)}{2\sqrt{2x} + \sqrt{6x+2}} = \frac{x-1}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2}},$$

отсюда $x_1 = 1$. Теперь надо решать уравнение

$$\sqrt{8x+12} + \sqrt{12x+8} = \sqrt{8x} + \sqrt{6x+2}.$$

Заметим, что в ОДЗ $x \geq 0$, поэтому

$$\sqrt{8x+12} > \sqrt{8x} \quad \text{и} \quad \sqrt{12x+8} > \sqrt{6x+2},$$

т. е. данное уравнение корней не имеет.

Р 27. Перепишем уравнение в виде

$$x\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x\sqrt{x} + x^2 = 5$$

и угадаем корень $x = 1$. При $x \geq 0$ (ОДЗ) функция $y = x^2 + 3x + 5$ возрастает, значит, и вся левая часть является возрастающей функцией, так что найденный корень единствен.

$$\text{Р 28. } \dots \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{4x+6}{x^2-2x-3}} + \sqrt{1 - \frac{4x+6}{x^2+2x+3}} = -4x^2 - 12x - 7.$$

Левая часть представляет собой сумму вида $t + 1/t \geq 2$. Правая часть

$$-4x^2 - 12x - 7 = 2 - (2x+3)^2 \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 1, \\ 2x+3 = 0. \end{cases}$$

Р 29. Перепишем уравнение так:

$$3x + (4x+2)\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} + x\sqrt{x^2+7} + 1 = 0$$

или

$$3x + (2x+1)\sqrt{(2x+1)^2 + 7} + x\sqrt{x^2+7} + 1 = 0$$

или

$$(2x+1)(1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 7}) + x(1 + \sqrt{x^2+7}) = 0,$$

т. е.

$$x(1 + \sqrt{x^2+7}) = u(1 + \sqrt{u^2+7}), \quad (*)$$

где $u = -(2x+1)$. Функция $f(t) = t(1 + \sqrt{t^2+7})$ имеет производную

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+7} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+7}},$$

которая, очевидно, положительна. Значит, функция $f(t)$ возрастающая, поэтому равенство (*) возможно только при $x = u$, откуда $x = -1/3$ — единственный корень уравнения.

Р 30. В ОДЗ входят только те x , которые удовлетворяют одному из условий: $x \leq -24$, $x \geq 0$, $x = -7$, $x = -17$. Два последних значения не являются корнями уравнения. Пусть сначала $x \geq 0$, тогда все слагаемые — возрастающие функции, т. е. уравнение имеет здесь не более одного корня. Находим его ($x = 1$), исходя из естественного предположения, что сумма $12 + 17\sqrt{2}$ получается скорее всего в результате сложения чисел вида $m + n\sqrt{2}$ (при целых m и n). Пусть теперь $x \leq -24$. В этом случае все слагаемые — убывающие функции, и корень также может быть только один. Учитывая симметрию ОДЗ относительно точки $x = -12$, подставляем значение, симметричное найденному корню — это $x = -25$; корень подходит.

Р 31. а) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{a} - x = (a - \sqrt{x})^2, \\ a - \sqrt{x} \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Равенство (1) приводится к виду

$$\left(\sqrt{x} - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2\sqrt{a} - a^2}{4}.$$

Если $2\sqrt{a} - a^2 \geq 0$, т.е. $0 \leq a \leq \sqrt[3]{4}$, то

$$x = \frac{(a + \sqrt{2\sqrt{a} - a^2})^2}{4}.$$

Проверим условие $a - \sqrt{x} \geq 0$ или $x \leq a^2$. Для

$$x = \frac{(a + \sqrt{2\sqrt{a} - a^2})^2}{4}$$

оно после упрощений дает неравенство $\sqrt{a} \leq a^2$, откуда $a = 0$ или $a \geq 1$. При

$$x = \frac{(a - \sqrt{2\sqrt{a} - a^2})^2}{4}$$

приходим к неравенству $a^3 \geq 1/25$. Таким образом, если $a = 0$ или $1 \leq a \leq \sqrt[3]{4}$, то

$$x = \frac{(a \pm \sqrt{2\sqrt{a} - a^2})^2}{4}.$$

б) Пусть $x + 2 = y^2$, $y \geq 0$; тогда уравнение имеет вид $y = a + \sqrt{y^2 - 5}$. При условии $y \geq a$, $a \neq 0$ находим $y = a^2 + 5/(2a)$. Неравенство $a^2 + 5/(2a) \geq a$ при $a > 0$ даст $0 < a \leq \sqrt{5}$. При данных значениях параметра

$$x = y^2 - 2 = \frac{a^4 + 2a^2 + 25}{4a^2}.$$

в) Возведением в квадрат находим

$$x_1 = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}, \quad x_2 = \frac{a + 1 + \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}.$$

Теперь надо проверить условие $x \leq 1$.

г) Пусть $x + a = u^3$, $x - a = v^3$, тогда

$$\begin{cases} u^3 + uv + v^3 = \sqrt[3]{a^2}, \\ u^3 - v^3 = 2a, \end{cases}$$

откуда $u - v = 2\sqrt[3]{a}$. Теперь, поскольку первое уравнение можно переписать в виде

$$(u - v)^2 + 3uv = \sqrt[3]{a^2},$$

получаем $uv = -\sqrt[3]{a^2}$. Значит,

$$\begin{cases} u - v = 2\sqrt[3]{a}, \\ uv = -\sqrt[3]{a^2}, \end{cases}$$

откуда $u = -v = \sqrt[3]{a} \Rightarrow x = 0$.

д) Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x - 4a + 16} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x - 2a + 4}$$

и после домножения на сопряженное получим

$$\sqrt{x-4a+16}-\sqrt{x}=\frac{-2a+8}{\sqrt{x-2a+4}}.$$

Сложив полученные равенства и упростив, приходим к уравнению $x(x-2a+4)=(x-a)^2$, из которого $x=a^2/4$. Данный корень должен удовлетворять условию $x \geq a$; кроме того,

$$2\sqrt{x-2a+4} \geq \sqrt{x}.$$

Учитывая эти два неравенства, находим $a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$ — значения параметра, при которых $x=a^2/4$.

е) Из условий $a+x \geq 0$ и $a-x \geq 0$ следует, что $a \geq 0$ (достаточно сложить эти неравенства). Пусть $a+x=u^2$, $a-x=v^2$; тогда $x=u^2-v^2/2$ и мы имеем уравнение

$$2u-v=\sqrt{v^2+u\sqrt{\frac{u^2-v^2}{2}}}.$$

После возведения в квадрат получаем

$$4u^2-4uv=u\sqrt{\frac{u^2-v^2}{2}}.$$

Если $u=0$, то и $v=0$, и тогда $x=0$ — корень уравнения. Если $u \neq 0$, то еще одно возведение в квадрат даст $32(u-v)^2=u^2-v^2$. При $u=v$ снова получаем $x=0$. При $u \neq v$ находим $u/v=33/31$, откуда

$$\frac{a+x}{a-x}=\left(\frac{33}{31}\right)^2.$$

После упрощений получаем $x=64a/1025$.

ж) ОДЗ уравнения: $x \leq -1$, $x > 3$. При $x > 3$ уравнение можно переписать в виде

$$(x-3)(x+1)+3\sqrt{(x-3)(x+1)}=(a-1)(a+2)$$

и, положив

$$\sqrt{(x-3)(x+1)}=t \geq 0,$$

получить квадратное уравнение $t^2+3t-(a-1)(a+2)=0$, из которого $t_1=a-1$, $t_2=-a-2$. Отсюда $a-1 \geq 0$ или $-a-2 \geq 0$ (или и то и другое). Первый вариант $t_1=a-1$ дает нам

$$x=1 \pm \sqrt{a^2-2a+5},$$

что ввиду условия $x > 3$ может означать только

$$x=1+\sqrt{a^2-2a+5}.$$

Это значение будет корнем, если

$$1+\sqrt{a^2-2a+5}>3,$$

откуда $a \neq 1$. Итак, при $a > 1$ уравнение имеет корень

$$x=1+\sqrt{a^2-2a+5}.$$

При $a=1$ корнем является $x=-1$.

Пусть теперь $t_2 = -a - 2$; тогда

$$x = 1 \pm \sqrt{a^2 + 4a + 8},$$

и корнем опять-таки может быть только

$$x = 1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8}$$

при выполнении условий

$$-a - 2 \geq 0 \quad \text{и} \quad 1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8} > 3.$$

Убеждаемся в том, что при $a \leq -2$ значение $x = 1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8}$ — корень уравнения.

В случае $x \leq -1$ мы имеем уравнение

$$t^2 - 3t - (a - 1)(a + 2) = 0,$$

которое анализируется аналогично. При $a > -2$ получаем

$$x = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8},$$

а при $a < 1$ $x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$.

Р 32. Поскольку $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$, уравнение переписывается в виде

$$a^2 x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{2} - 1)^2 + \sqrt{x - 2} = 0 \quad \text{или} \quad (ax + \sqrt{2} - 1)^2 + \sqrt{x - 2} = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} x = 2, \\ ax + \sqrt{2} - 1 = 0, \end{cases}$$

и значит, $2a + \sqrt{2} - 1 = 0$, т.е. $a = (1 - \sqrt{2})/2$.

Р 33. а) Возводя в квадрат, приходим к уравнению $(x + a)^2 = a^2 - 2$. Значения $a = \pm\sqrt{2}$ не годятся (найденный по ним x не удовлетворяет условию $x \geq 2$). Если $|a| > \sqrt{2}$, находим

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 2}.$$

Условие задачи выполнено, если

$$-a - \sqrt{a^2 - 2} < 2 \leq -a + \sqrt{a^2 - 2}.$$

Остается решить несложную систему неравенств.

б) ОДЗ определяется условиями $x \in [2; 4]$, $x \in [a - 1; a + 1]$. Переписав уравнение в виде

$$a - 3 = \sqrt{1 - (x - a)^2} - \sqrt{1 - (x - 3)^2} \quad (*)$$

после домножения на сопряженное получим

$$(a - 3)(\sqrt{1 - (x - a)^2} + \sqrt{1 - (x - 3)^2}) = (a - 3)(2x - a - 3).$$

Если $a = 3$, то уравнение обращается в тождество $-8 = -8$, верное при $x \in [2; 4]$, т.е. данное значение параметра условию не удовлетворяет. При $a \neq 3$ имеем

$$\sqrt{1 - (x - a)^2} + \sqrt{1 - (x - 3)^2} = 2x - a - 3$$

и, складывая с (*), приходим к уравнению

$$x - a = \sqrt{1 - (x - 3)^2}.$$

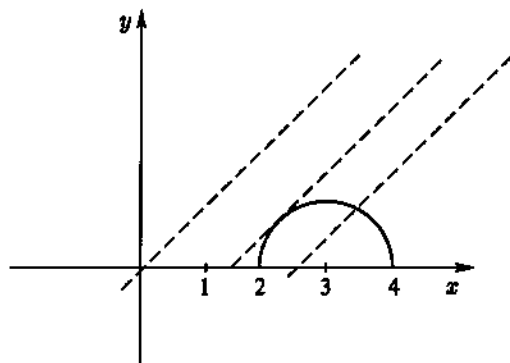


Рис. 9

Прямая $y = x - a$ имеет одну точку пересечения с полуокружностью

$$y = \sqrt{1 - (x - 3)^2}$$

в двух случаях (рис. 9): а) прямая касается полуокружности; б) прямая пересекает ее в диапазоне $x \in (3; 4]$.

Касание имеет место при $a = 3 \pm \sqrt{2}$. Однако в этих случаях не выполняется условие $x \in [a - 1; a + 1]$. Если прямая $y = x - a$ проходит через точку $(2; 0)$, то $a = 2$; если проходит через точку $(4; 0)$, то $a = 4$. Значит, $a \in (2; 4] \setminus \{3\}$.

Р 34. Уравнение заведомо не имеет решения при $2x^4 + x^3 < 0$, т.е. при $x \in (-1/2; 0)$. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{4\sqrt{2x^4 + x^3}}{4x^2 + x - 8} = a\sqrt[4]{4 - a^4}$$

(корни уравнения $4x^2 + x - 8 = 0$ являются решением задачи) и рассмотрим функцию $f(a) = a\sqrt[4]{4 - a^4}$. Она определена и непрерывна при $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$. Найдем ее множество значений на отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Для этого достаточно найти ее наименьшее и наибольшее значения. Производная

$$f'(a) = \sqrt[4]{4 - a^4} - a^4(4 - a^4)^{-3/4}$$

преобразовывается к виду

$$f'(a) = 2(2 - a^4)(4 - a^4)^{-3/4}$$

и обращается в нуль при $a = \pm\sqrt{2}$. Перемена знаков показывает, что это точки экстремума. При этом

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Поскольку на границах отрезка функция обращается в нуль, найденные значения — искомые минимум и максимум, т.е. $-\sqrt{2} \leq f(a) \leq \sqrt{2}$. Таким образом, исходное уравнение не будет иметь решений, если

$$\left| \frac{4\sqrt{2x^4 + x^3}}{4x^2 + x - 8} \right| > \sqrt{2}.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$16(2x^4 + x^3) > 2(4x^2 + x - 8)^2.$$

После упрощений получаем $63x^2 + 16x - 64 > 0$, откуда $x < -8/7$ или $x > 8/9$.

Кунсткамера

Р 1. Используем неравенство $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}$, которое непосредственно следует из неравенства Коши. Действительно:

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} + \sqrt{cd} &\leq \sqrt{(a+c)(b+d)} \Leftrightarrow ab + 2\sqrt{abcd} + cd \leq ab + cd + ad + bc \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{abcd} \leq ad + bc\end{aligned}$$

(четверка чисел a, b, c, d либо вся неотрицательна, либо неположительна). Равенство имеет место только в случае $ad = bc$.

Разложим подкоренные выражения на множители и перепишем уравнение так:

$$\sqrt{(x-1)(x+3)} + \sqrt{(x+1)(2x+1)} = \sqrt{2x(3x+4)}.$$

ОДЗ уравнения: $x \leq -3$ или $x \geq 1$.

Пусть $a = x - 1$, $b = x + 3$, $c = x + 1$, $d = 2x + 1$. Условие $ad = bc$ дает нам уравнение $(x-1)(2x+1) = (x+3)(x+1)$, откуда $x_{1,2} = (5 \pm \sqrt{41})/2$. В ОДЗ входит только $(5 + \sqrt{41})/2$.

Р 2. Это уравнение кажется более поздним ребенком в той же семье, что и пример 33 основной части параграфа; однако здесь можно выкрутиться, последовательно используя домножение на сопряженное. Действительно, перепишем уравнение так:

$$(10x^2 + 14x)(\sqrt{x^2 - 1} - x) + 2\sqrt{x^2 - 1} + 3x + 7 = 0$$

и перейдем к

$$-\frac{10x^2 + 14x}{\sqrt{x^2 - 1} - x} + 2\sqrt{x^2 - 1} + 3x + 7 = 0.$$

Избавляясь от знаменателя, получим после упрощений $5x^2 + 7x + 2 = \sqrt{x^2 - 1} \cdot (5x + 7)$.

Снова повторяя тот же фокус, пишем $(5x + 7)(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 2 = 0$ и снова домножаем и делим на сопряженное:

$$\frac{5x + 7}{x + \sqrt{x^2 - 1}} + 2 = 0,$$

откуда $2\sqrt{x^2 - 1} = -7x - 7$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = -53/45$, $x_2 = -1$, которые, конечно, нужно еще проверить.

Р 3. Рассматривая выражения под первым и последним радикалами как квадратные трехчлены относительно p и раскладывая их на множители, преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{(y-x-p)(2p-x-y)} + \sqrt{x-y+p} \cdot \sqrt{p-2x+4} + \sqrt{(2p-x-y)(2x-p-4)} = 4.$$

Положим $x - y + p = u$, $p - 2x + 4 = v$; тогда $2p - x - y = u + v - 4$. Имеем

$$\sqrt{u} \cdot \sqrt{4-u-v} + \sqrt{u} \cdot \sqrt{v} + \sqrt{v} \cdot \sqrt{4-u-v} = 4 \quad \text{или} \quad \sqrt{4-u-v}(\sqrt{u} + \sqrt{v}) = 4 - \sqrt{uv}.$$

Заменяем теперь $\sqrt{u} + \sqrt{v} = z \geq 0$, $\sqrt{uv} = w \geq 0$; тогда $u + v = z^2 - 2w$ и мы имеем

$$\sqrt{4 - z^2 + 2w} \cdot z = 4 - w.$$

После возведения в квадрат получаем уравнение

$$w^3 - 2(z^2 + 4)w + z^4 - 4z^2 + 16 = 0,$$

из которого либо $w = z^2 + 4 + 2z\sqrt{3}$, либо $w = z^2 + 4 - 2z\sqrt{3}$. Поскольку $w \leq 4$, первый вариант возможен, только если $z = 0$, $w = 4$; но это означает $u = v = 0$ и $\sqrt{uv} = 4$, чего быть не может. Итак, $w = z^2 + 4 - 2z\sqrt{3}$. Тогда

$$\begin{cases} \sqrt{u} + \sqrt{v} = z, \\ \sqrt{uv} = z^2 - 2z\sqrt{3} + 4, \end{cases}$$

Составляя вспомогательное квадратное уравнение $t^2 - zt + z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$, находим дискриминант

$$D = -3z^2 + 8z\sqrt{3} - 16 = -(z\sqrt{3} - 4)^2,$$

неотрицательность которого дает нам, наконец, $z = 4/\sqrt{3}$. Теперь уже легко найти $\sqrt{u} = \sqrt{v} = 2/\sqrt{3}$. Тогда

$$\begin{cases} x - y + p = \frac{4}{3}, \\ p - 2x + 4 = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

откуда $x = (3p + 8)/6$, $y = 3p/2$. Присутствие параметра здесь чисто номинальное — каким бы ни было p , найденные значения неизвестных обращают уравнение в тождество.

Ответы

1. $52 - 8\sqrt{39}$; 2. $\emptyset$; 3. $-239/45$; 2; 4. $1/4$; 5. $(\sqrt{13} - 1)/2$; 6. $61/62$;
7. $-1/5$; $(-5 \pm \sqrt{15})/5$; 8. $(4 - \sqrt{19})/2$; $1/2$; 9. -2 ; 10. 8; 11. $(1 + \sqrt{5})/2$;
12. $(3 + \sqrt{13})/2$; 13. $\pm \sqrt{1/18}$, $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/12$; 14. 7; 15. -1 ; 16. а) 12.
б) $\emptyset$; 17. а) $\emptyset$. б) 1; 18. а) $\emptyset$. б) $\emptyset$; 19. 1; 4; 20. 1; 21. $-1/3$;
22. $(2; -3/2)$; 23. 1; 24. 1; 25. -30 ; 26. 1; 27. 1; 28. $-3/2$;
29. $-1/3$; 30. -25 ; 1; 31. а) Если $a = 0$ или $1 \leq a \leq \sqrt[3]{4}$,

то $x = ((a \pm \sqrt{2\sqrt{a} - a^2})/2)^2$; при остальных a решений нет. б) $(a^4 + 2a^2 + 25)/4a^2$

при $0 < a \leq \sqrt{5}$; при других a решений нет. в) Если $a \leq -1 - \sqrt{2}$, то $x = x_2$;

если $\sqrt{2} - 1 \leq a \leq 1/2$, то $x = x_1$ и $x = x_2$; если $a > 1/2$,

то $x = x_1$, где $x_1 = (a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1})/2$, $x_2 = (a + 1 + \sqrt{a^2 + 2a - 1})/2$.

г) $x = 0$ при любом a . д) $x = a^2/4$ при $a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$; при других a решений нет. е) $x_1 = 0$, $x_2 = 64a/1025$ при $a \geq 0$; при $a < 0$ решений нет. ж) Если $a < -2$, то

$x_1 = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$, $x_2 = 1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8}$; если $a = -2$, то $x = -1$; если

$-2 < a < 1$, то $x_1 = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$, $x_2 = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ (причем в случае $a = -1/2$ эти значения совпадают и равны $-3/2$); если $a = 1$, то $x = -1$; если $a > 1$,

то $x_1 = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$, $x_2 = 1 + \sqrt{a^2 - 2a + 5}$; 32. $(1 - \sqrt{2})/2$;

33. а) $a \leq -3/2$; б) $(2; 3) \cup (3; 4]$; 34. $(-\infty; -8/7) \cup (-1/2; 0) \cup (8/9; +\infty)$.

Кунсткамера

1. $(5 + \sqrt{41})/2$; 2. $-53/45$, -1 ; 3. $x = (3p + 8)/6$, $y = 3p/2$ при любом p .

§ 6. Системы уравнений

Системы не пользуются любовью народной. Система из двух уравнений неизбежно воспринимается как *две* задачи, а если уж уравнений три... С детства в нас укореняется ощущение, что *несколько* неизвестных — это плохо. Классик писал: «Он не только не имел никакого плана, но вообще чувствовал себя растерянно, как ученик, которого заставили сразу решить задачу со многими неизвестными». (А. А. Фадеев, «Разгром»)

Знак фигурной скобки также не в фаворе: для ученика это своего рода узы, которыми его опутывают. Может быть, стоит вспомнить «доброе старое время», когда уравнения, составляющие систему, просто записывались в строчку, через запятую, друг за другом?

Общий метод решения системы, сколько бы уравнений (и неизвестных) она ни содержала, состоит в том, чтобы каким-то образом получить *одно* уравнение с *одним* неизвестным. При всей тривиальности этого утверждения оно всё же полезно. То, каким образом, получается это вожаденное уравнение, позволяет худо-бедно распределить системы по типам. А, распределив, уже начать и планомерное изучение.

Самый простой способ, конечно, *подстановка*. Выразить из первого уравнения одно неизвестное через другое и, подставив во второе, получить уравнение с одним неизвестным — что может быть приятнее? И такое иногда удается.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x^3 + y^2 = 1. \end{cases}$$

◀ Из первого уравнения каждое неизвестное можно выразить через другое, поэтому стоит задуматься, что лучше: выражать x через y или наоборот. Поскольку после подстановки кубическое уравнение получится «по любому», лучше выразить y , чтобы возводить в квадрат, а не в куб. Итак, подставляя

$$y = \frac{5 - 2x}{3}$$

во второе уравнение, получаем после преобразований:

$$9x^3 + 4x^2 - 20x + 16 = 0.$$

Это уравнение имеет целый корень $x = -2$, который оказывается единственным. Тогда $y = 3$. ▶

☛ **Ответ:** $(-2; 3)$.

Если нельзя непосредственно выразить неизвестное, может оказаться, что выражается целая *группа*, содержащая неизвестные. Это уже почти замена, но вводить лишние буквы, когда две уже есть, без крайней необходимости необязательно.

2. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = xy, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

◀ Преобразуем первое уравнение так: $x^2 + y^2 = (xy)^2$ и, подставив в него выражение для $x^2 + y^2$ из второго уравнения, получим $xy = \pm 2$. Теперь уже любое неизвестное выражается через другое, и система легко решается. ▶

🔑 **Ответ:** $(\sqrt{2}; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Не нужно, однако, преувеличивать значение метода подстановки (как и любого другого метода): иногда выразить одно неизвестное через другое можно, но это ни к чему хорошему не приводит.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y = 44, \\ y^3 - 3xy^2 + 81 = 0. \end{cases}$$

◀ Из первого уравнения можно, конечно, выразить $y = (x^3 - 44)/3x^2$, но едва ли подстановка (включающая возведение в куб) этого выражения во второе уравнение способна доставить много приятных минут. Что же делать?

Многие системы решаются переходом к *следствию*, т. е. к уравнению, полученному из уравнений исходной системы путем сложения, вычитания и т. д.

Если переписать второе уравнение в виде $3xy^2 - y^3 = 81$ и сложить с первым, то получится $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 125$ или $(x - y)^3 = 125$, т. е. $x - y = 5$. Отсюда $x = y + 5$; подставив это выражение во второе уравнение системы, придем к уравнению $2y^3 + 15y^2 - 81 = 0$, имеющему целый корень $y_1 = -3$; два других

$$y_{2,3} = \frac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4}.$$

Осталось найти x , пользуясь связью $x = y + 5$. Имеем:

$$x_1 = 2, \quad x_{2,3} = \frac{11 \pm 3\sqrt{33}}{4}.$$

🔑 **Ответ:** $(2; -3), ((11 - 3\sqrt{33})/4; (-9 - 3\sqrt{33})/4), ((11 + 3\sqrt{33})/4; (-9 + 3\sqrt{33})/4)$.

4. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

◀ И в этой системе сложение уравнений дает немедленный результат. Действительно, получается уравнение-следствие $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$, которое после выделения полных квадратов принимает вид

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 0.$$

Поскольку выражение вида $a^2 + b^2$ равно нулю, только если $a = b = 0$, отсюда следует, что $x = 3$, $y = -2$. Подстановка (необходимая!) в уравнения исходной системы показывает, что найденная пара чисел является решением. ►

☛ **Ответ:** (3; -2).

Выделение полного квадрата спасает и почти безнадежные с виду системы.

5. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

◀ Преобразуем первое уравнение:

$$(x^2 - 2xy + y^2) + 2(x - y) + 1 + (y^2 - 6y + 9) = 0 \quad \text{или} \quad (x - y + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ y - 3 = 0, \end{cases}$$

и $x = 2$, $y = 3$. Подставляя эти значения во второе уравнение исходной системы, убеждаемся, что получается верное числовое равенство. ►

☛ **Ответ:** (2; 3).

Пытаясь обобщить приобретенный небольшой опыт, скажем, что при решении систем, как правило, следует стремиться к любому промежуточному результату, т. е. к любому соотношению между неизвестными, которое можно объединить с тем или иным уравнением исходной системы.

Иногда уравнения перед сложением предварительно домножают на какие-либо удачно подобранные числа (или алгебраические выражения). В частности, так решаются *однородные системы* (т. е. системы, либо прямо содержащие однородные уравнения второй или большей степени, либо сводимые к таким уравнениям).

6. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ 2x^2 - 4xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

◀ Напомним, что однородное уравнение 2-й степени имеет вид

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

и решается заменой $x/y = t$.

В нашем случае правые части обеих уравнений отличны от нуля, поэтому сразу пытаться решать их указанной заменой неразумно. Зато уравнений два, поэтому можно добиться того, чтобы правые их части совпали: для этого первое уравнение мы домножим на 17, а второе — на 16. Теперь, приравняв левые части, получим уравнение-следствие

$$17x^2 - 17y^2 = 32x^2 - 64xy + 48y^2 \quad \text{или} \quad 15x^2 - 64xy + 65y^2 = 0.$$

Отсюда 1) $3x = 5y$; 2) $5x = 13y$. Объединяя каждое из этих соотношений с первым уравнением, уже подстановкой находим: $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = -5$, $y_2 = -3$; $x_3 = 13/3$, $y_3 = 5/3$; $x_4 = -13/3$, $y_4 = -5/3$. ▶

☛ **Ответ:** $(5; 3)$, $(-5; -3)$, $(13/3; 5/3)$, $(-13/3; -5/3)$.

Системы, в целом, можно подразделить на две группы: в одних уравнения крепко держатся друг за друга, и тогда для того чтобы сделать первый шаг в решении, необходимо использовать *оба уравнения*. В других системах уравнения фактически независимы друг от друга; в этих системах на первом шаге можно сосредоточить свои усилия на одном из уравнений и, получив некоторый промежуточный результат (например, выразив x через y), уже с этим результатом перейти ко второму уравнению. Характерный случай: одно из уравнений содержит взаимно обратные величины.

7. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + xy = 120. \end{cases}$$

◀ Пусть $(x+y)/(x-y) = u$, тогда первое уравнение записывается в виде

$$u + \frac{1}{u} = \frac{13}{6};$$

отсюда легко находится $u_1 = 2/3$, $u_2 = 3/2$.

Если $(x + y)/(x - y) = 2/3$, то $3x + 3y = 2x - 2y$ или $x = -5y$. Второе значение вспомогательной переменной дает нам $x = 5y$. Вот теперь пора перейти ко второму уравнению системы.

Подставив в него $y = -x/5$, получим $4x^2/5 = 120$, откуда $x = \pm 5\sqrt{6}$, тогда $y = \mp \sqrt{6}$. Если $y = x/5$, то имеем $6x^2/5 = 120$ или $x = \pm 10$, $y = \pm 2$. ►

✎ **Ответ:** $(10; 2)$, $(-10; -2)$, $(5\sqrt{6}; -\sqrt{6})$, $(-5\sqrt{6}; \sqrt{6})$.

8. Не выражая одно неизвестное через другое, решить систему

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 4. \end{cases}$$

◀ Разумеется, такая формулировка предполагает, что мы, вспоминая теорему Виета (точнее — обратную ей) составим вспомогательное квадратное уравнение $z^2 - 6z + 4 = 0$, корни которого будут решениями предложенной системы. Поскольку $z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$, немедленно пишем ответ. ►

✎ **Ответ:** $x_1 = 3 + \sqrt{5}$, $y_1 = 3 - \sqrt{5}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5}$, $y_2 = 3 + \sqrt{5}$.

Дальнейшим развитием этого примера являются *симметрические (или симметричные) системы*, т.е. системы, которые не меняются при замене неизвестных $x \leftrightarrow y$. Эти системы содержат выражения вида xy , $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ и т.п., умноженные на числа и друг на друга. Если ввести новые переменные $x + y = u$, $xy = v$, то все перечисленные выражения связаны с u и v следующим образом:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v, \\ x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 2v - v) = u^3 - 3uv, \\ x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2 \dots \end{aligned}$$

9. Решить систему

$$\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8. \end{cases}$$

◀ Заменяя $x + y = u$, $xy = v$, получим систему

$$\begin{cases} 2u + v = 5, \\ u^2 - 2v + 3u = 8, \end{cases}$$

которая решается подстановкой. Выражаем $v = 5 - 2u$ и подставляем во второе уравнение; мы получим $u^2 + 7u - 18 = 0$, откуда $u_1 = -9$, $u_2 = 2$. Тогда $v_1 = 23$, $v_2 = 1$.

Теперь для нахождения x и y имеем две системы

$$1) \begin{cases} x + y = -9, \\ xy = 23, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Приняв к сведению метод решения примера 7, сразу пишем два квадратных уравнения: 1) $z^2 + 9z + 23 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 1 = 0$. Первое корней не имеет, из второго находим $z = 1$. Тогда $x = y = 1$ — единственное решение системы. ►

✎ **Ответ:** (1; 1).

10. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

◀ И эта система — явно симметрическая, однако описанный метод наталкивается на препятствия: получается система

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 1, \\ u^4 - 4u^2v + 2v^2 = 1, \end{cases}$$

решать которую не очень понятно как. Значит, нужно идти другим путем. Заметим, что система удовлетворяется в двух случаях: $x = 1, y = 0$; $x = 0, y = 1$. Видимо, других решений нет. Действительно, решениями, отличными от найденных, могут быть только такие пары (x, y) , что

$$0 < |x| < 1, \quad 0 < |y| < 1.$$

Если оба числа x, y положительны, то решений нет, так как $x^3 + y^3 > x^4 + y^4$ в силу неравенств $x^4 < x^3, y^4 < y^3$, а для решений системы должно быть выполнено равенство

$$x^3 + y^3 = x^4 + y^4.$$

Если же хотя бы одно из чисел отрицательно, то в силу условия $x^3 + y^3 = 1$, второе должно быть больше 1, что невозможно. Итак, ответ: (1; 0), (0; 1). ►

✎ **Ответ:** (1; 0), (0; 1).

Если система не решается подстановкой, не распадается на отдельные уравнения и не является однородной или симметрической, можно попробовать перейти к следствию путем *обобщенного сложения*. Иными словами — домножить каждое из уравнений на какие-либо числа или выражения, содержащие неизвестные, и сложить; полученное уравнение (с двумя, а если повезет, то и с одной переменной) нужно либо просто решить, либо разложить на множители, либо еще каким-то образом преобразовать.

Мы уже использовали этот метод при решении примеров 3–5. Продолжим серию.

11. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5. \end{cases}$$

◀ Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым, мы получим

$$7x^2 - 14x - 7 = 0, \quad \text{откуда} \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Теперь умножим первое уравнение на 3, а второе на -2 и сложим; мы получим $7y^2 + 14y + 7 = 0$, откуда $y = -1$. ▶

☛ **Ответ:** $(1 - \sqrt{2}; -1)$, $(1 + \sqrt{2}; -1)$.

12. Решить систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x - 2y = 1, \\ 2x^2 + y^2 + 4xy - x + y = 1. \end{cases}$$

◀ Здесь, в отличие от предыдущего примера, сразу избавиться от одного из неизвестных нельзя. Поступим иначе. Домножим второе уравнение на 2 и вычтем из него первое уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + 4y = 1 &\Rightarrow (x-1)(x+1) + 4y(x+1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+1)(x-1+4y) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда 1) $x = -1$; 2) $x - 1 + 4y = 0$.

Если $x = -1$, то второе уравнение принимает вид $y^2 - 3y + 2 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. И имеем две пары $(-1; 1)$ и $(-1; 2)$.

Если $x = 1 - 4y$, то, снова подставив во второе уравнение, получим

$$17y^2 - 7y = 0,$$

откуда $y_3 = 0$, $y_4 = 7/17$. Тогда $x_3 = 1$, $x_4 = -11/17$. ▶

☛ **Ответ:** $(-1; 1)$, $(-1; 2)$, $(1; 0)$, $(-11/17; 7/17)$.

13. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3xy - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

◀ Эта система выглядит как двойник предыдущей, однако здесь разложить на множители удастся не уравнение, полученное в результате обобщенного сложения исходных, а уже само первое уравнение системы — правда для этого нужно рассмотреть его как квадратное относительно x . Действительно:

$$x^2 + (y + 8)x - 2y^2 + 10y + 12 = 0,$$

$$D = y^2 + 16y + 64 + 8y^2 - 40y - 48 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2.$$

Значит,

$$x_1 = \frac{-y - 8 + 3y - 4}{2} = y - 6, \quad x_2 = -2y - 2.$$

Мы выразили одно неизвестное через другое. Остается подставить каждое из соотношений $x = y - 6$ и $x = -2y - 2$ во второе уравнение. Окончательный ответ: $(-4; 2)$, $(-3; 3)$, $(-2; 0)$. ▶

☛ **Ответ:** $(-4; 2)$, $(-3; 3)$, $(-2; 0)$.

14. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = y, \\ \frac{y - 3x}{x^2 + y^2} = x - 3. \end{cases}$$

◀ Домножим первое уравнение на x и сложим со вторым, умноженным на y ; после упрощения получится $2xy - 3y = 1$.

Теперь домножим первое уравнение на y , а второе — на $(-x)$ и снова сложим; получится $y^2 - x^2 + 3x = 3$. Таким образом, мы приходим к системе-следствию

$$\begin{cases} 2xy - 3y = 1, \\ y^2 - x^2 + 3x = 3. \end{cases}$$

Из первого уравнения $y = 1/(2x - 3)$; тогда

$$y^2 = \frac{1}{4x^2 - 12x + 9}$$

и второе уравнение принимает вид

$$\frac{1}{4(x^2 - 3x) + 9} - (x^2 - 3x) = 3.$$

Пусть $x^2 - 3x = u$, тогда

$$(u + 3)(4u + 9) = 1 \quad \text{или} \quad 4u^2 + 21u + 26 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -2, \quad u_2 = -\frac{13}{4}.$$

В первом случае получаем уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2; \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 1.$$

Если же $x^2 - 3x + 13/4 = 0$, то решений нет.

Отметим, что найденные пары чисел необходимо проверить подстановкой в систему. ►

☛ **Ответ:** $(1; -1), (2; 1)$.

Иногда не надо бояться и более энергичных действий — например, умножения (деления) уравнений друг на друга и даже возведения их в квадрат!

15. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 40, \\ \frac{y^3}{x} + xy = 10. \end{cases}$$

◀ Перемножим уравнения; мы получим $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 400$ или $(x^2 + y^2)^2 = 400$, откуда $x^2 + y^2 = 20$. Теперь перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y, \\ y^3 + yx^2 = 10x, \end{cases}$$

и поделим уравнения друг на друга; после упрощений получим $x^2 = 4y^2$.

Учитывая полученное выше, моментально найдем $y^2 = 4$, тогда $x^2 = 16$. Поскольку из вида системы следует, что неизвестные должны быть одного знака (иначе левые части равенств отрицательны), решением служат две пары: $(4; 2)$ и $(-4; -2)$. ►

☛ **Ответ:** $(-4; -2), (4; 2)$.

16. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x + 3y) = 36, \\ \sqrt{y}(y + 3x) = 28. \end{cases}$$

◀ Поскольку $x \neq 0$, $y \neq 0$, можно разделить 1-е уравнение на 2-е. Мы получим

$$\sqrt{\frac{x}{y}} \frac{x + 3y}{y + 3x} = \frac{9}{7}.$$

Заменим $\sqrt{x/y} = u$, тогда $x = u^2 y$; уравнение принимает вид

$$\frac{u(u^2 y + 3y)}{y + 3u^2 y} = \frac{9}{7}$$

или, после сокращения на y и преобразований, $7u^3 - 27u^2 + 21u - 9 = 0$. Единственным корнем этого уравнения является $u = 3$. Тогда $x = 9y$, и, подставляя во второе уравнение системы, получаем $28y\sqrt{y} = 28$, т. е. $y = 1$, $x = 9$. ►

☛ **Ответ:** (9; 1).

17. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{5x(y^2 + 1)}{x^2 + y^2} = 3, \\ \frac{5y(x^2 - 1)}{x^2 + y^2} = 4. \end{cases}$$

◀ Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим; освобождаясь от знаменателя, имеем

$$25x^2(y^2 + 1)^2 + 25y^2(x^2 - 1)^2 = 25(x^2 + y^2)^2; \quad x^2 y^4 + y^2 x^4 + x^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2, \\ (x^2 y^2 + 1)(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2, \quad x^2 y^2 + 1 = x^2 + y^2, \quad x^2(y^2 - 1) = y^2 - 1.$$

Дальнейшее вполне очевидно. ►

☛ **Ответ:** (3; 1), (1/3; 1).

Замена переменной (переменных) остается страшной силой и в деле решения систем. Мы уже не раз имели возможность в этом убедиться. Вот еще один характерный случай.

18. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} - \sqrt{x-3} + 2 = 0, \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{y-6} = 5. \end{cases}$$

◀ Пусть

$$\sqrt{x-y} = u, \quad \sqrt{x-3} = v, \quad \sqrt{y-6} = w;$$

при этом $u, v, w \geq 0$. Поскольку $x - y = u^2$, $x - 3 = v^2$, вычитая, получим $3 - y = u^2 - v^2$. Но $y - 6 = w^2$; отсюда

$$3 - u^2 + v^2 = 6 + w^2 \quad \text{или} \quad u^2 - v^2 + w^2 + 3 = 0.$$

Теперь для новых переменных имеем систему

$$\begin{cases} u - v + 2 = 0, \\ u + w = 5, \\ u^2 - v^2 + w^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

Не стоит расстраиваться из-за того, что число неизвестных увеличилось как известно, воюют не числом, а умением. Ведь первые два уравнения последней системы — линейные. Выразим v и w через u и подставим $v = u + 2$ и $w = 5 - u$ в третье уравнение:

$$u^2 - (u + 2)^2 + (5 - u)^2 + 3 = 0 \Rightarrow u^2 - 14u + 24 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 12.$$

Соответственно этому $v_1 = 4, v_2 = 14; w_1 = 3, w_2 = -7$. Вторая тройка значений не подходит, поскольку новые неизвестные должны быть неотрицательны. Значит,

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ x - 3 = 16, \end{cases} \Rightarrow \text{ответ: } (19; 15). \quad \blacktriangleright$$

 **Ответ:** (19; 15).

Коль скоро нам пришлось столкнуться с системой трех уравнений с тремя неизвестными, рассмотрим несколько примеров.

19. Решить систему

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ 2x + 5y + 6z = 6, \\ 3x - 4y - z = 2. \end{cases}$$

Эта система — линейная, и для ее решения имеется очень приятный метод, заключающийся в *последовательном исключении неизвестных*: сначала из 2-го и 3-го уравнений исключается x , а потом из третьего уравнения исключается y . Этот метод носит имя Гаусса, *короля математиков*.

◀ Итак, прибавим ко второму уравнению первое, домноженное на -2 , система примет вид

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ 7y + 2z = -8, \\ 3x - 4y - z = 2. \end{cases}$$

Теперь к третьему уравнению прибавим первое, домноженное на -3 ; получим

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ 7y + 2z = -8, \\ -y - 7z = -19. \end{cases}$$

Для удобства поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ -y - 7z = -19, \\ 7y + 2z = -8. \end{cases}$$

По неписаному правилу, на месте исключенных неизвестных можно оставлять пробелы. Чтобы избавиться от y в третьем уравнении, прибавим к нему второе уравнение, домноженное на 7. Получим

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7, \\ -y - 7z = -19, \\ -47z = -141. \end{cases}$$

Процесс завершен: система приобрела, как говорят, *треугольный вид*. Осталось собрать плоды. Движемся в обратном направлении: начиная с третьего уравнения, находим $z = 3$. Теперь из второго уравнения $y = 19 - 7z = -2$. Наконец, из первого уравнения $x = y - 2z + 7 = -1$. ►

☛ **Ответ:** $(-1; -2; 3)$.

Метод Гаусса универсален в том смысле, что его можно применять к линейным системам с любым количеством неизвестных. Читатель, которому посчастливится на первом курсе изучать основы линейной алгебры, будет иметь возможность убедиться в этом на практике.

Когда уравнений не 2, а 3, и они не линейные, трудности нарастают. Какие советы по решению можно тут дать? Наблюдайте, используйте симметрию, подмечайте любую неслучайность в коэффициентах.

20. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19xy + 11yz + 7xz, \\ x^3 + z^3 = 26(xy + yz + xz), \\ y^3 + z^3 = 47xy + 39yz + 35xz. \end{cases}$$

◀ Вычитая из третьего уравнения первое, мы получим

$$z^3 - x^3 = 28(xy + yz + xz).$$

Теперь, поделив полученное соотношение на второе уравнение системы (предполагая пока, что это возможно), придем к равенству

$$\frac{z^3 - x^3}{z^3 + x^3} = \frac{14}{13},$$

откуда $27x^3 = -z^3$, т. е. $z = -3x$.

Указанное деление невозможно, если обращается в нуль по крайней мере одно из выражений:

$$x^3 + z^3 \quad \text{или} \quad xy + yz + xz.$$

Если $x^3 + z^3 = 0$, т.е. $x = -z$, то $x = z = 0$, тогда и $y = 0$.

Теперь, подставляя $z = -3x$ во 2-е уравнение, получим

$$x^3 = 2xy + 3x^2$$

или, поскольку теперь $x \neq 0$, $x^2 = 3x + 2y$.

Подставляя $z = -3x$ в 1-е и 3-е уравнения, имеем после упрощений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = -21x^2 - 14xy, \\ y^3 - 27x^3 = -105x^2 - 70xy, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = -7x(3x + 2y), \\ y^3 - 27x^3 = -35x(3x + 2y), \end{cases}$$

откуда

$$\frac{x^3 + y^3}{y^3 - 27x^3} = \frac{1}{5} \quad \text{или} \quad y^3 = -8x^3 \Rightarrow y = -2x.$$

Подставляя $y = -2x$ в равенство $x^2 = 3x + 2y$, находим

$$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 3.$$

☛ **Ответ:** (0; 0; 0) и (-1; 2; 3).

21. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 8x + 20y - 12z = 0, \\ y^2 + 7x - 18y + 11z - 11 = 0, \\ z^2 + 8x + 2y - 10z - 11 = 0. \end{cases}$$

◀ Рассматривая, замечаем, что можно избавиться от y : вначале сложив первое и второе уравнения, а потом отняв от результата третье. Таким образом, мы получим уравнение $x^2 - z^2 - 9x + 9z = 0$, или $(x - z)(x + z - 9) = 0$.

Если $x - z = 0$, то первое уравнение принимает вид

$$x^2 - 20x - y^2 + 20y = 0 \quad \text{или} \quad (x - y)(x + y) = 20(x - y),$$

откуда а) $x = y$, б) $x + y = 20$.

Случай а) дает две тройки решений

$$(\sqrt{11}; \sqrt{11}; \sqrt{11}) \text{ и } (-\sqrt{11}; -\sqrt{11}; -\sqrt{11}).$$

Случай б) не дает решений.

Если теперь $x + z = 9$, то, складывая первые два уравнения, получаем

$$x^2 + 2y - 20 = 0,$$

откуда $y = 10 - x^2/2$. После подстановки первое уравнение принимает вид

$$x^4 - 4x^2 - 16x + 32 = 0 \quad \text{или} \quad x^2(x^2 - 4) = 16(x - 2),$$

откуда 1) $x = 2$; 2) $x^3 + 2x^2 - 16 = 0$.

Случай 1) дает тройку (2; 8; 7).

Уравнение $x^3 + 2x^2 - 16 = 0$ имеет единственный корень $x = 2$. ►

⦿ **Ответ:** (2; 8; 7), $(\sqrt{11}; \sqrt{11}; \sqrt{11})$, $(-\sqrt{11}; -\sqrt{11}; -\sqrt{11})$.

22. Решить систему

$$\begin{cases} xy + 2yz^2 - 4z^3 = 0, \\ y - yz - xz = 0, \\ x + y = z^2. \end{cases}$$

◀ Для решения этой системы простого сложения (вычитания) не достаточно, поэтому применим сложение с домножением: сложим первое уравнение со вторым, умноженным на $2z$; мы получим $xy - 4z^3 = 2zy - 2xz^2$, откуда $y(2z + x) = 2z^2(2z + x)$.

Если $2z + x = 0$, т. е. $x = -2z$, и из третьего уравнения $y = z^2 + 2z$. Подставляя все это в первое уравнение, получим

$$2z^4 - 2z^3 - 4z^2 = 0,$$

откуда $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 2$. Тогда

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad y_2 = -1, \quad x_3 = -4, \quad y_3 = 8.$$

Если $y = 2z^2$, то $x = -z^2$; после подстановки в первое уравнение получаем $2z^4 - 4z^3 = 0$, что новых решений не дает. ►

⦿ **Ответ:** (0; 0; 0), (2; -1; -1), (-4; 8; 2).

23. Решить систему

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2xy, \\ 2x + 3xz + 8z = 0, \\ 6y + yz = 4z. \end{cases}$$

◀ Тройка $(0;0;0)$ является решением; теперь, чтобы устранить асимметрию, разделим уравнения на xy , xz и yz соответственно, считая, что $x, y, z \neq 0$. Мы получим систему

$$\begin{cases} 3b + 2a = 2, \\ 2c + 3 + 8a = 0, \\ 6c + 1 = 4b, \end{cases} \quad \text{где} \quad a = \frac{1}{x}, \quad b = \frac{1}{y}, \quad c = \frac{1}{z}.$$

Ее решение — тройка $a = -1/2$, $b = 1$, $c = 1/2$. Отсюда $x = -2$, $y = 1$, $z = 2$. ▶

☛ **Ответ:** $(-2; 1; 2)$.

24. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ y^2 + yz + z^2 = 19, \\ z^2 + zx + x^2 = 28. \end{cases}$$

◀ Конечно, мы замечаем и то, что уравнения системы — однородные, и то, что $37 - 28 = 28 - 19$; поэтому, вычитая из первого уравнения третье, а из третьего — второе, получаем два уравнения-следствия:

$$y^2 - z^2 + xy - zx = 9 \quad \text{или} \quad (y - z)(x + y + z) = 9, \quad \text{и} \quad (x - y)(x + y + z) = 9.$$

Отсюда $y - z = x - y$ или $y = (x + z)/2$. Подставляя это выражение в равенство $(x - y)(x + y + z) = 9$, приходим к соотношению $x^2 - z^2 = 12$. Теперь можно составить однородную систему-следствие

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = 12, \\ z^2 + zx + x^2 = 28, \end{cases}$$

с двумя переменными, решение которой уже пройденный этап для нас.

Разумеется, все найденные таким образом решения требуют проверки подстановкой в исходную систему. ▶

☛ **Ответ:** $(4; 3; 2)$, $(-4; -3; -2)$, $(10/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; -8/\sqrt{3})$,
 $(-10/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; 8/\sqrt{3})$.

25. Решить систему

$$\begin{cases} xz^2 + 2x^3yz = 3yz, \\ 3x^2y^2 + yz = 4x^3z^2, \\ z^2 + 6x^4y^2z^2 = 7x^2y^3. \end{cases}$$

◀ А в этой системе первые два уравнения можно считать однородными по y и z . Поэтому, деля каждое из них на y^2 и полагая $z/y = t$, получим вспомогательную систему

$$\begin{cases} xt^2 + 2x^3t = 3, \\ 4x^3t^2 - t = 3x^2. \end{cases}$$

Домножая первое уравнение на x^2 и вычитая результат из второго, получим $3x^3t^2 - 2x^5t - t = 0$, откуда

1) $t = 0$, что дает тройку $x = y = z = 0$;

2) $3x^3t - 2x^5 - 1 = 0$, т. е.

$$t = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3x^3} \quad (x \neq 0).$$

Подставим это соотношение в во второе уравнение вспомогательной системы; после упрощений мы придем к уравнению $16x^5 + 1/x^5 - 17 = 0$, откуда 1) $x^5 = 1$; 2) $x^5 = 1/16$.

Случай 1) дает $x = 1$; тогда $t = 1$ и $z = y$. Третье уравнение исходной системы принимает вид $y^2 + 6y^4 = 7y^3$, откуда, поскольку $y \neq 0$, $y = 1$ или $y = 1/6$. Итак имеем еще две тройки решений

$$x = y = z = 1; \quad x = 1, \quad y = z = \frac{1}{6}.$$

Если $x^5 = 1/16$, т. е. $x = 2^{-4/5}$, то $t = 6 \cdot 2^{-8/5}$. Отсюда $z = 6 \cdot 2^{-8/5}y$. Подставив всё это в третье уравнение, получим после упрощений квадратное уравнение $6^3 \cdot 2^{-24/5} \cdot y^2 - 7y + 36 \cdot 2^{-8/5} = 0$, дискриминант которого $D = = 49 - 3^5 \cdot 2^{3/5} < 0$. ▶

☛ **Ответ:** $(0; 0; 0)$, $(1; 1; 1)$, $(1; 1/6; 1/6)$.

Наконец, остаются *экстремальные случаи*, т. е. системы, в которых для решения необходимы оценки левых и правых частей, применение неравенств, исследование функций и проч. Первой ласточкой можно считать пример 10; разрабатываем тему дальше.

26. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 2 = 0, \\ x^2y^3 + y^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

◀ Первое уравнение можно переписать так: $(x-1)^2 + 1 = y^2$; откуда следует, что $y^2 \geq 1$. Из второго уравнения

$$y^3 = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Но при любых значениях x имеем

$$\frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1,$$

поскольку это неравенство равносильно такому: $x^2 + 1 \geq 2x$ или $(x - 1)^2 \geq 0$. Значит, теперь $y^3 \leq 1$. Два полученных неравенства удовлетворяются только в одном случае — при $y = 1$, и уже не составит труда найти второе неизвестное: $x = 1$. ►

❧ **Ответ:** (1; 1).

Если уравнения системы являются квадратными относительно какой-либо переменной, то решающим шагом в решении может стать оценка соответствующего дискриминанта.

27. Решить систему

$$\begin{cases} xy - y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + 12 = 6x + 4y. \end{cases}$$

◀ Перепишем первое уравнение в виде $y^2 - xy + 4 = 0$ и рассмотрим как квадратное относительно y . Условие неотрицательности его дискриминанта даст нам неравенство $x^2 - 16 \geq 0$, откуда $|x| \geq 4$.

Выделим во втором уравнении полные квадраты:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Если $|x| > 4$, то уже первая скобка строго больше 1 и равенство невозможно. Значит, $|x| = 4$, а точнее $x = 4$ (при $x = -4$ равенство опять-таки невозможно ни при каком y). Тогда $y = 2$. Первому уравнению пара (4; 2) также удовлетворяет. ►

❧ **Ответ:** (4; 2).

Вместо оценки дискриминанта можно использовать неравенство

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

Так, в предыдущей системе из первого уравнения

$$x = \frac{y^2 + 4}{y} = y + \frac{4}{y} \geq 4$$

(из первого уравнения следует, что обе переменные одного знака, а из второго — что этот знак положительный). И дальше аналогично.

28. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \sqrt{x-y} = 0, \\ y^2 - \sqrt{x-y-1} = 4. \end{cases}$$

◀ Условие существования второго корня: $x - y - 1 \geq 0$ дает нам $x - y \geq 1$. Но если $x - y > 1$, то и $\sqrt{x-y} > 1$, и первое уравнение не может иметь решения, поскольку $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ и, таким образом,

$$x^2 + 2x + \sqrt{x-y} = (x+1)^2 + (\sqrt{x-y} - 1) > 0.$$

Значит, $x - y = 1$. Отсюда уже легко найти: $x = -1$, $y = -2$. ►

☞ **Ответ:** $(-1; -2)$.

29. Решить систему

$$\begin{cases} x^{1999} + y^{1999} = (1-x)^{1/1999} - (1+y)^{1/1999}, \\ x - y = 3998. \end{cases}$$

◀ Прежде всего положим $-x = z$ и перепишем первое уравнение так:

$$y^{1999} + (1+y)^{1/1999} = z^{1999} + (1+z)^{1/1999}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^{1999} + (1+t)^{1/1999}$; эта функция строго возрастает как сумма двух возрастающих функций, значит, равенство $f(y) = f(z)$ возможно только, если $y = z$. Осталось решить систему

$$\begin{cases} y = z, \\ y + z = -3998. \end{cases}$$

☞ **Ответ:** $x = 1999$, $y = -1999$.

30. Решить систему

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2, \\ x^2 y^2 + 1 = 2y^2. \end{cases}$$

◀ Заменим $x^2 = u \geq 0$, $y^2 = v \geq 0$; имеем вспомогательную систему

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2, \\ uv + 1 = 2v. \end{cases}$$

На вид — ничего страшного. Однако выразив из второго уравнения $v = 1/(2-u)$ и подставив в первое, придем (не найдя по дороге поводов сделать помогающую решению замену) к уравнению $u^4 - 4u^3 + 2u^2 + 8u - 7 = 0$, которое хотя и имеет целый корень $u = 1$, но только один. После деления на $u - 1$ получаем уравнение $u^3 - 3u^2 - u + 7 = 0$. Его корни найти затруднительно (не идти же на поклон к доктору Кардано). Хуже всего то, что они есть, поскольку каждое кубическое уравнение имеет хотя бы один корень. Спасение в том, что нам нужны не просто корни этого уравнения, а такие корни, которые удовлетворяли бы системе вместе с соответствующим значением v . Попробуем доказать, что если $u \neq 1$, то система решений не имеет. Это уже вполне реально.

Во-первых, вспомним про условие $u \geq 0$. Во-вторых, в силу первого уравнения решением системы могут быть только такие значения неизвестных, которые удовлетворяют неравенству $|u| \leq \sqrt{2}$. Таким образом, остается доказать, что при $u \in [0; \sqrt{2}]$ система решений не имеет. Из спортивного интереса постараемся обойтись без производной (с использованием которой легко доказывается, что написанное выше кубическое уравнение не имеет корней на рассматриваемом отрезке).

Пусть вначале $1 < u \leq \sqrt{2}$; тогда из формулы $v = 1/(2-u)$ следует, что $v > 1$. Значит, $u^2 + v^2 > 2$ и первое уравнение вспомогательной системы не удовлетворяется. Пусть теперь $0 \leq u < 1$; тогда

$$1 - u > 0, \quad 2 - u > 1 \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{2-u} < 1.$$

В этом случае $u^2 + v^2 < 2$.

Итак, $u = v = 1$. ►

☛ **Ответ:** $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; -1)$.

31. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6z = 11, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + 13 = 0. \end{cases}$$

◀ Имущественное неравенство: неизвестных три, а уравнений — только два — указывает на неизбежность применения экстремальных методов. Пойдем напролом: выразим из первого уравнения

$$x = \frac{11 - 3y - 6z}{2}$$

и подставим во второе, которое представим как квадратное относительно y . После упрощений получим

$$13y^2 + (36z - 46)y + 40z^2 - 68z + 41 = 0.$$

В виде исключения воспользуемся формулой сокращенного дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = -4(7z - 1)^2.$$

Это выражение неотрицательно только при $z = 1/7$. Тогда $y = (23 - 18z)/13 = 11/7$. И наконец, $x = 19/7$. ►

☛ **Ответ:** $(19/7; 11/7; 1/7)$.

32. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0, \\ y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0, \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0. \end{cases}$$

◀ Если после созерцания этого во все стороны симметричного узора вам, читатель, не придет в голову рассмотреть уравнение $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, т. е. $(x - 2)^3 = 0$, то не повредят несколько уроков ясновидения в одном из столичных экстрасенс-центров. После это вам станет очевидно, что решением системы является тройка $(2; 2; 2)$. Будут ли у системы другие решения? — за ответом на этот вопрос к шаманам можно не обращаться. Обойдемся своими силами.

Предположим, что $x < 2$; тогда $x^3 < 8$ и из первого уравнения получаем $6z^2 - 12z + 8 < 8$ или $0 < z < 2$. Тогда из третьего уравнения таким же образом находим, что $0 < y < 2$. Сложим же теперь все три уравнения; мы получим

$$(x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 = 0$$

и при $x < 2$, $y < 2$, $z < 2$ левая часть отрицательна — решений нет. То же самое получается в предположении $x > 2$. ►

☛ **Ответ:** $(2; 2; 2)$.

33. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} = 5, \\ x + y + 2 = 3x^2. \end{cases}$$

◀ После выделения полных квадратов первое уравнение принимает вид

$$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 5, \quad (*)$$

и мы с удивлением узнаем здесь формулу расстояния между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на координатной плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Иными словами, уравнение (*) можно записать так: $d_1 + d_2 = 5$, где

$d_1 = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$ — расстояние между точками $A(4; 0)$ и $M(x; y)$;

$d_2 = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$ — расстояние между точками $B(0; 3)$ и $M(x; y)$.

В силу того, что

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

уравнение (*) выражает факт принадлежности точки $M(x; y)$ отрезку AB .

Составим уравнение прямой AB . Ищем его в виде

$$y = kx + b.$$

Поскольку прямая пересекает ось ординат в точке $B(0; 3)$, ясно, что $b = 3$. А угловой коэффициент $k = -3/4$. Значит, $y = -3/4x + 3$.

Подставляя это выражение во второе уравнение исходной системы, получим квадратное уравнение

$$3x^2 - \frac{1}{4}x - 5 = 0,$$

откуда $x = 4/3$, следовательно, $y = 2$. (Отрицательный корень нам не подходит.) ►

☛ **Ответ:** $(4/3; 2)$.

При решении систем трех уравнений, отличающихся чрезмерной симметричностью, иногда добрым словом поминаешь старину Виета. И его теорему — которую, как мы помним, можно применять не только к квадратному уравнению, но и к уравнениям третьей степени.

$$34. \begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + yz + zx = -1, \\ xyz = -2. \end{cases}$$

◀ Поскольку ровно так и формулируется теорема Виета для кубического уравнения: если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q, \\ x_1x_2x_3 = -r, \end{cases}$$

для решения системы

$$\begin{cases} x + y + z = -p, \\ xy + yz + zx = q, \\ xyz = -r. \end{cases}$$

нужно составить вспомогательное кубическое уравнение $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, всевозможные перестановки корней которого дадут решения системы.

В данном случае составляем уравнение $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$. Его корни $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$. Поэтому решением системы являются всевозможные тройки, образованные из этих корней. ►

⦿ **Ответ:** $(-1; 1; 2)$, $(1; -1; 2)$, $(-1; 2; 1)$, $(1; 2; -1)$, $(2; -1; 1)$, $(2; 1; -1)$.

35.
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$$

◀ Здесь $p = -2$, но для нахождения q и r нужно преобразовать второе и третье уравнения. Но $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$, поэтому $14 = 4 - 2q$, т.е. $q = -5$.

Чтобы использовать третье уравнение вспомним тождество

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Тогда $20 + 3r = 2(14 + 5)$ и $r = 6$.

Имеем уравнение $t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$, его корни $t_1 = -2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 3$. ►

⦿ **Ответ:** $(-2; 1; 3)$, $(-2; 3; 1)$, $(1; -2; 3)$, $(1; 3; -2)$, $(3; 1; -2)$, $(3; -2; 1)$.

Надо думать, что наше алгебраическое мышление значительно улучшилось после рассмотрения систем, и несколько задач с параметром, знаменуя окончание параграфа, нам не повредят.

36. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = a + 2, \\ 2ax + (a + 1)y = 2a + 4, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

◀ Вычитая второе уравнение из удвоенного первого, получаем

$$(3 - a)y = 0.$$

Если $a = 3$, то y — любой и система имеет бесконечно много решений. При $a \neq 3$ неизбежно $y = 0$ и тогда $ax = a + 2$. При $a = 0$ уравнение (и вся система) решений не имеет. В остальных случаях $x = 1 + 2/a$ и система имеет единственное решение.

С геометрической точки зрения, мы имеем две прямые, и наличие решений у системы означает, что данные прямые не параллельны. А параллельны они, если равны их угловые коэффициенты (или они обе вертикальны, что в данном случае невозможно). Для первой прямой $k_1 = -a/2$, для второй (при $a \neq -1$)

$$k_2 = -\frac{2a}{a+1}$$

и равенство дает $a = 0$ и $a = 3$. В первом случае имеем параллельность, во втором — прямые просто совпадают. ►

✎ **Ответ:** $a \neq 0$.

37. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

◀ Вычитая из первого уравнения второе, умноженное на a , мы получим

$$x(1-a) = (1+2a)y + a - \frac{3}{2}.$$

Если $a = 1$, то $y = 1/6$ и $x = -8/7$ (из обоих уравнений). Значит, $a = 1$ удовлетворяет условию.

Пусть $a \neq 1$; тогда

$$x = \frac{(1-2a)y + a - 3/2}{1-a}.$$

Подставляя во второе уравнение, приходим к уравнению

$$(4a+2)y^2 + (2a+3)y - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения единственно, если 1) $4a+2 = 0$; 2) $D = 0$. Эти условия дают

$$a = -\frac{1}{2}, \quad a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}.$$

✎ **Ответ:** $a = 1, a = -1/2, a = (-7 \pm 4\sqrt{2})/2$.

38. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} a(x+2) + y = 3a, \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+2)x^3, \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений.

◀ Из первого уравнения $y = a - ax$; подстановка во второе дает соотношение $(a - a^3)(x^3 - 1) + 3a^3(x^2 - x) = 0$ или, после отделения корня $x = 1$,

$$(a - a^3)x^2 + (a + 2a^3)x + a - a^3 = 0. \quad (*)$$

Условие задачи выполнено, если это уравнение: а) имеет один корень; б) не имеет корней; в) имеет два корня, один из которых $x = 1$.

Условие а) означает, что либо

$$\begin{cases} a = 0, \\ a = \pm 1. \end{cases}$$

либо $D = 0$. При $a = 0$ получаем $y = 0$, x — любое число, т. е. данное значение не годится. При $a = 1$ имеем $x = 0$, $y = 1$; значит, данное значение подходит. Аналогично $a = -1$.

$D = 0$ при $a = \pm 1/2$, $a = 0$ (и это значение мы уже отбросили).

Условие б) означает, что $(a + 2a^3)^2 - 4(a - a^3)^2 < 0$ или, раскладывая на множители, $a^2(2a - 1)(2a + 1) < 0$, откуда $a \in (-1/2; 0) \cup (0; 1/2)$.

Если уравнение (*) имеет корень $x = 1$, то $a = 0$. Значит, случай в) не даст новых значений параметра. ►

☛ **Ответ:** $a \in [-1/2; 0) \cup (0; 1/2]$, $a = \pm 1$.

Как мы знаем на опыте, количество решений системы может быть довольно большим, но сложность задачи не всегда связана с этим количеством. Гораздо большее значение имеет количество параметров.

39. Найти все такие пары (a, b) , что система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0, \end{cases}$$

имеет не менее пяти (5) различных решений.

◀ Первое уравнение допускает разложение на множители

$$(x - y + a)(x + y - 1) = 0.$$

Если $x + y - 1 = 0$, то $y = 1 - x$ и, подставляя это выражение во второе уравнение, получаем $(b - 2)x(1 - x) = 0$. При $b \neq 2$ получаем два значения x , которым соответствуют два значения y . Если $b = 2$, то имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ (x + y)^2 = 1, \end{cases}$$

число решений которой бесконечно. Значит, $b = 2$ подходит при любом a .

Пусть теперь $x - y + a = 0$; тогда $y = x + a$ и второе уравнение системы принимает вид $(b + 2)x^2 + a(b + 2)x + a^2 - 1 = 0$. Это квадратное уравнение будет иметь более двух решений только в случае $b + 2 = 0$, $a^2 - 1 = 0$. ►

⦿ **Ответ:** $b = 2$, a любое; $a = \pm 1$, $b = -2$.

40. Найти все значения a , при которых для любых значений b система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b - 6)y - 8z = 8, \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z) .

◀ Исключив из системы x , найдем (при $2b^2 + b - 6 \neq 0$)

$$y = \frac{2abz^2 + 8z + 8}{2b^2 + b - 6}.$$

Подставив сюда, например, $z = 0$, мы однозначно определим y и x . Пусть теперь $2b^2 + b - 6 = 0$, т. е. $b_1 = -2$, $b_2 = 3/2$. В первом случае систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x + 2y = -az^2, \\ x + 2y = -2 - 2z, \end{cases}$$

откуда $-az^2 = -2 - 2z$ или $az^2 + 2z + 2 = 0$. Это уравнение разрешимо при $D \geq 0$, что дает $a \geq -1/2$.

При $b_2 = 3/2$ приходим к системе

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2az^2, \\ 2x - 3y = -\frac{16z}{3} - \frac{16}{3}, \end{cases}$$

и аналогично получаем $a \leq 2/3$. ►

⦿ **Ответ:** $-1/2 \leq a \leq 2/3$.

**Привал неустрашимых
решателей**

При решении системы главное — суметь свести ее к такой, которую наверняка удастся решить.

Квант. 1992. № 3. С. 48

Вооружившись напутствием от единственного в своем роде физико-математического журнала для школьников (а также их родителей), решите, пожалуйста, следующие системы уравнений.

$$1. \begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ y^2 + xy + x = 5. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x^3 - 2xy^2 = 1, \\ y^3 + x^2y = 2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 - 2xy + 1 = 0, \\ x - \sqrt{xy} - 2y = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x-y} + x^2 = 1, \\ \frac{x^2}{x-y} + 2 = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y = x^2 + y^2, \\ 2x^4 + 2y^4 = (x + y)^2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{x - 4y}{x^2 + y^2} = x, \\ \frac{4x + y}{x^2 + y^2} = 4 - y. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} xy + \frac{4y}{x} = 3, \\ \frac{2x}{y} - \frac{1}{xy} = 3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = y - x, \\ \sqrt{\frac{y}{x}} = 4x - y. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^3 - \frac{5y^2}{x} = \frac{6}{y}, \\ y^3 - \frac{5x^2}{y} = \frac{6}{x}. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y^7 + y^6 - 6x^2 = 0, \\ y^5 + \frac{x^3}{y^3} = x^2 + xy^2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \sqrt{x-3y} - x - 2y + 5 = 0, \\ 2\sqrt{x-3y} - \sqrt{x+y+3} = 6. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 5y = 18, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 5x + y + 2} + \sqrt{x^2 + y^2 + x + 3y - 1} = 5. \end{cases}$$

$$13. \text{ а) } \begin{cases} x^2y^2 + x^2 - 6y = 9, \\ 6x - y^2 - 2xy = 18. \end{cases} \quad \text{ б) } \begin{cases} 2y^2 + 4x^2 = 9, \\ 2xy + 6x - 3y = 9. \end{cases}$$

$$14. \text{ а) } \begin{cases} x^2 + 4 = 4xy^2, \\ x^2 + y^2 + 1 = 2x + y. \end{cases} \quad \text{ б) } \begin{cases} x^2 + 4y^2 + 6 = 6x + 4y, \\ x^2 + 4x^2y^2 = 4y. \end{cases}$$

$$15. \text{ а) } \begin{cases} x^2 - 6y^2 - xy - 2x + 11y = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases} \quad \text{ б) } \begin{cases} x^2 + 6y = 1, \\ 3y^2 + 2x = 3. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \sqrt{y^2 - 7} + \sqrt{x + y^2 - 7} = x, \\ \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y + x^2 + 2} = y. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} (x+1)(x^2+1)(x^4+1) = y^7+1, \\ (y+1)(y^2+1)(y^4+1) = x^7+1. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

$$19^*. \begin{cases} 5x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 12, \\ 5y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \sqrt{2-y} - x = 3z, \\ \sqrt{5y-y^2-6} + 2x = 12. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ x + y + z + \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x + y + z = \sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x^2 - 6y + 6 = 0, \\ y^2 - 6z + 9 = 0, \\ z^2 + 6x + 12 = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x^3 - 3z + 2 = 0, \\ y^3 - 3x + 2 = 0, \\ z^3 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x^2 - yz = y - x, \\ y^2 - xz = z - y, \\ z^2 - xy = x - z. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x^3 - xyz = 2, \\ y^3 - xyz = -9, \\ z^3 - xyz = 7. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x - y - 5z = 2yz, \\ x - 5y - z = 2z^2, \\ x + 9y - 3z = -2xz. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 6x + y^2 - z^2 = 6, \\ x^2 - y - 4z + 4 = 0, \\ 21x^2 - 2y^2 + 3y = 22z^2. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ 16x^3 + y^3 + 2z^3 = 12, \\ 64x^4 + y^4 + 4z^4 = 24. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x+y+z=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2, \\ x^4+y^4+z^4=\frac{1}{8}. \end{cases}$$

33. Решите при всех a систему:

$$а) \begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+az=a^2. \end{cases} \quad б) \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}=2ay+3, \\ x\sqrt{x^2+y^2}=2ax. \end{cases}$$

34. Найдите все значения параметров a и b , при которых

$$а) \text{ система } \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ ax+by=1, \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

$$б) \text{ системы } \begin{cases} ax+2y=b+1, \\ x+y=3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y=a^2+2, \\ x+3y=3, \end{cases} \quad \text{равносильны.}$$

35. При каких a система

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ (x-a)^2+y^2=1, \end{cases}$$

имеет ровно 3 решения? Ровно 2 решения?

36. Найдите число решений системы

$$\begin{cases} x-y^2=a, \\ y-x^2=a, \end{cases}$$

в зависимости от параметра a .

Найдите все значения параметра a , при которых система:

$$37. \begin{cases} a(x-4)=3(y+2), \\ y+\sqrt{x}=0, \end{cases} \quad \text{имеет ровно два различных решения.}$$

$$38. \begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3} \cdot y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0, \\ y=\sqrt{a+3} \cdot x^2, \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$39. \begin{cases} y^2 + 2xy + (x^2 + 2x - 3)(3 - x^2) = 0, \\ y - ax - 6a = 0, \end{cases}$$

имеет более двух различных решений.

40. При каких a для любого b найдется хотя бы одно такое c , что система

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1, \end{cases} \quad \text{имеет решения?}$$

Кунсткамера

Решите системы:

$$1. \begin{cases} (3y - x)^2 = z^2 + 2, \\ (3y + z)^2 = x^2 + 3, \\ (x - z)^2 = 9y^2 + 4. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 - x^2z - 2y^2z^3 = 0, \\ x^2 + 2xy + 18yz^2 = 0, \\ 4y^2 + 6xy + 2x^2z = 9xz^2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2yz^2 - 4xy^2 + xz^2 = 3xyz, \\ 2yx^2 + 4zy^2 - xz^2 = 3xyz, \\ 2xy + xz - 2yz = 3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^3 + x^2(16 - y - z) + x(3 - 2yz) + 3(yz - 2y - 2z + 6) = 0, \\ x^3 + x^2(20 - y - z) + x(63 - 4y - 4z - 2yz) - 5yz - 2(y + z - 21) = 0, \\ 2 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Советы и решения

Р 1. Сложив уравнения, получаем

$$(x + y)^2 + (x + y) - 6 = 0,$$

откуда либо $x + y = 2$, либо $x + y = -3$.

Р 2. Здесь пользуемся однородностью: умножаем первое уравнение на 2 и вычитаем из него второе; получается

$$6x^3 - 4xy^2 - y^3 - x^2y = 0,$$

что после деления на $y^3 \neq 0$ и замены $x = ty$ дает $6t^3 - t^2 - 4t - 1 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -1/2$, $t_3 = -1/3$.

Р 3. Второе уравнение системы — однородное. Убедившись радикал и возводя в квадрат, получим $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$, откуда 1) $x = y$, 2) $x = 4y$. Условие $x = y$ после подстановки в первое уравнение дает $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Проверка показывает, что решением является только пара $(-1; -1)$. Если $x = 4y$, то решений нет.

Р 4. Заменяем $x^2 = u \geq 0$, $1/(x-y) = v$ и решим систему

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ uv = -2, \end{cases}$$

из которой $u = 2$, $v = -1$.

Р 5. Система симметричная, поэтому заменяем $x + y = u$, $xy = v$, выражая

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v \quad \text{и} \quad x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u = u^2 - 2v, \\ 2(u^4 - 4u^2v + 2v^2) = u^2. \end{cases}$$

После подстановки $2v = u^2 - u$ во второе уравнение получим $u^4 - 2u^3 = 0$, откуда 1) $u = 0$, 2) $u = 2$.

Р 6. Домножим первое уравнение на x , а второе на y и сложим; мы получим

$$x^2 + 4y - y^2 = 1. \quad (*)$$

Теперь домножим первое уравнение на y а второе на x , и вычтем из первого второе; получим $xy - 2x + 2 = 0$, откуда $x = 2/(2-y)$. Подставив это выражение в $(*)$, получим уравнение $4/(y-2)^2 = (y-2)^2 - 3$, из которого $(y-2)^2 = 4$.

Р 7. Перемножив уравнения, получим $x^2 - 2/x^2 - 1 = 0$, откуда $x^2 = 2$.

Р 8. Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{y-x}{4x-y} \Leftrightarrow 4x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = 2x$$

(ОДЗ требует $y/x > 0$).

Р 9. Приведем систему к виду

$$\begin{cases} x^4y - 5y^3 = 6x, \\ y^4x - 5x^3 = 6y, \end{cases}$$

и разделим первое уравнение на второе; получим

$$\frac{x^4 - 5y^2}{y^4 - 5x^2} = \frac{x^2}{y^2} \Leftrightarrow x^2y^2(x^2 - y^2) = 5(y^4 - x^4),$$

откуда 1) $x^2 = y^2$, 2) $5(x^2 + y^2) = -x^2y^2$.

Р 10. Второе уравнение переписывается в виде $y^8 + x^3 = x^2y^3 + xy^5$ или, после группировки крайних и средних, $y^5(y^3 - x) = x^2(y^3 - x)$.

Р 11. Заменяя

$$\sqrt{x-3y} = u \geq 0, \quad \sqrt{x+y+3} = v \geq 0$$

и выразив x и y через новые переменные, приходим к системе

$$\begin{cases} 2u - v = 6, \\ u^2 - 5v^2 + 4u + 17 = 0, \end{cases}$$

из которой после исключения v получается уравнение $19u^2 - 124u + 145 = 0$. Тогда $u_1 = 5$, $u_2 = 29/19$; $v_1 = 4$, $v_2 = -56/19 < 0$ — не годится.

Р 12. Выразив $x^2 + y^2 = 18 + 3x - 5y$ из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение

$$\sqrt{20 + 2t} + \sqrt{17 + t} = 5, \quad \text{где } t = 4x - 2y.$$

Полученное уравнение имеет единственное решение $t = -8$, откуда $y = 2x + 4$.

Р 13. а) Сложив уравнения, получим $x^2 y^2 + (x + y - 3)^2 = 0$.

б) Второе уравнение преобразовывается к виду $(2x - 3)(y + 3) = 0$.

Р 14. а) Рассматривая первое уравнение как квадратное относительно x , находим дискриминант $D = 16y^4 - 16 \geq 0$, откуда $|y| \geq 1$. Второе уравнение приводим к виду

$$(x - 1)^2 + y^2 - y = 0,$$

откуда $y^2 - y \leq 0$. Отсюда следует, что $y = 1$ и тогда $x = 1$, однако эта пара не удовлетворяет первому уравнению.

б) Считая второе уравнение квадратным относительно y , убеждаемся, что $|x| \leq 1$. Представим первое уравнение в виде $(x - 3)^2 + (2y - 1)^2 = 4$; из условия $|x| \leq 1$ следует, что $-4 \leq x - 3 \leq -2$, откуда $(x - 3)^2 \geq 4$. Значит, $x - 3 = -2$ и $x = 1$, $y = 1/2$.

Р 15. а) Решая первое уравнение как квадратное относительно x , получаем 1) $x = 3y - 1$, 2) $x = 3 - 2y$. Остается подставить это во второе уравнение.

б) Выразив из первого уравнения $y = (1 - x^2)/6$ и подставив во второе, получим уравнение $36 - 24x - (x^2 - 1)^2 = 0$, записанное так потому, что мы намерены решать его как квадратное относительно параметра $t = 6$; т.е.

$$t^2 - 4xt - (x^2 - 1)^2 = 0.$$

Дискриминант $D = 4(x^2 + 1)^2$, откуда $t_1 = 2x + x^2 + 1$, $t_2 = 2x - x^2 - 1$. Тогда $(x + 1)^2 = 6$.

Р 16. При условиях $x, y \geq 0$ система равносильна такой:

$$\begin{cases} y^2 - 7 + \sqrt{x + y^2 - 7} = x^2, \\ x^2 + 2 + \sqrt{y + x^2 + 2} = y^2. \end{cases}$$

Заменив $x + y^2 - 7 = u^2$, $y + x^2 + 2 = v^2$, перепишем эту систему:

$$\begin{cases} u^2 - x + u = x^2, \\ v^2 - y + v = y^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u^2 - x^2 + u - x = 0, \\ v^2 - y^2 + v - y = 0. \end{cases}$$

откуда $u = x$ и $v = y$. Возможность $u + x + 1 = 0$ исключена, поскольку все неизвестные неотрицательны. Итак,

$$\begin{cases} x^2 - x - y^2 + 7 = 0, \\ y^2 - y - x^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим $x + y = 5$.

Р 17. Докажем, что система не имеет решений, если $x \neq y$. Раскрыв скобки, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = y^7, \\ y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y = x^7. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая. Если $x > y > 0$, то $x^7 > y^7$ и первое уравнение не выполнено. Если $-1 < y < x < 0$, то не выполнено уравнение, полученное сложением исходных, т. е.

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + x^6 + x^5 + \dots + x = 0,$$

поскольку

$$y^6 + y^5 = y^5(y+1) < 0, \quad y^4 + y^3 = y^3(y+1) < 0$$

и т. д. Наконец, если $y < x < -1$, то

$$x^7 > y^7, \quad x^6 + x^5 > 0, \quad x^4 + x^3 > 0, \quad x^2 + x > 0,$$

т. е. первое уравнение не выполнено: левая часть больше правой. Аналогично рассматривается случай $x < y$. Итак, $x = y$ и достаточно решить уравнение

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 0$$

и сделать проверку.

Р 18. Из первого уравнения

$$y^2 = \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1,$$

откуда $-1 \leq y \leq 1$. Но из второго уравнения как квадратного относительно x получаем условие на дискриминант: $y^3 \leq -1$. Значит, $y = -1$.

Р 19. Из первого уравнения получаем

$$x^2 + y^2 = \frac{12(x^2 + y^2)}{5x} - 1,$$

из второго

$$x^2 + y^2 = \frac{4(x^2 + y^2)}{5y} + 1;$$

складывая эти равенства, получаем после упрощений

$$\frac{6}{5x} + \frac{2}{5y} = 1.$$

Теперь приводим первое уравнение к виду

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{12}{5x} - 1,$$

а второе — к

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{4}{5y}$$

и снова складываем; это дает нам соотношение

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{6}{5x} - \frac{2}{5y}.$$

Таким образом, мы имеем систему-следствие

$$\begin{cases} \frac{6}{5x} + \frac{2}{5y} = 1, \\ \frac{6}{5x} - \frac{2}{5y} = \frac{1}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Перемножая эти уравнения и заменяя $y^2 = tx^2$, приходим к уравнению $36t^2 + 7t - 4 = 0$, из которого $t = 1/4$, т. е. $x = \pm 2y$.

Р 20. Условие существования первого радикала $y \leq 2$, а второго $5y - y^2 - 6 \geq 0$, т. е. $y \in [2; 3]$. Значит, $y = 2$. Тогда $2x = 12$ и $x = 6$, $z = -2$.

Р 21. Если сложить уравнения, получится

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Р 22. Из первого уравнения $z = \sqrt{3} - x - y$; после подстановки во второе получается

$$x^2 + (y - \sqrt{3})x + y^2 - y\sqrt{3} + 1 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = -\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

откуда $y = 1/\sqrt{3}$. В силу симметрии таким же образом находим оставшиеся неизвестные.

Р 23. Сложив все уравнения системы, получим

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 0.$$

Р 24. Сложим все уравнения; поскольку $t^3 - 3t + 2 = (t - 1)^2(t + 2)$, это даст нам

$$(x - 1)^2(x + 2) + (y - 1)^2(y + 2) + (z - 1)^2(z + 2) = 0. \quad (*)$$

Две тройки $(1; 1; 1)(-2; -2; -2)$, очевидно, являются решениями как уравнения-следствия, так и самой системы (проверка). Пусть теперь $x < -2$; тогда из первого и второго уравнений системы следует, что $z < -2$, $y < -2$. Но тогда равенство $(*)$ не может иметь места. Тот же вывод следует в случае $x > -2$, $x \neq 1$.

Р 25. Сложение всех уравнений дает

$$\frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) = 0,$$

откуда $x = y = z$.

Р 26. Сложив уравнения, получим $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, откуда, вспоминая формулу

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

делаем вывод, что $x + y + z = 0$.

Выразив $z = -x - y$ и подставив в систему, получим систему-следствие

$$\begin{cases} x^3 + xy(x + y) = 2, \\ y^3 + xy(x + y) = -9. \end{cases}$$

После домножения первого уравнения на 9, второго — на 2 и сложения получим, после замены $x = ty$, уравнение

$$9t^3 + 11t^2 + 11t + 2 = 0,$$

имеющее единственный труднодобываемый корень $t = -2/9$. Тогда $y = -9x/2$ и дело, как говорится, в шляпе.

Р 27. Обозначим $xyz = a$ и решим систему как линейную относительно неизвестных x^3, y^3, z^3 . Мы получим $x^3 = a - 3$, $y^3 = a + 3$, $z^3 = a - 2$. Теперь перемножим полученные равенства и решим уравнение

$$a^3 = (a - 3)(a + 3)(a - 2).$$

Р 28. Вычтем из первого уравнения третье, а второе сложим с третьим; после сокращения мы получим два уравнения:

$$x + 2y - 2z = yz - z^2 \quad \text{и} \quad x + 2y - 2z = z^2 - xz.$$

Отсюда $2z^2 = z(x + y)$.

Если $z = 0$, то подстановка в систему показывает, что решением является тройка $(0; 0; 0)$.

Пусть теперь $z \neq 0$; тогда $z = \frac{x + y}{2}$. Исключая, таким образом, z из исходной системы, получаем систему

$$\begin{cases} x - 7y = 2xy + 2y^2, \\ x - 11y = x^2 + 2xy + y^2, \\ 15y - x = -2x^2 - 2yx. \end{cases}$$

Ее первое и третье уравнения образуют подсистему

$$\begin{cases} x - 7y = 2y(x + y), \\ 15y - x = -2x(x + y). \end{cases}$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x - 7y}{15y - x} = -\frac{y}{x},$$

откуда $x^2 - 8xy + 15y^2 = 0$. Это однородное уравнение удовлетворяется в двух случаях: 1) $x = 3y$; 2) $x = 5y$.

Р 29. Выразая из первого и второго уравнения

$$y^2 = 6 + x^2 - 6x, \quad y = x^2 - 4x + 4$$

и подставляя в третье, получаем $(x - z)(2x + 2z + 1) = 0$.

Р 30. Заменим $2x = t$ и получим систему

$$\begin{cases} t^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ 2t^3 + y^3 + 2z^3 = 12, \\ 4t^4 + y^4 + 4z^4 = 24. \end{cases}$$

Чтобы избавиться от констант, вычтем из первого уравнения второе и прибавим к результату третье, деленное на 4. Мы получим

$$t^2 - 2t^3 + t^4 + y^2 - y^3 + \frac{y^4}{4} + z^2 - 2z^3 + z^4 = 0 \quad \text{или}$$

$$t^2(t - 1)^2 + y^2\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + z^2(z - 1)^2 = 0.$$

Остается разобрать все возможности:

$$\begin{bmatrix} t = 0, \\ t = 1, \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y = 0, \\ y = 2, \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z = 0, \\ z = 1. \end{bmatrix}$$

Р 31. Второе уравнение можно переписать так:

$$y^2 + 2y(3 - z) + 9 - 4z = 0$$

и рассмотреть как квадратное относительно y . Учитывая неотрицательность z , видим, что дискриминант $D = 4z(z - 2)$ неотрицателен в двух случаях: 1) $z = 0$, 2) $z \geq 2$. Если $z = 0$, то $x = 4$, $y = -3$. Пусть $z \geq 2$; переписав третье уравнение в виде $(x - 2)^2 + z^2 = 4$, убеждаемся, что равенство возможно только при $z = 2$.

Р 32. Из второго уравнения получаем $xy + yz + zx = 2xyz$. Пусть $xyz = a$; тогда

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = \frac{1}{4} - 4a,$$

и

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = \\ &= \left(\frac{1}{4} - 4a\right)^2 - 2((xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)) = \\ &= \left(\frac{1}{4} - 4a\right)^2 - 2(4a^2 - a) = \frac{1}{16} + 8a^2, \end{aligned}$$

откуда $a^2 = 1/128$ и $a = \pm 1/4\sqrt{2}$. Итак, имеем две системы-следствия:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2}, \\ xy + yz + zx = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ xyz = \frac{1}{8\sqrt{2}}, \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2}, \\ xy + yz + zx = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ xyz = -\frac{1}{8\sqrt{2}}, \end{cases} \end{aligned}$$

Составляем кубическое уравнение, корнями которого являются наши неизвестные.

В случае 1) уравнение имеет вид

$$t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4\sqrt{2}}t - \frac{1}{8\sqrt{2}} = 0 \quad \text{или} \quad t^2\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

у этого уравнения только один корень $t = 1/2$, что не отвечает смыслу задачи. В случае 2) имеем

$$t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4\sqrt{2}}t + \frac{1}{8\sqrt{2}} = 0 \quad \text{или} \quad t^2\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда $t_1 = 1/2$, $t_{2,3} = \pm 1/2\sqrt[4]{2}$.

Р 33. а) Решаем систему методом последовательного исключения неизвестных (см. пример 19 этого параграфа). Для этого сначала домножим второе и третье уравнения на a ,

а потом вычтем из каждого первое уравнение. Мы получим систему

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ (a^2 - 1)y + (a - 1)z = a^2 - 1, \\ (a - 1)y + (a^2 - 1)z = a^3 - 1. \end{cases}$$

Пусть $a = 1$; тогда 2 и 3 уравнения удовлетворяются при любых y и z , а x тогда находится по формуле

$$x = \frac{1 - y - z}{a}.$$

Таким образом, система имеет бесконечно много решений.

Пусть теперь $a \neq 1$; тогда имеем подсистему

$$\begin{cases} (a + 1)y + z = a + 1, \\ y + (a + 1)z = a^2 + a + 1, \end{cases}$$

которую приводим к виду

$$\begin{cases} (a + 1)^2 y + (a + 1)z = (a + 1)^2, \\ y + (a + 1)z = a^2 + a + 1, \end{cases}$$

и вычитая уравнения, получаем $(a^2 + 2a)y = a$.

При $a = 0$ из исходной системы находим $x = -1/2$, $y = z = 1/2$. При $a = -2$ получаем $0 = -2$, т. е. при данном значении система решений не имеет. В остальных случаях имеем $y = 1/(a + 2)$; тогда

$$z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}$$

и наконец

$$x = -\frac{a + 1}{a + 2}.$$

б) Если $x = 0$, то второе уравнение выполнено, а первое принимает вид

$$y|y| = 2ay + 3.$$

При $y > 0$ имеем $y^2 - 2ay - 3 = 0$ и находим единственный положительный корень

$$y = a + \sqrt{a^2 + 3}.$$

Таким образом, $(0; a + \sqrt{a^2 + 3})$ — решение системы при любом a . Если $y < 0$, то первое уравнение принимает вид $y^2 + 2ay + 3 = 0$. Оно имеет корни

$$y_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 3} \quad \text{при} \quad |a| \geq \sqrt{3}.$$

Если $a \geq \sqrt{3}$, то оба корня отрицательны (и подходят). Если $a \leq -\sqrt{3}$, то оба корня положительны. Если теперь $x \neq 0$, то из системы получаем следствие $2ay = 2ay + 3$, не имеющее место ни при каких значениях y .

Р 34. а) Если $b = 0$, то $x = 1/a$, и вертикальная прямая $x = 1/a$ будет иметь единственную общую точку с окружностью $x^2 + y^2 = 1$, если $a = \pm 1$. Если $b \neq 0$, то

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$$

и прямая, заданная этим уравнением, будет иметь единственную общую точку с окружностью $x^2 + y^2 = 1$, если будет равен 0 дискриминант уравнения

$$x^2 + \left(-\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}\right)^2 = 1,$$

откуда $a^2 + b^2 = 1$.

б) Можно честно решить каждую систему и приравнять ответы. А можно рассуждать и так. Если $a = 2$, то первая система имеет либо бесконечно много решений (при $b = 5$), либо вообще их не имеет. Но вторая система всегда имеет ровно одно решение — это ясно из геометрического смысла уравнений. Итак, $a \neq 2$. Поскольку системы равносильны, вторые уравнения в них должны совпадать, откуда следует, что $y = 0$, $x = 3$. Но тогда из второй системы находим $a^2 = 4$, откуда $a = -2$, и тогда из первой системы $b = -7$.

Р 35. С учетом первого уравнения второе имеет вид

$$(x - a)^2 + x^2 = 1. \quad (*)$$

Если один из корней этого уравнения равен 0, а второй отличен от 0, то система имеет три решения; два решения получим, если для уравнения (*) $D = 0$.

Р 36. Из системы следует, что $y - x^2 = x - y^2$ или $(y - x)(1 + x + y) = 0$, откуда

$$\begin{cases} y = x, \\ y = -1 - x. \end{cases}$$

В первом случае получаем $x^2 - x - a = 0$; это уравнение имеет 2 корня, если $1 - 4a > 0$, т.е. $a < 1/4$; 1 корень, если $a = 1/4$; ни одного корня, если $a > 1/4$. Во втором случае приходим к уравнению $x^2 + x + a + 1 = 0$, имеющему 2 корня при $a < -3/4$, один при $a = -3/4$, ни одного при $a > -3/4$. Сами корни находятся по формулам

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4a}}{2}.$$

Они могут и совпадать. Можно проверить, что совпадение возможно только при $a = -3/4$.

Р 37. Из второго уравнения следует, что $x \geq 0$, $y \leq 0$. Выразив $x = y^2$, приведем первое уравнение к виду $ay^2 - 3y - 4a - 6 = 0$. Чтобы это уравнение имело два отрицательных корня, или один отрицательный, а второй 0, потребуем выполнения неравенств $D > 0$, $3/a < 0$, $(-4a - 6)/a \geq 0$ (теорема Виста), откуда $-3/2 \leq a < 0$, $a \neq -3/4$.

Р 38. Из второго уравнения следует, что $y \geq 0$, $a \geq -3$. Первое уравнение приводится к виду

$$y^2 - (a - 1)(a + 3)^2 y + (a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 4)(a + 3)^2 = 0.$$

Если $a = -3$, то $y = 0$, $x^4 = 40$ и система имеет 4 решения. Значит, $a > -3$. Система будет иметь 3 решения, если у этого уравнения будет один положительный корень и один, равный 0. Если $y = 0$, то

$$(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 4) = 0.$$

Если $a = 1$, то $y = 0$ — единственный корень. Если $a = -1$, то $y_2 = -4 < 0$. Если $a = 2$, то $y_2 = 25$. Если $a = -4$, то не выполнено условие $a > -3$. Итак, подходит только $a = 2$.

Р 39. Первое уравнение приводится к виду $(y+x)^2 = (x^2+x+3)^2$, откуда

$$\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = -x^2 - 2x + 3. \end{cases}$$

Тогда второе уравнение исходной системы дает совокупность

$$\begin{cases} x^2 - ax - 3 - 6a = 0, \\ x^2 + (a+2)x + 6a - 3 = 0. \end{cases}$$

Потребовав неотрицательности дискриминантов, добьемся нужного (поскольку, как мы увидим, одновременно дискриминанты в нуль не обращаются).

Р 40. Заметим, что при $b = 2$ система имеет вид

$$\begin{cases} 2x + 2y = ac^2 + c, \\ 2x + 2y = c - 1, \end{cases}$$

откуда $ac^2 + c = c - 1$ или $ac^2 = -1$. Это уравнение разрешимо при $a < 0$. При $b = -2$ система имеет вид

$$\begin{cases} 2x - 2y = ac^2 + c, \\ -2x + 2y = c - 1, \end{cases}$$

откуда $ac^2 + c = 1 - c$ или $ac^2 + 2c - 1 = 0$. Это уравнение разрешимо при условии

$$D = 4 + 4a \geq 0,$$

т. е. $a \geq -1$. В остальных случаях прямые, которые задаются уравнениями исходной системы, не параллельны и не совпадают и система всегда разрешима.

Кунсткамера

Р 1. Заменяя для симметрии $3y = t$ и разложив везде разность квадратов, получим систему

$$\begin{cases} (t-x-z)(t-x+z) = 2, \\ (t+z-x)(t+z+x) = 3, \\ (x-z-t)(x-z+t) = 4. \end{cases}$$

После деления первого уравнения на второе и третье (по очереди), получим два следствия:

$$t = 5x + 5z \quad \text{и} \quad t = \frac{x}{3} + z,$$

откуда

$$z = -\frac{7}{6}x \quad \text{и тогда} \quad t = -\frac{5}{6}x.$$

Осталось подставить это в любое из исходных уравнений.

Р 2. Если $y = 0$, то и $x = 0$; a z при этом может быть любым числом. Таким образом, решением являются все тройки вида $(0; 0; a)$. Пусть теперь $y \neq 0$; заменив $x = ty$,

перепишем систему в виде

$$\begin{cases} t^2 - t^2 z = 2z^3, \\ t^2 + 2t + \frac{18z^2}{y} = 0, \\ 4 + 6t + 2t^2 z - \frac{9tz^2}{y} = 0. \end{cases}$$

Сложив второе уравнение, умноженное на t , с удвоенным третьим, получим

$$t^3 + 2t^2 + 12t + 8 + 4t^2 z = 0. \quad (*)$$

Теперь сложим это соотношение с первым уравнением, умноженным на 4; мы получим $(t+2)^3 = 8z^3$, откуда $t+2 = 2z$. Возвращаясь к соотношению (*), получаем тогда

$$3t^3 + 6t^2 + 12t + 8 = 0 \quad \text{или} \quad 2t^3 + (t+2)^3 = 0,$$

откуда

$$t = -\frac{2}{1 + \sqrt[3]{2}} \quad \text{и тогда} \quad z = \frac{t+2}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2}}.$$

Поскольку $x = ty$, выразим

$$y = -\frac{x(1 + \sqrt[3]{2})}{2}$$

и подставим во второе уравнение исходной системы.

Р 3. Однородность первых двух уравнений подсказывает деление на $x y z$ (пока отличное от 0). Получаем вспомогательную систему

$$\begin{cases} \frac{2z}{x} - \frac{4y}{z} + \frac{x}{y} = 3, \\ \frac{2x}{z} + \frac{4y}{x} - \frac{z}{y} = 3, \end{cases}$$

в которой полагаем $x/y = a$, $z/x = b$, тогда $z/y = ab$, и эта система принимает вид

$$\begin{cases} a + 2b = 3 + \frac{4}{ab}, \\ \frac{2}{b} + \frac{4}{a} = 3 + ab. \end{cases}$$

и сводится к уравнению $t^3 + 3t^2 - 6t - 8 = 0$, где $t = ab$. Корни $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = -4$. Остается разобрать каждый из вариантов. Если $x = 0$, то из первого уравнения следует, что равно 0 и одно из двух оставшихся неизвестных. Но тогда равно 0 левая часть третьего уравнения. Аналогичная ситуация с равенством нулю y и z .

Р 4. «Тренировка наблюдательности и умения мыслить логически», — как писали в старом журнале «Наука и жизнь». Ясно, что «без идеи» решить нельзя, что и отличает эту систему (ВМК, конец 80-х) от, хотя и зубодробительных, но все же так или иначе решаемых физтеховских 1–3.

Итак... Делаем замену $y + z = u$, $yz = v$ и переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x^2 + 6)u + (2x - 3)v = x^3 + 16x^2 + 3x + 18, \\ (x^2 + 4x + 2)u + (2x + 5)v = x^3 + 20x^2 + 63x + 42. \end{cases}$$

Эта система — линейная относительно новых переменных (u, v) . Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$(x-1)u + 2v = x^2 + 15x + 6,$$

откуда

$$v = \frac{x^2 + 15x + 6 - (x-1)u}{2}.$$

Подставляя в первое уравнение, получаем после преобразований $u = x + 6$ и тогда $v = 5x + 6$. Таким образом,

$$\begin{cases} y + z = x + 6, \\ yz = 5x + 6. \end{cases}$$

Составляем вспомогательное уравнение $t^2 - (x+6)t + 5x+6 = 0$, дискриминант которого $D = (x-2)(x-6)$ неотрицателен при $x \notin (2; 6)$. Сопоставляя это с данными задачи, получаем 1) $x = 2$; 2) $x = 6$.

Ответы

1. $(-1; 3), (-1; -2)$; 2. $(1; 1), (-1/\sqrt[3]{5}; 2/\sqrt[3]{5}), (-1/\sqrt[3]{15}; 3/\sqrt[3]{15})$; 3. $(-1; -1)$;
4. $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2} + 1)$; 5. $(0; 0), (1; 1)$; 6. $(1; 0), (-1; 4)$; 7. $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}/2)$;
8. $(1/\sqrt{2}; \sqrt{2})$; 9. $(\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{6}), (\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2}), (\pm\sqrt{3}; \mp\sqrt{3})$; 10. $(125; 5),$
 $(\pm 4\sqrt{2}; 2)$; 11. $(16; -3)$; 12. $(-1; 2), (-18/5; -16/5)$; 13. а) $(3; 0)$; б) $(3/2; 0)$;
14. а) $\emptyset$; б) $(1; 1/2)$; 15. а) $(2; 1), (-1; 2), (\pm 11/5; \pm 2/5)$; б) $(-1 \pm \sqrt{6}; -1 \mp \sqrt{6}/3)$;
16. $(2; 3)$; 17. $(0; 0), (-1; -1)$; 18. $(1; -1)$; 19. $(2; 1), (2/5; -1/5)$;
20. $(6; 2; -2)$; 21. $(-1/2; -1/2; 1/2)$; 22. $(1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$; 23. $(-3; 3; 3)$;
24. $(1; 1; 1)(-2; -2; -2)$; 25. $(a; a; a), a \in \mathbb{R}$; 26. $(2/\sqrt[3]{67}; -9/\sqrt[3]{67}; 7/\sqrt[3]{67})$;
27. $(-\sqrt[3]{9}; -\sqrt[3]{3}; -2), (-\sqrt[3]{3/2}; \sqrt[3]{9/2}; -\sqrt[3]{1/2})$; 28. $(0; 0; 0), (-3/2; -1/2; -1),$
 $(-5/6; -1/6; -1/2)$; 29. $(1; 1; 1), ((-5 \pm \sqrt{11})/2; (10 \mp \sqrt{11})/2; (4 \mp \sqrt{11})/2)$;
30. $(1/2; 2; 1)$; 31. $(4; -3; 0), (2; -1; 2)$; 32. $(1/2; \pm 1/2\sqrt[4]{2}; \mp 1/2\sqrt[4]{2}),$
 $(\pm 1/2\sqrt[4]{2}; 1/2; \mp 1/2\sqrt[4]{2}), (\pm 1/2\sqrt[4]{2}; \mp 1/2\sqrt[4]{2}; 1/2)$; 33. а) При $a = -2$ решений нет;
 при $a = 1$ бесконечно много решений вида $(1 - y - z; y; z), y, z \in \mathbb{R}$; при остальных a
 $(-(a+1)/(a+2); 1/(a+2); (a+1)^2/(a+2))$. б) Если $a \leq -\sqrt{3}$, то $x = 0$,
 $y = a + \sqrt{a^2 + 3}$; если $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$, то решений нет; если $a \geq \sqrt{3}$, то $x = 0$,
 $y = a + \sqrt{a^2 + 3}; x = 0, y = -a \pm \sqrt{a^2 - 3}$; 34. а) $a^2 + b^2 = 1$. б) $a = -2, b = -7$;
35. 3 решения, если $a = \pm 1$; 2 решения, если $a = \pm\sqrt{2}$; 36. Если $a < -3/4$, то
 4 решения; если $-3/4 \leq a < 1/4$ — два решения; если $a = 1/4$, то одно решение; если
 $a > 1/4$, то ни одного; 37. $-3/2 \leq a < -3/4, -3/4 < a < 0$; 38. 2;
39. $a \leq -12 - 2\sqrt{33}, -12 + 2\sqrt{33} \leq a \leq 10 - 2\sqrt{21}, a \geq 10 + 2\sqrt{21}$;
40. $-1 \leq a < 0$.

Кунсткамера

1. $(\pm 1; \mp 5/18; \mp 7/6)$; 2. $(0; 0; a), a \in \mathbb{R}; (-9\sqrt[3]{2}/(1 + \sqrt[3]{2}); 9\sqrt[3]{2}/2; \sqrt[3]{2}/(1 + \sqrt[3]{2}))$;
3. $(\pm 1; \pm 1; \mp 1), (\pm 1; \mp 1/2; \pm 2), (\pm 2; \pm 1/2; \pm 1)$; 4. $(2; 4; 4), (6; 6; 6)$.

§ 7. Неравенства

С одной стороны, тема «неравенства» как будто не содержит в себе ничего принципиально нового по сравнению с уравнениями: если мы можем сказать, когда $f(x) = 0$, то не так трудно понять и когда $f(x) \neq 0$. Однако от нас, как правило, требуются более точные сведения: мы должны указать, когда $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$. И необходимость отвечать на *этот* вопрос заставляет идти дальше уравнения $f(x) = 0$.

Самым общим методом решения неравенств является метод интервалов. Конечно, читатель знает, что это такое, но... «Поскольку никто из вас не едет учиться ни в Афины, ни в Болонью, ни в Париж, следует говорить вам подробнее, чем тем, которые изощрили свой ум в науках». (Д. Боккаччо, «Декамерон»)

Итак, с его (читателя) молчаливого позволения, мы всё-таки кратко напомним его (метода) суть.

В принципе, метод интервалов можно применять всегда, когда удастся решить соответствующее данному неравенству уравнение. Он основан на том простом соображении, что знак произведения (частного) определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).

1. Решить неравенство

$$\frac{(2x+1)(x^2+x-2)}{5-x} < 0.$$

◀ Схема решения такова:

1. Находим нули каждого сомножителя как в числителе, так и в знаменателе дроби и располагаем их в порядке возрастания: $x_1 = -2$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$. Для удобства переписываем неравенство так, чтобы каждая скобка имела вид $(x \pm a)$, т. е.

$$\frac{(x+1/2)(x+2)(x-1)}{x-5} > 0,$$

и раскладываем трехчлен на множители: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

2. Числовая ось разбивается найденными точками на пять интервалов. На самом правом из них — интервале $(5; +\infty)$ — знак каждого сомножителя положителен. Значит, и дробь в этом промежутке положительна.

3. Теперь движемся влево. При переходе через каждую из отмеченных точек знак меняет только один из множителей, поэтому и знак дроби каждый раз меняется. Учитывая это, расставляем знаки (рис. 10).

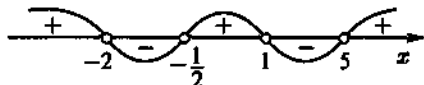


Рис. 10

4. Выбираем интервалы, на которых дробь положительна и записываем ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1/2; 1) \cup (5; +\infty)$. ►

✎ **Ответ:** $x \in (-\infty; -2) \cup (-1/2; 1) \cup (5; +\infty)$.

В этом примере чередование знаков было подчинено строгому порядку: «плюс — минус — плюс — минус...» Это объясняется тем, что каждый из рассматриваемых сомножителей входил в общее произведение в первой (т. е. нечетной) степени. Если же среди степеней множителей будут четные, то, расставляя знаки, необходимо учитывать, что при переходе через соответствующее этому множителю нулевое значение знак меняться не будет.

2. Решить неравенство

$$\frac{(x^2 - 2x - 3)(6 + x - x^2)(x - 4)^3}{(2x + 1)^2} \geq 0.$$

◀ 1. Корни сомножителей таковы: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1/2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Перепишем неравенство, раскладывая на множители всё, что еще не разложено:

$$\frac{(x + 1)(x - 3)^2(x + 2)(x - 4)^3}{(2x + 1)^2} \leq 0.$$

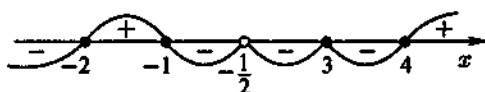


Рис. 11

2. При $x > 4$ дробь положительна. Знак не меняется при переходе через $x_3 = -1/2$ и $x_4 = 3$; при переходе через остальные точки — меняется на противоположный. Имеем (рис. 11).

3. Мы решили «строгое» неравенство. Остается присоединить к интервалам, на которых стоит знак «минус», корни уравнения

$$\frac{(x + 1)(x - 3)^2(x + 2)(x - 4)^3}{(2x + 1)^2} = 0,$$

т. е. нули числителя, входящие в ОДЗ. ►

✎ **Ответ:** $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; -1/2) \cup (-1/2; 4]$.

3. Решить неравенство

$$\frac{5x + 2}{2x^2 + 5x + 2} \geq 1.$$

◀ Безуспешно бьются педагоги над тем, чтобы учащиеся при решении неравенств не *домножали на знаменатель*, но, по-видимому, это отвечает каким-то сокровенным потребностям нашей натуры, которые нельзя устранить никакой тренировкой. Этим знатокам человеческих душ и посвящаем мы данное неравенство. Из уважения к их страданиям выполняем преобразования в полном молчании — и в том порядке, в котором их *надо производить*.

$$\begin{aligned} \frac{5x+2}{2x^2+5x+2} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{5x+2}{2x^2+5x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5x+2-2x^2-5x-2}{2x^2+5x+2} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+2)(x+1/2)} \leq 0. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x \in (-2; -1/2) \cup \{0\}$.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{5x+6-x^2} - \frac{2}{5x^2+3x-2} < 0.$$

◀ Прежде всего, нужно разложить на множители каждый из знаменателей. Сделаем это.

$$-\frac{1}{(x+1)(x-6)} - \frac{2}{(x+1)(5x-2)} < 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)(x-6)} + \frac{2}{(x+1)(5x-2)} &> 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5x-2+2x-12}{(x+1)(x-6)(5x-2)} &> 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x+1)(x-6)(5x-2)} > 0. \end{aligned}$$

Включаем метод интервалов и получаем ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2/5; 2) \cup (6; \infty)$. $\blacktriangleright$

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; -1) \cup (2/5; 2) \cup (6; \infty)$.

При решении неравенств возрастает нагрузка, ложащаяся на ОДЗ.

Мы уже задавались вопросом «надо ли искать ОДЗ везде и всегда?». ОДЗ надо *видеть*, т. е. чувствовать позвоночником, ощущать, где она не только ограничивает нашу свободу, а подчас и помогает... Роль ОДЗ рельефно демонстрируют примеры вроде следующего.

5. Решить неравенство $\sqrt{x^2-16} \cdot \sqrt{16-x^2} \leq 0$.

◀ Одновременное выполнение неравенств $x^2 - 16 \geq 0$ и $16 - x^2 \geq 0$, задающих ОДЗ, возможно только при $x = \pm 4$. И если $x = \pm 4$, то неравенство верно. Значит, осталось выписать ответ: $x = \pm 4$. ▶

☞ **Ответ:** $x = \pm 4$.

6. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \leq \sqrt{3x^2 + 5x + 2}$.

◀ Неравенство, в сущности, равносильно двойному неравенству

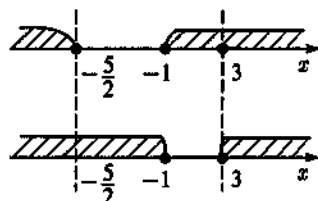
$$0 \leq x^2 - 2x - 3 \leq 3x^2 + 5x + 2,$$

т. е. системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 3x^2 + 5x + 2, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x + 5 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -5/2] \cup [-1; +\infty), \\ x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty). \end{cases}$$

Чтобы получить ответ, удобнее всего нарисовать друг под другом два экземпляра числовой прямой и заштриховать решения каждого из неравенств (рис. 12). Те части, которые окажутся заштрихованными на обеих прямых, и будут решением системы. ▶



☞ **Ответ:** $x \in (-\infty; -5/2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Рис. 12

7. Решить неравенство $\sqrt{x+6} > x$.

◀ Рассматриваем функцию

$$f(x) = \sqrt{x+6} - x;$$

ее область определения — промежуток $[-6; +\infty)$. Находим нули функции, т. е. решаем уравнение

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Оно имеет корень $x = 3$. Соответствующая ему точка разбивает область определения функции на два интервала: $[-6; 3)$ и $(3; +\infty)$, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак (само значение $x = 3$ нас не интересует, поскольку неравенство строгое). Поэтому достаточно подставить по одному значению из каждого интервала в выражение для $f(x)$. Возьмем $x = 0$ и $x = 10$. Поскольку

$$f(0) = \sqrt{6} > 0, \quad f(10) = -6 < 0,$$

решением неравенства $f(x) > 0$ является интервал $[-6; 3)$. ►

❶ **Ответ:** $x \in [-6; 3)$.

Основная неприятность, которая может возникнуть при использовании методом интервалов — близость корней друг к другу, затрудняющая расстановку знаков.

Посмотрим, как можно выйти из положения.

8. Решить неравенство

$$\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 3x + 2.$$

❶ ОДЗ определяется условием

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; +\infty\right).$$

Перепишем неравенство в равносильном виде

$$(3x - 2)(3x + 2) \leq (3x + 2)\sqrt{5x^2 - 1} \quad \text{или} \quad (3x + 2)(3x - 2 - \sqrt{5x^2 - 1}) \leq 0.$$

Решаем уравнения $3x + 2 = 0$ и $\sqrt{5x^2 - 1}$. В ОДЗ входят корни $x_1 = -2/3$ и $x_2 = 5/2$.

Имеем четыре интервала:

$$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right), \quad \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{5}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

Движемся слева направо. На первом интервале отрицательны оба множителя, на втором — только второй; таким образом, при $x \in (-2/3; -1/\sqrt{5})$ неравенство выполнено.

Из третьего интервала берем точку $x = 1$; первый множитель положителен, второй отрицателен — неравенство не выполняется. Подстановка $x = 3$ требует определить знак числа $7 - \sqrt{44}$; ясно, что $7 - \sqrt{44} > 0$. Таким образом, решение неравенства:

$$x \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

Мы дополнили интервала граничными точками, поскольку эти точки — корни уравнения $f(x) = 0$. ►

❶ **Ответ:** $x \in [-2/3; -1/\sqrt{5}) \cup [5/2; +\infty)$.

9. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x+6} + \sqrt{8-x} - 5}{2x + \sqrt{3-x}} \geq 0.$$

◀ В этом неравенстве нам меньше, чем где бы то ни было, следует изменять методу интервалов. Условие существования радикалов: $x \in [-3; 3]$. Чтобы найти нули, решаем два иррациональных уравнения:

$$\sqrt{2x+6} + \sqrt{8-x} = 5 \quad \text{и} \quad 2x + \sqrt{3-x} = 0.$$

Оба они имеют по одному корню $x = -1$ (второй корень $x = 71/9$ первого уравнения не удовлетворяет условию $x \in [-3; 3]$). Подстановка значений из интервалов $[-3; -1)$ и $(-1; 3]$ показывает, что на каждом из них левая часть неравенства положительна. Значение $x = -1$ необходимо исключить. ▶

🔑 **Ответ:** $x \in [-3; -1) \cup (-1; 3]$.

Иррациональные неравенства вполне допустимо решать и без помощи метода интервалов сведением к простейшим, т.е. к неравенствам вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \quad \text{или} \quad \sqrt{f(x)} > g(x).$$

Первое из них равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x), \end{cases}$$

второе — совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x), \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

10. Решить неравенство $\sqrt{5-2x} < 6x-1$.

◀ Сразу заменяем неравенство системой

$$\begin{cases} 5-2x \geq 0, \\ 6x-1 > 0, \\ 5-2x < (6x-1)^2, \end{cases}$$

и решаем по отдельности каждое неравенство. Имеем:

$$\begin{cases} x \leq \frac{5}{2}, \\ x > \frac{1}{6}, \\ \left(x < -\frac{2}{9}\right) \vee \left(x > \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Нарисовав (самостоятельно) картинку, получаем ответ: $x \in (1/2; 5/2]$. ►

✎ **Ответ:** $x \in (1/2; 5/2]$.

11. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}.$$

◀ В этом случае составляем две системы неравенств:

$$1) \begin{cases} x-2 > 0, \\ \frac{1}{3-x} > \frac{1}{(x-2)^2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x-2 < 0, \\ 3-x > 0. \end{cases}$$

Первая система равносильна такой:

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ \frac{x^2-3x+1}{3-x} > 0. \end{cases}$$

Ее решение $(3 + \sqrt{5})/2 < x < 3$. Решение второй $x < 2$. ►

✎ **Ответ:** $x \in (-\infty; 2) \cup ((3 + \sqrt{5})/2; 3)$.

12. Решить неравенство $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$.

◀ Прежде всего необходимо переписать неравенство в форме, позволяющей возведение в квадрат: $3\sqrt{x} > 1 + \sqrt{x+3}$. ОДЗ определяется условием $x \geq 0$, при выполнении которого мы имеем право заменить неравенство на равносильное:

$$9x > 1 + 2\sqrt{x+3} + x + 3 \quad \text{или} \quad \sqrt{x+3} < 4x - 2.$$

Теперь составляем систему

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 4x - 2 > 0, \\ x + 3 < (4x - 2)^2, \end{cases}$$

которая с учетом условия $x \geq 0$ может быть записана в виде

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 4x - 2 > 0, \\ x + 3 < (4x - 2)^2, \end{cases}$$

и решаем ее. Мы получаем

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > \frac{1}{2}, \\ \left(x < \frac{1}{16}\right) \vee (x > 1). \end{cases}$$

☛ **Ответ:** $x \in (1; +\infty)$.

13. Решить неравенство $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5,4} > \sqrt{x-3,5}$.

◀ По внешнему виду это неравенство мало чем отличается от предыдущего и его, конечно, можно решать аналогично. Однако перепишем неравенство так: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3,5} > -\sqrt{x-5,4}$. Теперь сразу видно, что левая часть положительна (поскольку $x+2 > x-3,5$), а правая положительной быть не может; значит, неравенство автоматически выполняется при всех допустимых значениях неизвестного, т. е. при $x \geq 5,4$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [5,4; +\infty)$.

При решении неравенств нам также приходится прибегать к замене переменной.

14. Решить неравенство $7x - x^2 + 10 \geq 2(x^2 - 7x - 9)^2$.

◀ Пусть $x^2 - 7x - 9 = y$, тогда неравенство имеет вид

$$-y + 1 \geq 2y^2 \quad \text{или} \quad 2y^2 + y - 1 \leq 0.$$

Отсюда $y \in [-1; 1/2]$. Осталось вернуться к первоначальной переменной, т. е. решить двойное неравенство $-1 \leq x^2 - 7x - 9 \leq 1/2$, равносильное системе

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 9 \geq -1, \\ x^2 - 7x - 9 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $x \in (-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$, второго:

$$x \in \left[\frac{7 - \sqrt{87}}{2}; \frac{7 + \sqrt{87}}{2} \right].$$

Совмещая промежутки, получаем ответ: $x \in [(7 - \sqrt{87})/2; -1] \cup [8; (7 + \sqrt{87})/2]$. ►

☛ **Ответ:** $x \in [(7 - \sqrt{87})/2; -1] \cup [8; (7 + \sqrt{87})/2]$.

15. Решить неравенство $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x^2+x} \leq 1 - 2x$.

◀ Пусть $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = y$, причем $y \geq 0$; тогда

$$y^2 = 2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}, \quad \text{т. е.} \quad 2x + 2\sqrt{x^2+x} = y^2 - 1.$$

Тогда исходное неравенство переписывается в виде

$$y + y^2 - 1 \leq 1 \quad \text{или} \quad y^2 + y - 2 \leq 0.$$

Это неравенство выполнено при $-2 \leq y \leq 1$, что с учетом условия $y \geq 0$ дает $0 \leq y \leq 1$. Возвращаясь к переменной x , приходим к неравенству $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \leq 1$ (условие $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 0$ выполнится автоматически, если только неравенство $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \leq 1$ вообще будет иметь решение). Решим его методом интервалов (чтобы не притупился от бездействия этот изумительный инструмент). Уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$ имеет единственный корень $x = 0$; он совпадает с граничной точкой ОДЗ, которая определяется условием $x \geq 0$. Таким образом, есть только один интервал $(0; +\infty)$, какой знак имеет на нем функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 1$ устанавливаем, вычисляя $f(1) = \sqrt{2} > 0$. Таким образом, решением неравенства служит только $x = 0$. ►

☛ **Ответ:** $x = 0$.

16. Решить неравенство $\sqrt{x+1} \leq x^2 + 3x + 1$.

◀ Заменим $\sqrt{x+1} = y \geq 0$; тогда $x = y^2 - 1$ и неравенство переписывается в виде $y^4 + y^2 - y - 1 \geq 0$. Тогда, поскольку $y = 1$ — корень, после деления получаем эквивалентное неравенство $(y-1)(y^3 + y^2 + 2y + 1) \geq 0$, откуда, ввиду неотрицательности y , $y \geq 1$. И, стало быть, $x \geq 0$. ►

☛ **Ответ:** $x \in [0; +\infty)$.

Здесь как-то само собой напрашивается отступление на тему «Времена меняются». А именно, сравним два текста. Первый, послуживший побудительным мотивом к данному отступлению, взят из интересной во всех отношениях статьи А. Егорова и Ж. Раббота «Иррациональные неравенства» в журнале «Квант» № 6 за 2001 г. Там данное неравенство

$$\sqrt{x+1} \leq x^2 + 3x + 1$$

решено следующим образом (цитата с небольшими сокращениями):

Прямое применение схемы

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

приводит (после возведения данного неравенства в квадрат) к необходимости найти корни многочлена 4 степени, причем легко подобрать лишь один его корень $x=0$, а корни оставшегося кубического многочлена найти очень непросто — они не рациональны.

Заметим, что график левой части данного неравенства это верхняя ветвь параболы, ось симметрии которой — ось абсцисс, а вершина — точка $(-1; 0)$; график правой части это парабола, ось которой параллельна оси ординат, а вершина — точка $(-3/2; -5/4)$ (см. рис. 13).

Воспользуемся теперь тем, что график левой части имеет «выпуклость вверх» (т. е. лежит выше любой своей хорды — отрезка, соединяющего любые две точки графика), а правая часть — «выпуклость вниз».

Мы уже установили, что графики левой и правой частей имеют общую точку с абсциссой, равной нулю. Поэтому становится очевидным, что луч с началом в точке $(-1; 0)$, проходящий через точку $(0; 1)$, разделяет два случая: левее общей точки график левой части выше графика правой, а правее — наоборот (это хорошо видно на рисунке).

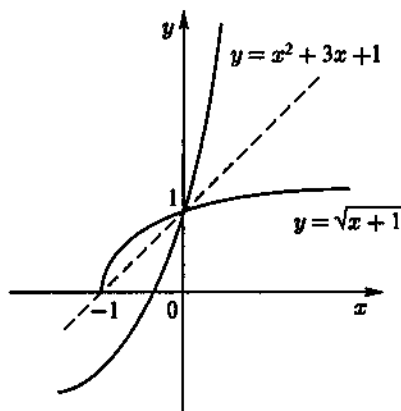


Рис. 13

В задаче требуется найти, при каких значениях переменной график левой части ниже графика правой. Это легко находится из рисунка.

Теперь второй текст. Он взят из «Пособия по математике» Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова (третье, переработанное издание, вышедшее в 1973 г. С. 416–417) — настольной книги абитуриентов 70-х.

Решить уравнение $2 \sin x = 5x^2 + 2x + 3$.

Для того чтобы подступиться к этому уравнению, посмотрим, как ведут себя графики его левой и правой частей. Если эти графики пересекутся, то абсциссы точек пересечения и будут корнями данного уравнения, если не пересекутся, то уравнение корней не имеет. Из рис. 135 «Пособия по математике» ясно, что уравнение не имеет корней.

На этом заканчивается «черновое» решение. Но его нельзя считать «чистовым»: ведь график — не доказательство, остается еще формально убедиться, что это уравнение не имеет корней. Разумеется, наше графическое рассуждение вовсе не пропадет, именно им мы и воспользуемся для нахождения строгого доказательства... (Дальше следует еще пара абзацев).

«Чистовое» решение может выглядеть примерно так:

«Данное уравнение не имеет корней: действительно, при любом x справедливы неравенства

$$5x^2 + 2x + 3 = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5} \geq \frac{14}{5} > 2 \quad \text{и} \quad 2 \geq 2 \sin x,$$

т. е. $5x^2 + 2x + 3 > 2 \sin x$, что и требовалось доказать».

В этом решении скрыт тот факт, что мы пользовались сначала нестрогими рассуждениями — решали задачу с помощью графиков.

Бросаются в глаза фразы: «это хорошо видно на рисунке», «это легко находится из рисунка» — из первого отрывка и соответственно: «график — не доказательство» — из второго. В указанном пособии много задач, решенных подобными же методами, и всякий раз авторы предостерегают: «Такое решение лучше всего оставить в черновике», «Рассуждение, основанное на графиках, совершенно нестрогое».

В нынешние времена авторы пособий уже не говорят таких сильных слов: «совершенно нестрогое». Почему? Может быть, эти рассуждения стали более строгими с течением времени? Или может быть, приемные комиссии смягчились? А что если авторы просто не хотят пугать потенциального поступающего уровнем строгости, которого ему никогда не достичь? На все эти вопросы поступающие ответят на собственном опыте (а лучше бы до него не дошло).

Справедливости ради, скажем, что и суровые Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов и Н. Х. Розов прибавляют (с. 454): «В дальнейших примерах мы будем ограничиваться только „черновым“ решением, оставляя строгое доказательство читателям в качестве полезного и даже необходимого упражнения». Таким образом, решения в книгах нашего жанра надо понимать, что называется, *ad libitum*: для кого-то они строгие, для кого-то — не совсем...

17. Решить неравенство $\sqrt{x^3 + 3x} > x^2 - 6x + 3$.

◀ Поскольку $x^3 + 3x \geq 0$, если $x \geq 0$, и при этих значениях правая часть может быть как положительной, так и отрицательной, успех решения зависит от того, удастся ли нам найти корни уравнения

$$\sqrt{x^3 + 3x} = x^2 - 6x + 3 \quad \text{или} \quad x^3 + 3x = (x^2 - 6x + 3)^2;$$

поэтому начнем с него.

Замечая, что $x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$, заменяем $x^2 + 3 = y$, что позволяет переписать уравнение в виде

$$xy = (y - 6x)^2 \quad \text{или} \quad y^2 - 13xy + 36x^2 = 0.$$

Это однородное уравнение приводит к соотношениям а) $y = 4x$, б) $y = 9x$, которые дают 4 корня исследуемого уравнения:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = \frac{9 - \sqrt{69}}{2}, \quad x_4 = \frac{9 + \sqrt{69}}{2};$$

однако первые два не удовлетворяют условию $x^2 - 6x + 3 \geq 0$.

Теперь остается воспользоваться методом интервалов и определить знаки функции

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 3x} - x^2 + 6x - 3$$

на промежутках $(0; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_4; \infty)$. На втором и третьем интервалах сделать это просто, поскольку они содержат достаточное количество целых чисел; подстановка $x = 1$ и $x = 10$ показывает, что $f(x) > 0$ на $(x_3; x_4)$ и $f(x) < 0$ на $(x_4; \infty)$. Что касается интервала $(0; x_3)$, то ясно, что с приближением к 0 роль величин, зависящих от x , становится всё меньшей, и знак определяет константа -3 , т. е. $f(x) < 0$. (Конечно, вместо этих рассуждений можно просто подставить, скажем, $x = 1/5$.) ►

☞ **Ответ:** $x \in ((9 - \sqrt{69})/2; (9 + \sqrt{69})/2)$.

Ну и, конечно, при решении неравенств не всегда удастся действовать «в лоб» — могут понадобиться и оценки, и исследования, и всё-всё-всё.

18. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2 - 22x + 121}{x^2 - 24x + 140}} \geq 50x - 2x^2 - 309.$$

◀ Здесь устрашающий вид как подкоренного выражения, так и правой части вселяет надежду, что до возведения в квадрат дело всё же не дойдет.

ОДЗ определяется неравенством

$$\frac{x^2 - 22x + 121}{x^2 - 24x + 140} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 11)^2}{(x - 10)(x - 14)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 10) \cup \{11\} \cup (14; +\infty).$$

Теперь выясним, когда неотрицательна правая часть, т. е. решим неравенство

$$50x - 2x^2 - 309 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 25x) + 309 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 \leq \frac{625}{2} - 309 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{25 - \sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{25 + \sqrt{7}}{2}.$$

Но всякий может убедиться в том, что интервал $((25 - \sqrt{7})/2; (25 + \sqrt{7})/2)$ полностью лежит внутри интервала $(11; 14)$, т. е. не входит в ОДЗ. Значит, при $x \in (-\infty; 10) \cup \{11\} \cup (14; +\infty)$ правая часть неравенства отрицательна и неравенство выполнено. ►

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; 10) \cup \{11\} \cup (14; +\infty)$.

19. Решить неравенство

$$x^3 + \frac{1}{x} \geq \frac{4}{3} \sqrt[4]{3}.$$

◀ «Странное» число в правой части указывает на то, что и решать неравенство следует не совсем «обычно». Прежде всего, нельзя не заметить, что

$$\frac{4}{3} \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3} + \frac{1}{(\sqrt[4]{3})^3},$$

т. е. при $x = 1/\sqrt[4]{3}$ левая и правая части равны. Возникает предположение, что это значение — точка минимума функции, стоящей слева. Для проверки найдем производную функции $y = x^3 + 1/x$. Имеем $y' = 3x^2 - 1/x^2$. Производная равна 0, если $x^4 = 1/3$, т. е. $x = 1/\sqrt[4]{3}$ (отрицательное значение отбрасываем, поскольку при $x < 0$ неравенство заведомо не удовлетворяется). Если $x > 1/\sqrt[4]{3}$, например, $x = 1$, то $y' > 0$; если $x < 1/\sqrt[4]{3}$, например, $x = 1/2$, то $y' < 0$. Значит, $x = 1/\sqrt[4]{3}$ действительно точка минимума, и неравенство выполнено при всех $x > 0$. ►

☛ **Ответ:** $x \in (0; +\infty)$.

20. Решить неравенство $x^{10} - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x + 1 > 0$.

◀ И это неравенство смотрится страшновато: разнорядной в показателях степени сразу убивает надежду на удачную группировку.

Заметим для начала, что при отрицательных x неравенство верно. Возникает догадка, что при положительных значениях неизвестного имеет место одно из двух: либо неравенство верно, либо неверно. Какая из гипотез вам более по душе? Правильно, первая выглядит привлекательнее, хотя бы потому, что значение $x = 0$ (при котором неравенство тоже верно) ничем не замечательно и непонятно, почему оно должно разделять множество решений. Осталось доказать то, в чем мы уже почти уверены.

Рассмотрим два случая: 1) $x \geq 1$; 2) $0 < x < 1$.

Если $x \geq 1$, то

$$x^{10} \geq x^7, \quad x^6 \geq x^5, \quad x^4 \geq x,$$

и всё в порядке: неравенство удовлетворяется.

Если $0 < x < 1$, то надо несколько обратить рассуждения:

$$x^6 > x^7, \quad x^4 > x^5, \quad 1 > x$$

и, поскольку оставшееся без пары $x^{10} > 0$, вся левая часть снова положительна. Итак, действительно, $x \in (-\infty; +\infty)$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; +\infty)$.

21. Решить неравенство $2x^9 - x^5 + x > 2$.

◀ С одной стороны, неравенство, конечно, можно переписать так:

$$2(x^9 - 1) - x(x^4 - 1) > 0,$$

откуда видно, что выделяется множитель $x-1$. Не станем, однако, раскладывать на множители высокие степени, а рассмотрим функцию

$$f(x) = 2x^9 - x^5 + x - 2.$$

Ее производная $f'(x) = 18x^8 - 5x^4 + 1$ всегда положительна (дискриминант квадратного трехчлена $18y^2 - 5y + 1$ меньше нуля), значит, функция возрастает на всей своей области определения. В частности, при $x > 1$ $f(x) > f(1)$, и поскольку $f(1) = 0$, исходное неравенство выполнено при $x > 1$ (и не выполнено при других значениях x). ▶

☛ **Ответ:** $x \in (1; +\infty)$.

22. Среди всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3y + 2x \geq 2, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y \leq 4, \end{cases}$$

найти такое, для которого выражение $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$ минимально.

◀ Система задает часть круга $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$, расположенную выше прямой

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

А выражение

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = (x + 2)^2 + (y + 3)^2$$

есть квадрат расстояния от произвольной точки $(x; y)$ до точки $(-2; -3)$.

Поскольку наименьшее расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр, для решения поставленной задачи надо опустить перпендикуляр из точки $(-2; -3)$ на прямую

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Уравнение произвольной невертикальной прямой, проходящей через точку $(-2; -3)$, имеет вид $y + 3 = k(x + 2)$, причем в данном случае $k = 3/2$. Поэтому уравнение искомой прямой $y = (3/2)x$. Остается найти точку пересечения данной прямой и прямой

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Подставляя $y = (3/2)x$, получаем $x = 4/13$, и тогда $y = 6/13$. ▶

🔍 **Ответ:** $(4/13; 6/13)$.

В решении мы использовали некоторые факты аналитической геометрии, которые позволяют изложить его достаточно коротко. Подробности — в § 24.

23. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y \leq 0, \\ y^2 - 2xy + 9 \leq 0. \end{cases}$$

◀ Сложение неравенств после выделения полного квадрата дает неравенство $(x - y - 3)^2 \leq 0$, откуда $y = x - 3$. После исключения y система переписывается в виде

$$\begin{cases} x^2 - 18 \leq 0, \\ -x^2 + 18 \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, она выполняется только при $x^2 = 18$, т. е.

$$x = \pm 3\sqrt{2}, \quad y = \pm 3\sqrt{2} - 3.$$

►

☛ **Ответ:** $(-3\sqrt{2}; -3 - 3\sqrt{2}), (3\sqrt{2}; 3\sqrt{2} - 3)$.

Если в неравенстве имеется параметр, внимание приходится по меньшей мере удвоить.

24. При всех a решить неравенство $ax^2 + 2x + 1 > 0$.

◀ Если $a = 0$, то $x > -1/2$. При остальных значениях параметра неравенство является квадратным и структура его решения (т. е. вид ответа) существенно зависит от знака a (чего нет в случае уравнения).

Пусть $a > 0$. Тогда, поскольку $D = 4 - 4a$, имеем: если $D < 0$, т. е. $a > 1$, то неравенство выполнено при всех x ; если $D \geq 0$, т. е. $0 < a \leq 1$, то $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, где

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}.$$

Пусть теперь $a < 0$; тогда $D > 0$ и решение неравенства — интервал $(x_2; x_1)$ (именно в таком порядке, поскольку при $a < 0$ корни связаны неравенством $x_2 < x_1$). ►

☛ **Ответ:** Если $a < 0$, то

$$x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}; \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \right);$$

если $a = 0$, то $x > -1/2$; если $0 < a \leq 1$, то

$$x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}; +\infty \right);$$

если $a > 1$, то $x \in \mathbb{R}$.

25. При всех a решить неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} \geq a + 1$.

◀ Используем геометрический подход. Заметим, что при $a = 0$ неравенство решений не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

задает полуокружность радиуса $|a|$. Уравнение $y = a + 1$ задает прямую, которая может так или иначе располагаться относительно полуокружности.

Если $a + 1 < 0$, т.е. $a < -1$, то прямая лежит ниже полуокружности, и решением неравенства являются все значения x , принадлежащие ОДЗ, т.е. $x \in [a; -a]$

Прямая пересекает полуокружность в двух точках, если

$$\begin{cases} -1 \leq a < 0, \\ a + 1 < |a|, \end{cases}$$

т.е. при $-1 \leq a < -1/2$. В этом случае неравенство выполняется на отрезке $[x_1; x_2]$, где $x_{1,2}$ — корни уравнения

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a + 1,$$

т.е.

$$x \in [-\sqrt{-2a-1}; \sqrt{-2a-1}].$$

При $a = -1/2$ прямая касается полуокружности и решением является только $x = 0$ (этот случай можно не рассматривать отдельно, а включить в предыдущий).

Наконец, если $a > -1/2$, то прямая лежит выше полуокружности, и неравенство решений не имеет. ►

☛ **Ответ:** $x \in [a; -a]$ при $a \leq -1$; $x \in [-\sqrt{-2a-1}; \sqrt{-2a-1}]$ при $-1 < a \leq -1/2$; $\emptyset$ при $a > -1/2$.

26. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x^2 - 2ax + 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

◀ Вершина параболы находится в точке с абсциссой $x_0 = a/2$ и ординатой $y(x_0) = 1 - a^2/2$. Если x_0 лежит на отрезке $[-1; 1]$, т.е. $-2 \leq a \leq 2$, то наименьшее значение данной функции будет достигаться в вершине параболы, а наибольшее значение — в точке $x = 1$, если $a < 0$ и в точке $x = -1$, если $a > 0$, поскольку

$$y(-1) = 3 + 2a, \quad y(1) = 3 - 2a.$$

Если же $x_0 = a/2$ лежит вне отрезка $[-1; 1]$, то оба экстремальных значения достигаются на концах этого отрезка. ►

☛ **Ответ:** Если $a < -2$, то $y_{\text{наим}} = 3 + 2a$, $y_{\text{наиб}} = 3 - 2a$; если $-2 \leq a \leq 0$, то $y_{\text{наим}} = 1 - a^2/2$, $y_{\text{наиб}} = 3 - 2a$; если $0 < a \leq 2$, то $y_{\text{наим}} = 1 - a^2/2$, $y_{\text{наиб}} = 3 + 2a$; если $a > 2$, то $y_{\text{наим}} = 3 - 2a$, $y_{\text{наиб}} = 3 + 2a$.

27. Найти все a , при которых ни одно решение неравенства

$$(a - x^2)(a + 2x - 8) < 0$$

не удовлетворяет условию $x^2 \leq 4$.

◀ Решим задачу двумя способами: обычным аналитическим и графически.

Первый способ (аналитический, довольно муторный).

Перепишем неравенство в виде

$$(x^2 - a)(2x + a - 8) > 0. \quad (*)$$

Если $a \leq 0$, то неравенство равносильно неравенству $2x + a - 8 > 0$, откуда $x > 4 - a/2$. Очевидно, что при $a \leq 0$ условие задачи выполнено, поскольку $4 - a/2 \geq 4$.

Если $a > 0$, то левая часть неравенства (*) обращается в нуль в точках $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$, $x_3 = 4 - a/2$. Сравним между собой x_2 и x_3 .

Условия $x_3 > 0$, $x_3 > x_2$ несовместны.

Если же $x_3 > 0$, $x_3 < x_2$, то решением неравенства (*) будет объединение

$$\left(-\sqrt{a}; 4 - \frac{a}{2}\right) \cup (\sqrt{a}; \infty),$$

всегда имеющее пересечение с отрезком $[-2; 2]$.

Таким образом, $x_3 \leq 0$. Тогда если $x_1 < x_3$ (это выполнено при $a < 16$), то решением неравенства снова будет объединение

$$\left(-\sqrt{a}; 4 - \frac{a}{2}\right) \cup (\sqrt{a}; \infty),$$

однако в данном случае требование задачи будет выполнено, если

$$\begin{cases} 4 - \frac{a}{2} \leq -2; \\ 2 \leq \sqrt{a}, \end{cases}$$

откуда $a \geq 12$. Тогда $12 \leq a < 16$.

Если $x_1 \geq x_3$, т.е. $a \geq 16$, то решение неравенства — объединение

$$\left(4 - \frac{a}{2}; -\sqrt{a}\right) \cup (\sqrt{a}; \infty)$$

и неравенство $\sqrt{a} > 2$ гарантирует выполнение условий задачи.

Итак: $a \in (-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$.

Второй способ (графический, не в пример более короткий).

Используем координатную плоскость $(x; a)$, откладывая по вертикальной оси значения параметра, а по горизонтальной — значения x (как обычно).

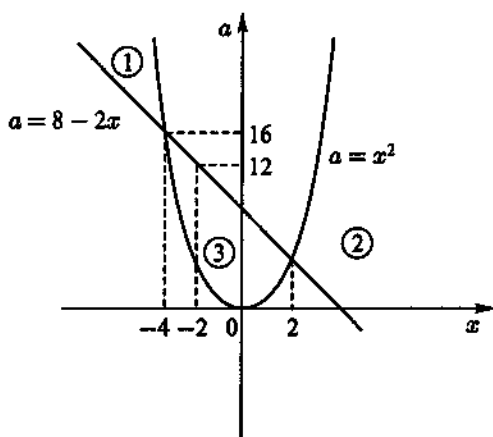


Рис. 14

Для простоты заменим неравенство совокупностью двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} a - x^2 < 0, \\ a + 2x - 8 > 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б) } \begin{cases} a - x^2 > 0, \\ a + 2x - 8 < 0. \end{cases}$$

Построим два графика: параболу $a = x^2$ и прямую $a = 8 - 2x$. Они пересекаются при $x = -4$ и $x = 2$. Решением первой системы являются все точки, расположенные в областях 1 и 2, второй — в области 3 (рис. 14).

Решением задачи будут те $a = a_0$, при которых горизонтальная прямая вида $a = a_0$ не пересекает ту часть области 3, которая лежит в полосе между прямыми $x = \pm 2$, т.е. при $a_0 \leq 0$, $a_0 \geq 12$. ►

☛ **Ответ:** $a \in (-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$.

28. Найти все a , при которых множество решений неравенства

$$x^2 - (a^2 + a)x + a^3 \leq 0$$

содержит не менее пяти целых значений x .

◀ Левую часть неравенства нетрудно разложить на множители, что дает

$$(x - a)(x - a^2) \leq 0.$$

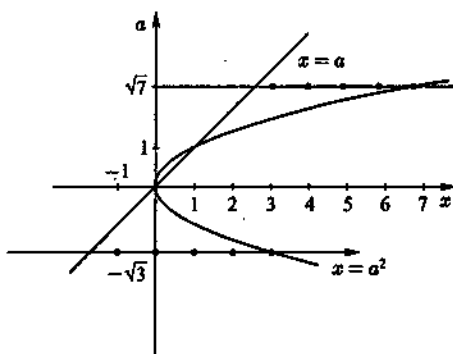


Рис. 15

Теперь строим параболу $x = a^2$ и прямую $x = a$ (рис. 15).

Те части плоскости, на которых неравенство выполняется, заштрихуем. Чтобы это определить, надо из каждой области, на которые прямая и парабола делят плоскость, взять точку и подставить в неравенство. Например, точка $(1; 0)$ не принадлежит заштрихованной области, так как $(1-0)(1-0) > 0$, а точка $(0; -1)$ принадлежит, ибо $(0+1)(0-1) < 0$. Рассмотрим вначале случай $a < 0$. Ясно, что $a = -1$ еще мало (по модулю): решений три ($x = 0$, $x = \pm 1$),

а $a = -2$ уже велико (7 целочисленных точек). Нужные пять решений получаем при $a = -\sqrt{3}$. Аналогично, если $a > 0$, нужная граница наступает при $a = \sqrt{7}$. ►

✎ **Ответ:** $a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

29. Найти все значения a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

◀ Разложим на множители кубические многочлены, фигурирующие в системе.

$$\begin{aligned} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a &= x^3 - ax^2 - 3x^2 + 3ax + 2x - 2a = \\ &= x^2(x-3) - ax(x-3) + 2(x-a) = (x-3)(x^2 - ax) + 2(x-a) = \\ &= (x-a)(x^2 - 3x + 2) = (x-a)(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Аналогично $x^3 - (a+3)x^2 + 3ax = x(x-a)(x-3)$.

Таким образом, дело сводится к выяснению расположения точки $x = a$ относительно точек $x = 0$, $x = 1$; 2 ; 3 .

Если $a \geq 3$, то решением первого неравенства служит объединение

$$[1; 2] \cup [a; +\infty),$$

второго — объединение $(-\infty; 0] \cup [3; a]$. И общая точка единственна — это $x = a$. Значит, $a \geq 3$ удовлетворяет условию задачи.

Если $2 \leq a < 3$, то решение первого неравенства — объединение

$$[1; 2] \cup [a; +\infty),$$

второго — $(-\infty; 0] \cup [a; 3]$. Решением является промежуток $[a; 3]$, т. е. решение не единственно.

Аналогично разбираются остальные случаи, не дающие новых значений параметра. ►

☛ **Ответ:** $a \geq 3$.

- 30.** Найти значения параметра a , при которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 + y \leq 3, \\ y - a + x^2 \leq 0 \end{cases}$$

содержит отрезок с концами в точках $A(0; 1)$ и $B(1; 1)$.

◀ Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (1 - 2a)y + a^2 \leq 3, \\ y \leq a - x^2 \end{cases} \quad (*)$$

Отрезок AB принадлежит области $y \leq a - x^2$ при $a \geq 2$; достаточно потребовать выполнения неравенства > 1 и $a - 1 \geq 1$.

Неравенство $(*)$ задает круг

$$x^2 + \left(y + \frac{1 - 2a}{2}\right)^2 \leq \frac{13}{4} - a,$$

которому отрезок AB принадлежит, если координаты его концов удовлетворяют данному неравенству. Подставляя сразу точку B , получаем неравенство

$$1 + \frac{1}{4}(3 - 2a)^2 \leq \frac{13}{4},$$

из которого следует, что $0 \leq a \leq 2$. Таким образом, $a = 2$. ►

☛ **Ответ:** $a = 2$.

- 31.** Найти все значения x , для которых неравенство

$$(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + 33 - 13a > 0$$

верно при всех $a \in (1; 3)$.

◀ Попытки разложить левую часть на множители ни к чему не приводят — видно, не в том здесь идея. И, поскольку в условии традиционная для задач с параметром формулировка («найти все значения *параметра*...») перевернута, нам не остается ничего другого, как попытаться разрешить неравенство относительно a . Мы имеем $a(2x^2 - 13x + 13) < 4x^2 - 27x + 33$; и это неравенство при $2x^2 - 13x + 13 \neq 0$ распадается на две системы:

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 > 0, \\ a < \frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 < 0, \\ a > \frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13}. \end{cases}$$

Для удовлетворения условиям задачи в первом случае надо потребовать

$$\frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13} \geq 3,$$

а во втором

$$\frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13} \leq 1.$$

В первом случае это приведет нас к системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 > 0, \\ x^2 - 6x + 3 \geq 0, \end{cases}$$

решение которой

$$x \in [3 - \sqrt{6}; (13 - \sqrt{65})/4] \cup (13 + \sqrt{65})/4; 3 + \sqrt{6}];$$

во втором — к системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x + 13 < 0, \\ x^2 - 7x + 10 > 0, \end{cases}$$

из которой $x \in ((13 - \sqrt{65})/4; 2] \cup [5; (13 + \sqrt{65})/4)$.

Остался неисследованным случай

$$2x^2 - 13x + 13 = 0,$$

т. е. $x = (13 \pm \sqrt{65})/4$; тогда исходное неравенство имеет вид $4x^2 - 27x + 33 > 0$ и при данных значениях x выполняется (убеждаемся мы после подстановки). Таким образом, полученные промежутки можно объединить и получить короткий ответ: $x \in [3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$. ►

☛ **Ответ:** $x \in [3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$.

- 32.** Найти все значения параметра a , при которых сумма длин интервалов, являющихся решением неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0,$$

не меньше 1.

◀ Прежде всего, заметим, что, поскольку $-a^2 + 2a - 3 < 0$ при всех a , оба трехчлена имеют по два корня разных знаков. Кроме того, эти корни различны: если бы трехчлены имели общий корень x_0 , то, вычитая из одного трехчлена другой, мы получили бы многочлен первой степени $(a^2 - 7a + 13)x$ с тем же корнем x_0 . Но $(a^2 - 7a + 13)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, а это значение корнями исходных трехчленов не является.

Теперь главное. Обозначим корни числителя через x_1 и x_2 , а корни знаменателя — через x_3 и x_4 (нумеруем корни в парах по возрастанию). Параболы

$$y = x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3 \quad \text{и} \quad y = x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3$$

проходят через общую точку $(0; -a^2 + 2a - 3)$. Поскольку нули каждой параболы имеют разные знаки, исходное неравенство выполнено на промежутках $(x_1; x_3) \cup (x_2; x_4)$. Условие задачи означает: $x_3 - x_1 + x_4 - x_2 \geq 1$.

Но по теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = -2a^2 - 6, \quad x_3 + x_4 = -a^2 - 7a + 7.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$x_3 - x_1 + x_4 - x_2 = a^2 - 7a + 13.$$

Решаем неравенство

$$a^2 - 7a + 13 \geq 1$$

и пишем ответ: $a \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$. ►

☛ **Ответ:** $a \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.

Как писал прекрасный поэт К. Случевский,

Упала молния в ручей,
Вода не стала горячей,

имея в виду, что уроки тех, кого нам не дано понять, пропадают без отклика. Надеюсь все же, что для читателя не оказались чрезмерно запутанными приведенные выше рассуждения и он извлекает из них посильную пользу.



Очередной привал зачарованных охотников

Решите, если хотите, следующие неравенства:

1. а) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \leq 0$; б) $x^8 \geq x^2$.
2. $\frac{4x+2}{2x^2+5x+2} \leq 5$.
3. $\frac{1}{x^2-4} + \frac{4}{2x^2+7x+6} \leq \frac{1}{2x+3} + \frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.
4. $\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88-32x}\right)^2 \leq 1$.
5. $\frac{x^2-x-1}{2x^2+x-2} \geq \frac{x}{3x^2-x-3}$.
6. $1+x+x^2+x^3+x^4 > 0$.
7. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\dots(x^{2009}-1)(x^{2010}-1) \geq 0$.
8. $(9-25x^2)\sqrt{9x+\frac{1}{2x+1}} \geq 0$.
9. $\sqrt{x-x^3} \cdot \sqrt{45x^2-28x+4} \cdot \sqrt{24x^2+13x-7} \leq 0$.
10. $(72x^2+87x+26) \cdot \sqrt{\frac{24x+13}{12x+7}} \leq 0$.
11. $12\sqrt{x+2}-73 < 36x$.
12. $\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0$.
13. $x\sqrt{10-x^2} \geq x^2-6$.
14. $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2$.
15. $\frac{2x^2-24x+72}{\sqrt{x^2-4x-16}} \leq x-6$.
16. $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x$.
17. $\sqrt{2x+1} \leq 2x^2-x-1$.

$$18. \sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-3} > \sqrt{2 - \sqrt[4]{x}}.$$

$$19. \sqrt{3-x^2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x^2-1}.$$

$$20. \sqrt{x + \sqrt{x^3}} + \sqrt{x^5} - \sqrt{3} < \sqrt{x} - 1.$$

$$21. 3 + \sqrt{x} < x^3 + x^2 + 2x.$$

$$22. x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 3.$$

$$23. \sqrt{2+x-x^2} > x^3 - 9.$$

$$24. \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x+1}{4} < \sqrt{2x-1 + \frac{(x+1)^2}{8}}.$$

$$25. \sqrt{(x-2)^2(x-x^2)} < \sqrt{4x-1 - (x^2-3x)^2}.$$

26. Найдите целочисленные решения системы:

$$а) \begin{cases} x - y + 25 \leq 0, \\ x^2 - y \leq 8, \\ 4x + y \leq 1. \end{cases} \quad б) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \\ 4x + 2y > 3. \end{cases}$$

27. Решите при всех a неравенство:

$$а) x + 2a > \sqrt{3ax + 4a^2}; \quad б) ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

Найдите все значения параметра, при которых:

28. Неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} \leq 7a - 1$$

не имеет положительных решений;

29. Неравенство $(x+a)(x-a-2) < 0$ выполнено при всех $x \in [-1/2; 1]$.

30. Множество значений функции $y = ax^2 + x + 1$ содержит отрезок $[-1; 1]$.

31. Неравенство

$$2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0$$

выполнено при всех $x \in [-1; 3]$;

32. Система

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x, \\ x^2 + y^2 \leq a^2, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение;

33. Наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 + (5 - 3a)x + a^2 - 3a + 4$ на отрезке с концами $a - 1$ и -4 минимально. Найдите это значение;
34. Вершины парабол $y = 4x^2 + 8ax - a$ и $y = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -5$.
35. Система

$$\begin{cases} x^2 - x + a \leq 0, \\ x^2 + 2x - 6a \leq 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Кунсткамера

1. Решите неравенство

$$5 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}} + 4 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}} \leq 9\sqrt{x+4}.$$

2. Докажите, что каждое решение неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

является решением неравенства

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}-3/4}{x-55/64}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}-1/4}.$$

Советы и решения

Р 1. а) Разложение на множители дает $(x+1)(x-2)(x^2+1) \leq 0$. Остается применить метод интервалов.

б) После разложения на множители имеем

$$x^2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) \geq 0.$$

Р 2.

$$\dots \Leftrightarrow \frac{2(2x+1)}{(2x+1)(x+2)} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} \leq 5, \quad x \neq -1/2.$$

Р 3.

$$\begin{aligned} \dots &\Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{4}{(2x+3)(x+2)} - \frac{1}{2x+3} - \frac{4}{(x-2)(x+2)(2x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x+2)(2x+3)} \geq 0. \end{aligned}$$

Р 4. Используем разность квадратов и запишем неравенство так:

$$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 - 32x} + 1\right) \times \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 - 32x} - 1\right) \leq 0,$$

что после преобразований приводится к виду

$$\frac{(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 6x + 8)}{(4x - 11)^2} \leq 0.$$

Р 5. Неравенство приводится к виду

$$\frac{y - 1}{2y + 1} \geq \frac{1}{3y - 1},$$

где $y = x - 1/x$; отсюда $y < -1/2$, $\leq y < 1/3$, $y \geq 2$. И надо решить серию (совокупность) неравенств, подставляя $y = x - 1/x$.

Р 6. Если $x \geq 0$, неравенство выполнено. Если $-1 < x < 0$, то

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1) > 0,$$

$x^4 + x + 1 > 0$ — неравенство выполнено. Если $x \leq -1$, то

$$x^4 + x^3 = x^3(x + 1) \geq 0,$$

$x^2 + x + 1 > 0$ — неравенство снова выполнено. Можно решить неравенство и непосредственно, заменой $x + 1/x = y$.

Р 7. Прежде всего, докажем, что левая часть обращается в нуль только при $x = \pm 1$. Действительно, при четном $n = 2k$ имеем

$$x^{2k} - 1 = y^k - 1 = (y - 1)(y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + 1), \quad \text{где } y = x^2,$$

и вторая скобка всегда положительна, а первая равна 0 при $x = \pm 1$. При нечетном $n = 2k + 1$ имеем

$$x^{2k+1} - 1 = (x - 1)(x^{2k} + x^{2k-1} + \dots + 1)$$

и вторая скобка снова положительна, что устанавливается рассуждениями, аналогичными примененным в задаче 6. Итак, неравенство равносильно такому: $(x - 1)^p(x + 1)^q \geq 0$, причем $p = 2010$, а $q = 1005$, поскольку множитель $x + 1$ имеется только в тех скобках, где показатель степени четный. Значит, по сути, остается решить неравенство $(x - 1)^2(x + 1) \geq 0$.

Р 8. ОДЗ $-1/2 < x \leq -1/3$, $x \geq -1/6$ нужно совместить с решением неравенства $9 - 25x^2 \geq 0$.

Р 9. Неравенство выполнено, если равно нулю хотя бы одно из подкоренных выражений, плюс условия существования каждого радикала.

Р 10. ОДЗ определяется условиями $x < -7/12$, $x \geq -13/24$. Остается совместить с ОДЗ решение неравенства $72x^2 + 87x + 26 \leq 0$ и добавить значение $x = -13/24$, которое также является решением.

Р 11. Заменяем $\sqrt{x + 2} = y \geq 0$; придем к неравенству

$$36y^2 - 12y + 1 > 0 \quad \text{или} \quad (6y - 1)^2 > 0,$$

откуда $y \geq 0$, $y \neq 1/6$.

Р 12. Замена

$$\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} = y \geq 0$$

приводит неравенство к виду

$$\frac{y^4}{2} - y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y(y-2)(y^2+2y+2) > 0,$$

откуда $y > 2$.

Р 13. ОДЗ: $x \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$. Если $x \in [-\sqrt{10}; -\sqrt{6}]$, то решений нет, так как левая часть неравенства неположительна, правая — неотрицательна, а одновременное равенство нулю невозможно. Если $x \in (-\sqrt{6}; 0)$, то неравенство равносильно такому:

$$x^2(10-x^2) \leq (x^2-6)^2$$

и решается заменой $x^2 = y$. Если $x \in [0; \sqrt{6}]$, неравенство выполнено (левая часть неотрицательна, правая — неположительна). Если, наконец, $x \in (\sqrt{6}; \sqrt{10}]$, неравенство равносильно

$$x^2(10-x^2) \geq (x^2-6)^2.$$

Р 14. Приводим неравенство к виду

$$\frac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x} \geq 0$$

и решаем методом интервалов.

Р 15. Неравенство можно переписать в виде

$$2(x-6)^2 \leq (x-6)\sqrt{x^2-4x-16}.$$

Если $x-6 > 0$, то имеем

$$2x-12 \leq \sqrt{x^2-4x-16},$$

что в данном случае равносильно

$$(2x-12)^2 \leq x^2-4x-16.$$

Если $x-6 < 0$, то

$$2x-12 \geq \sqrt{x^2-4x-16};$$

здесь решений нет.

Р 16. Переписываем неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x+x^2})}{x+1} \leq 0,$$

что равносильно

$$\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x+x^2})}{x+1} \leq 0$$

и применяем метод интервалов.

Р 17. Неравенство приводится к виду

$$\sqrt{2x+1}(1-(x-1)\sqrt{2x+1}) \leq 0.$$

Дальше — метод интервалов.

Р 18. ОДЗ определяется условиями $3 \leq x \leq 16$. Пусть

$$f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-3}, \quad g(x) = \sqrt{2 - \sqrt[4]{x}}.$$

Поскольку

$$f(3) = 1 > g(3) = \sqrt{2 - \sqrt[4]{3}}$$

(ибо $\sqrt[4]{3} > 1$), а $f(x)$ возрастает, тогда как $g(x)$ убывает, неравенство выполнено на всей ОДЗ.

Р 19. ОДЗ: $x = -1, 1 \leq x \leq \sqrt{3}$. Очевидно, что $x = -1$ является решением. При $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ перепишем неравенство так:

$$\sqrt{3-x^2} \geq \sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}-1).$$

Решением будут все значения, входящие в ОДЗ, поскольку правая часть неположительна, а левая — неотрицательна.

Р 20. Заменяем $\sqrt{x} = y \geq 0$ и возведем в квадрат; мы получим

$$y^5 + y^3 - 2(\sqrt{3}-1)y + 2\sqrt{3} - 4 < 0.$$

Поскольку $y = 1$ — значение, обращающее в 0 левую часть, после деления получаем

$$(y-1)(y^4 + y^3 + 2y^2 + 2y + (\sqrt{3}-1)^2) < 0.$$

Отсюда $0 \leq y < 1$, так как вторая скобка положительна.

Р 21. И тут заменяем $\sqrt{x} = y \geq 0$ и получаем

$$y^6 + y^4 + 2y^2 - y - 3 > 0 \quad \text{или} \quad (y-1)(y^5 + y^4 + 2y^3 + 2y^2 + 4y + 3) > 0,$$

откуда $y > 1$.

Р 22. ОДЗ: $|x| > 2$. Если $x < -2$, то решений нет, так как левая часть отрицательна.

Если $x > 2$, то неравенство выполнено, поскольку $x > \sqrt{x^2-4}$ и, значит,

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 2 + 1 = 3.$$

Р 23. Поскольку ОДЗ определяется условием $2 + x - x^2 \geq 0$, $x \in [-1; 2]$. Но если $x \leq 2$, то $x^3 - 9 < 0$, т. е. неравенство выполнено на всей ОДЗ.

Р 24. Неравенство имеет вид

$$u + v < \sqrt{2u^2 + 2v^2}, \quad \text{где} \quad u = \sqrt{x - \frac{1}{2}}, \quad v = \frac{x+1}{4}.$$

И если $u + v < 0$, то оно выполнено при всех допустимых x . Если же $u + v \geq 0$, то оно равносильно $u^2 - 2uv + v^2 > 0$, что верно при $u \neq v$.

Р 25. Неравенство равносильно неравенству

$$(x-2)^2(x-x^2) < 4x-1-(x^2-3x)^2$$

при условии $(x-2)^2(x-x^2) \geq 0$. Это последнее неравенство выполнено при $x = 2$ и при $0 \leq x \leq 1$. $x = 2$ является решением. Докажем, что при $0 \leq x \leq 1$ решений нет. Рассмотрим функцию

$$y = 4x - 1 - (x^2 - 3x)^2$$

и убедимся, что она отрицательна при $0 \leq x \leq 1$. Действительно, производная

$$y' = -2(x-1)(2x^2 - 7x + 2)$$

на интервале $(0; 1)$ обращается в 0 в точке $x_0 = (7 - \sqrt{33})/4$; функция имеет в этой точке максимум и этот максимум отрицателен:

$$y(x_0) = \frac{175 - 33\sqrt{33}}{32} < 0.$$

Значит, $y < 0$ при $0 \leq x \leq 1$.

Р 26. а) Перепишем систему так:

$$\begin{cases} y \geq x + 25, \\ y \geq x^2 - 8, \\ y \leq 1 - 4x. \end{cases} \quad (*)$$

Значит, должны одновременно выполняться неравенства

$$\begin{cases} x + 25 \leq 1 - 4x, \\ x^2 - 8 \leq 1 - 4x. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяет только одно целое значение x , а именно $x = -5$. Тогда система (*) приводится к виду

$$\begin{cases} y \geq 17, \\ 20 \leq y \leq 21. \end{cases}$$

б) Первое неравенство приводится к виду

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 < \frac{3}{2};$$

значит, каждое слагаемое может принимать только значения 0 или 1. Небольшой перебор легко рассматривается.

Р 27. а) Если $x \leq -2a$, неравенство не выполнено. Если $x > -2a$, то надо рассмотреть три возможности: $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$. В первом случае после возведения в квадрат и упрощений находим

$$\begin{cases} x < 0, \\ x > -a, \end{cases}$$

что с учетом ОДЗ, т. е. неравенства $x \leq -4a/3$ не дает ответа. Если $a = 0$, то решением неравенства будет $x > 0$. В третьем случае получаем

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < -a, \end{cases}$$

что с учетом ОДЗ, т. е. $x \geq -4a/3$, дает $x \in [-4a/3; -a) \cup (0; +\infty)$.

б) Разложим на множители, раскрыв скобки и сгруппировав:

$$(ax^4 + 2ax^2) + (x^3 + 2x) + (3a^3x^2 + 6a^3) > 0,$$

$$ax^2(x^2 + 2) + x(x^2 + 2) + 3a^3(x^2 + 2) > 0, \quad (x^2 + 2)(ax^2 + x + 3a^3) > 0,$$

т. е. неравенство равносильно неравенству $ax^2 + x + 3a^3 > 0$. Оно решается в том же порядке идей, что и пример 24 данного параграфа.

Р 28. После упрощений приводим неравенство к виду

$$\frac{x^2 + (2 - 6a)x - 5a - 1}{x + a + 1} \leq 0.$$

Корни числителя

$$x_1 = 3a - 1 - \sqrt{9a^2 - a + 2}, \quad x_2 = 3a - 1 + \sqrt{9a^2 - a + 2},$$

знаменателя — $x_3 = -a - 1$. Оба корня числителя положительны, если

$$\begin{cases} -5a - 1 > 0, \\ 2 - 6a < 0. \end{cases}$$

Здесь решений нет. Оба указанных корня отрицательны, если

$$\begin{cases} -5a - 1 > 0, \\ 2 - 6a > 0, \end{cases}$$

откуда $a < -1/5$. Тогда условие задачи выполнено, если $x_3 \leq 0$, т.е. при $a \geq -1$. Таким образом, $-1 \leq a < -1/5$. Корни числителя имеют разные знаки, если $a > -1/5$. Тогда условие задачи выполнено в случае $x_2 = x_3$, что дает уравнение

$$3a - 1 + \sqrt{9a^2 - a + 2} = -a - 1,$$

которое, однако, не имеет решений. Если $a = -1/5$, то неравенство принимает вид

$$\frac{x^2(x + 16/5)}{x + 4/5} \leq 0$$

и положительных решений не имеет.

Р 29. Изобразив на плоскости $(x; a)$ прямые $a = -x$ и $a = x - 2$, заштрихуем области, в которых неравенство выполнено, и легко установим, что условию задачи удовлетворяют $a < -5/2$ и $a > 1/2$.

Р 30. Если $a = 0$, то условие задачи выполнено. Если $a > 0$, то требуем, чтобы было $y_0 \leq -1$; если $a < 0$, то, соответственно, $y_0 \geq 1$, где $y_0 = 1 - 1/4a$ — ордината вершины параболы.

Р 31. Пусть $\sqrt{2x + 3} = y$; исходное неравенство принимает вид

$$(a - 1)y^2 + 2y - 2 < 0$$

и должно выполняться при всех $y \in [1; 3]$. Если $a = 1$, то $y < 1$ — условие не выполнено. Пусть $a > 1$. Так как

$$D = 4(2a - 1) > 0,$$

то имеем два корня y_1 и y_2 , и условие задачи выполнено, если $y_1 < 1$, $3 < y_2$, что равносильно неравенствам

$$f(1) < 0, \quad f(3) < 0, \quad \text{где} \quad f(y) = (a - 1)y^2 + 2y - 2.$$

Приходим к системе

$$\begin{cases} a < 1, \\ a < \frac{5}{9}, \end{cases}$$

из которой $a < 5/9$, что несовместно с $a > 1$. Пусть теперь $a < 1$; тогда условие задачи может быть выполнено в двух случаях: а) $D < 0$ и тогда $a < 1/2$; б) $D > 0$, $f(1) < 0$, $f(3) < 0$, $y_0 \notin [1; 3]$ (абсцисса вершины параболы находится вне отрезка $[1; 3]$). Как показывает анализ, данные условия несовместны.

Р 32. Исключая y из второго уравнения и подставляя в первое, получим уравнение $8x^3 - 16x^2 - 25 = 0$, единственный корень которого $x = 5/2$; тогда $y = 5/4$. Значит, $a^2 \geq 125/16$.

Р 33. Прежде всего вычисляем

$$f(a-1) = a+1, \quad f(-4) = a^2 + 9a + 16.$$

Если

$$f_{\min} = a+1, \quad \text{то} \quad a+1 > a^2 + 9a + 16, \quad a \in (-5; -3)$$

и $f_{\min}$ минимально при $a = -5$. Если

$$f_{\min} = a^2 + 9a + 16, \quad \text{то} \quad a \in (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty).$$

Наименьшее значение трехчлена $a^2 + 9a + 16$ при $a \leq -5$ достигается при $a = -5$ и равно -4 ; при $a \geq -3$ — достигается при $a = -3$ и равно -2 .

Р 34. Координаты вершины первой параболы $(-a; -a-4a^2)$, второй — $(1/a; a-2-4/a)$. Условие задачи выполняется, если ординаты вершин либо обе больше -5 , либо меньше, т. е. при $(5-a-4a^2)(a+3-4/a) > 0$.

Р 35. Первое неравенство выполнено (если выполнено) при $x \in [x_1; x_2]$, где

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2};$$

второе — при $x \in [x_3; x_4]$, где

$$x_3 = -1 - \sqrt{6a+1}, \quad x_4 = -1 + \sqrt{6a+1}.$$

Единственное решение — единственная точка пересечения отрезков $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$ означает: $x_1 = x_4$ (первый отрезок расположен правее второго), либо $x_2 = x_3$ (первый отрезок левее). Получаем два иррациональных уравнения.

Кунсткамера

Р 1. После уничтожения иррациональностей в знаменателях приходим к неравенству

$$5|\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}| + 4|\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}| \leq 9\sqrt{x+4},$$

причем оба подмодульных выражения положительны, поэтому отбрасываем модули и получаем $\sqrt{x+3} \leq 0$, откуда $x = -3$.

Р 2. Как писали в рекламном буклете к автосигнализации «Sirio 777», даже не пытайтесь! Т. е. совершенно не нужно решать данные неравенства. Заметим, что первое неравенство можно переписать так:

$$\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt[3]{x^2-1} - 1 > 2.$$

Обозначим

$$\sqrt{x-1} + 1 = u, \quad \sqrt[3]{x^2-1} - 1 = v.$$

Тогда по условию $u + v > 2$, причем $u \geq 1$, $v \geq -1$. Второе неравенство имеет вид $u^2 + v^2 > 2$. На координатной плоскости (u, v) область $u + v > 2$ расположена над

прямой $v = 2 - u$ (u — абсцисса, v — ордината), следовательно, и вне круга $u^2 + v^2 > 2$, что и требуется.

Р 3. Заменяем $\sqrt{x} = t$; тогда допустимые значения t таковы:

$$0 \leq t < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} < t \leq \frac{3}{4}, \quad t \geq \sqrt{\frac{55}{64}}.$$

Если $0 \leq t < 1/4$, неравенство

$$\sqrt{\frac{t - 3/4}{t^2 - 55/64}} \leq \frac{1}{t - 1/4}$$

не выполнено (правая часть отрицательна). Возводя в квадрат и избавляясь от знаменателей, при $1/4 < t \leq 3/4$ получаем неравенство

$$(4t - 3)(16t^2 - 8t + 1) \geq 64t^2 - 55,$$

при $t \geq \sqrt{55/64}$ — неравенство противоположного знака. В первом случае упрощение дает

$$16t^3 - 36t^2 + 7t + 13 \geq 0 \quad \text{или} \quad (t - 1)(16t^2 - 20t - 13) \geq 0,$$

откуда

$$\frac{5 - \sqrt{77}}{8} \leq t \leq 1, \quad t \geq \frac{5 + \sqrt{77}}{8}.$$

Таким образом, в этом случае, $1/4 < t \leq 3/4$ и тогда $1/16 < x \leq 9/16$. Во втором случае решением будут

$$1 \leq t \leq \frac{5 + \sqrt{77}}{8}.$$

Ответы

1. а) $-1 \leq x \leq 2$; б) $x \leq -1$, $x = 0$, $x \geq 1$; 2. $x < -2$, $-8/5 \leq x < -1/2$, $x > -1/2$; 3. $-2 < x < -3/2$, $1 \leq x < 2$, $x \geq 5$; 4. $-1 \leq x \leq 2$, $3 \leq x \leq 4$;
5. $x \leq (1 - \sqrt{17})/4$, $-1 \leq x < (1 - \sqrt{37})/6$, $1 - \sqrt{2} \leq x < (\sqrt{17} - 1)/4$,
 $1 \leq x < (1 + \sqrt{37})/6$, $x \geq 1 + \sqrt{2}$; 6. $(-\infty; +\infty)$; 7. $x \geq -1$;
8. $-1/2 < x \leq -1/3$, $-1/6 \leq x \leq 3/5$; 9. ± 1 ; 2/5; 10. $-2/3 \leq x < -7/12$,
 $x = -13/24$; 11. $x \geq -2$, $x \neq -71/36$; 12. $2 < x < 8$; 13. $-\sqrt{2} \leq x \leq 3$;
14. $x \leq 0$, $1 \leq x \leq 2$; 15. $20/3 \leq x \leq 8$; 16. $-2 \leq x < -1$, $0 \leq x \leq 1$;
17. $x = -1/2$, $x \geq 3/2$; 18. $3 \leq x \leq 16$; 19. $x = -1$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$;
20. $0 \leq x < 1$; 21. $x > 1$; 22. $x > 2$; 23. $-1 \leq x \leq 2$; 24. $x \geq 1/2$,
 $x \neq 7 \pm 2\sqrt{10}$; 25. $x = 2$; 26. а) $(-5; 20)$, $(-5; 21)$. б) $(3; -4)$, $(4; -5)$;
27. а) Если $a < 0$, то $\emptyset$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$,
то $x \in [-4a/3; -a) \cup (0; +\infty)$. б) Если $a \leq -1/\sqrt[4]{12}$, то решений нет;
если $-1/\sqrt[4]{12} < a < 0$, то $x \in (x_2; x_1)$; если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$; если $a \leq -1/\sqrt[4]{12}$,
то $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; если $a > 1/\sqrt[4]{12}$, то x — любое число. Здесь
 $x_1 = (-1 - \sqrt{1 - 12a^4})/2a$, $x_2 = (-1 + \sqrt{1 - 12a^4})/2a$; 28. $-1 \leq a \leq -1/5$;
29. $a < -5/2$ и $a > 1/2$; 30. $a \leq 1/8$; 31. $a < 1/2$; 32. $|a| \geq 5\sqrt{5}/4$;
33. $a = -5$; $f_{\min} = -4$; 34. $a < -4$, $-5/4 < a < 0$; 35. $a = 0$.

1. -3 ; 3. $1/16 < x \leq 9/16$, $1 \leq x \leq (51 + 5\sqrt{77})/32$.

§ 8. Уравнения, неравенства и системы с модулем

Модуль... Собственно, всё, что надо знать, заключено в определении:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из которого следует, что:

равенство $|x| = a$ равносильно (при $a \geq 0$) двум равенствам (совокупности):
 $x = \pm a$;

неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$;

неравенство $|x| > a$ равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x > a, \\ x < -a. \end{cases}$$

Однако *знать* (для решения задач) желательно не только определение, а прежде всего — разнообразные условия его применения. Так, при решении уравнений вида $|f(x)| = g(x)$ можно заменить его на равносильную систему

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

причем неравенство $g(x) \geq 0$ можно и не решать, а только отобрать удовлетворяющие ему корни уравнений $f(x) = \pm g(x)$. Зато, если $g(x) < 0$, то сразу ясно, что уравнение решений не имеет.

Другой способ состоит в замене уравнения $|f(x)| = g(x)$ на совокупность двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases}$$

И каждый способ имеет как свои достоинства, так и свои слабые места.

1. Решить уравнение $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$.

◀ *Первый способ.*

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0 & \Leftrightarrow |x - 3| = 4x - x^2 - 3 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 4x - x^2 - 3, \\ x - 3 = -4x + x^2 + 3, \\ 4x - x^2 - 3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Корнями уравнений совокупности будут $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, из которых неравенству $4x - x^2 - 3 \geq 0$ удовлетворяют только $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$.

Второй способ.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 4x + x - 3 + 3 = 0, \\ x - 3 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 4x - x + 3 + 3 = 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ x \geq 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x < 3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 2. \end{cases} \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

☛ **Ответ:** 2; 3.

2. Решить уравнение $|3x^2 - 10x + 3| = 10x - 3x^2 - 3$.

◀ Уравнение имеет вид $|a| = -a$ и из определения модуля следует, что оно обращается в тождество при $a \leq 0$. Иными словами, исходное уравнение равносильно *неравенству* (ситуация, обратная «экстремальности», когда *неравенство* сводится к *уравнению*) $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$, т.е. $x \in [1/3; 3]$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [1/3; 3]$.

3. Решить уравнение $|x^3 - 3x + 1| = x - 2$.

◀ А вот для этого уравнения годится только первый способ, поскольку найти нули подмодульной функции нелегко. Поэтому имеем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = x - 2, \\ x^3 - 3x + 1 = 2 - x, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^3 - 4x + 3 = 0, \\ x^3 - 2x - 1 = 0, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Корни первого уравнения:

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2},$$

корни второго:

$$x_4 = -1, \quad x_{5,6} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

однако ни одно из этих шести значений не удовлетворяет неравенству $x \geq 2$. ►

✎ **Ответ:** $\emptyset$.

4. Решить уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 3\sqrt{x} - 9}{x^2 + 3\sqrt{x} - 9} \right| = 1.$$

◀ Уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 3\sqrt{x} - 9 = x^2 + 3\sqrt{x} - 9, \\ x^2 - 3\sqrt{x} - 9 = -x^2 - 3\sqrt{x} + 9, \end{cases}$$

из которой находим $x = 0$ или $x = \pm 3$. С учетом ОДЗ: $x \geq 0$, $x^2 - 3\sqrt{x} - 9 \neq 0$ получаем ответ: 0; 3. ►

✎ **Ответ:** 0; 3.

5. Найти все корни уравнения $x + 1 + |x^2 - x - 3| = 0$, удовлетворяющие условию $x + \sqrt{14/3} > 0$.

◀ Имеем равносильную систему

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = \pm(x + 1), \\ -x - 1 \geq 0, \\ x > -\frac{\sqrt{14}}{3}. \end{cases}$$

Корнями квадратных уравнений служат $x = 1 \pm \sqrt{5}$ и $x = \pm\sqrt{2}$, которые надо проверить на условия $-\sqrt{14/3} < x \leq -1$. Большие корни каждой пары заведомо отпадают как положительные. Неравенство $1 - \sqrt{5} > -\sqrt{14/3}$ верно, поскольку цепочка равносильностей

$$3 + \sqrt{14} > 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 23 + 6\sqrt{14} > 45 \Leftrightarrow 126 > 121$$

приводит к верному неравенству. Неравенство $-\sqrt{2} > -\sqrt{14/3}$ не выполняется. ►

✎ **Ответ:** $1 - \sqrt{5}$.

С усложнением теоретической базы (а модуль — трудное понятие) возрастают возможности задач, рассчитанных «на дурачка», т. е. на учащегося, усвоившего теорию формально (а то и вообще никак).

6. Решить уравнение $|x^3 - x - 1| = 2\sqrt{6} - 5$.

◀ Конечно, прежде чем приступить к раскрытию модуля, следует заметить, что $2\sqrt{6} - 5 < 0$, поскольку

$$2\sqrt{6} = \sqrt{24} < \sqrt{25} = 5,$$

а потому уравнение решений не имеет. ▶

☛ **Ответ:** $\emptyset$.

Но хорошо нам смеяться над теми, кто решает задачи бездумно; вдруг, однако, мы встретимся с чем-то вроде следующего:

 Решить уравнение $|x^3 - x - 1| = \sqrt[3]{46} - \sqrt[3]{4} - 2$.

◀ К счастью, мы решили задачу 27 г) после § 3 и установили, что

$$\sqrt[3]{46} < 2 + \sqrt[3]{4},$$

а потому и это уравнение корней не имеет. ▶

☛ **Ответ:** $\emptyset$.

7. Решить уравнение $|2x - 5| + y^2 - 6y + 2x + 4 = 0$.

◀ Уравнение можно переписать так:

$$|5 - 2x| - (5 - 2x) + y^2 - 6y + 9 = 0$$

или

$$(5 - 2x) - |5 - 2x| = y^2 - 6y + 9$$

и, заменив $5 - 2x = z$, получить $z - |z| = (y - 3)^2$. Поскольку $z \leq |z|$, $(y - 3)^2 \geq 0$, равенство возможно, только если одновременно $z \geq 0$ и $y = 3$. ▶

☛ **Ответ:** $x \leq 5/2$, $y = 3$.

8. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{5x^2 - 31x + 48} = |x - 2|.$$

◀ Поскольку $|x - 2| \geq 0$, необходимо потребовать, чтобы было выполнено неравенство

$$x^2 - 7x + 12 \geq 5x^2 - 31x + 48,$$

т. е. $4(x - 3)^2 \leq 0$, откуда $x = 3$. Однако при данном значении неизвестного правая часть исходного равенства равна 1, а левая 0. ▶

☛ **Ответ:** $\emptyset$.

9. Решить уравнение $|x - 1| + |x - 4| = 3$.

◀ Теперь более предпочтительным выглядит путь непосредственного раскрытия модулей. Для этого необходимо рассмотреть три случая:

а) $x \leq 1$; тогда

$$|x - 1| = 1 - x, \quad |x - 4| = 4 - x,$$

и уравнение приводится к виду $5 - 2x = 3$, т. е. $x = 1$. Это значение является корнем, как удовлетворяющее условию $x \leq 1$.

б) $1 < x < 4$. Тогда

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 4| = 4 - x;$$

уравнение сводится к тождеству $3 = 3$. Значит, корнем уравнения является любое значение неизвестного, удовлетворяющее условию $1 < x < 4$.

в) $x \geq 4$. Тогда

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 4| = x - 4 \Rightarrow 2x - 5 = 3,$$

и $x = 4$ — корень уравнения в данном случае. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [1; 4]$.

10. Решить уравнение $\sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1|$.

◀ И в этом случае нужно честно и кропотливо раскрывать модули. Поскольку нули подмодульных выражений — это $x = \pm 5/4$ и $x = -1$, надо рассмотреть 4 случая (по числу интервалов, на которые нули разбивают числовую прямую).

а) $x \leq -5/4$; тогда имеем $\sqrt{16x^2} = -4x$. Нетрудно видеть, что на рассматриваемом интервале это — тождество, поскольку согласно правилу $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt{16x^2} = |4x| = -4x,$$

т. е. левая часть именно и равна правой.

Собрав такой богатый урожай решений на первом интервале, следует ожидать, что в дальнейшем их будет поменьше. Действительно:

б) $-5/4 < x \leq -1 \Rightarrow \sqrt{50 - 16x^2} = -4x \Rightarrow 32x^2 = 50 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \pm 5/4$ — на данном интервале решениями не являются.

в) $-1 < x \leq 5/4 \Rightarrow \sqrt{50 - 16x^2} = 4x + 8 \Rightarrow 32x^2 + 64x + 14 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = -1/4$ — корень уравнения, $x = -7/4$ — посторонний корень.

г) $x > 5/4 \Rightarrow \sqrt{16x^2} = 4x + 8 \Rightarrow 64x + 64 = 0$. На рассматриваемом интервале корней у этого уравнения нет. ►

☛ **Ответ:** $x \leq -5/4$, $x = -1/4$.

11. Решить уравнение $|x^3 - 3x + 1| = |x^3 + 3x^2 - 1|$.

◀ Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ независимо от того, можем мы найти нули подмодульных выражений или нет, лучше сразу заменить на равносильную совокупность

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

В данном случае это даст нам два уравнения:

$$3x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^3 + 3x^2 - 3x = 0,$$

корни которых

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}, \quad x_3 = 0, \quad x_{4,5} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

не требуют никакой проверки. ►

☛ **Ответ:** 0, $(-3 \pm \sqrt{33})/4$, $(-3 \pm \sqrt{33})/6$.

12. Решить уравнение $|x^3 - 6x^2 + 11x - 6| + |x^3 - 9x^2 + 26x - 24| = 0$.

◀ Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда оба числа равны нулю. Значит, для того чтобы решить данное уравнение, достаточно найти общие корни подмодульных многочленов. Первый многочлен

имеет корень $x = 1$; после деления находим остальные корни: 2 и 3. Второй многочлен имеет корень $x = 2$, два других корня — это 3 и 4. ►

☛ **Ответ:** 2; 3.

13. Решить уравнение $|x^2 + 5x - 5| + |x^2 + 5x + 5| = 12$.

◀ Нахождение нулей каждого из подмодульных трехчленов уведет нас слишком далеко. Заменим лучше $x^2 + 5x = y$; левая часть уравнения

$$|y - 5| + |y + 5| = 12$$

является четной функцией, поэтому достаточно рассмотреть случай $y \geq 0$. Если $y \geq 5$, получаем $2y = 12$, т. е. $y = 6$. Если $0 \leq y < 5$, то после раскрытия модулей получаем равенство $-10 = 12$, т. е. в этом случае решений нет. Итак, в силу четности, $y = \pm 6$. Остается решить уравнения $x^2 + 5x = \pm 6$. ►

☛ **Ответ:** -6; -3; -2; 1.

14. Решить уравнение $|x^3 - 5x^2 + 4x + 6| + |3x - x^2 - 1| = 22x - 77$.

◀ Перепишем уравнение так:

$$|(x - 3)(x^2 - 2x - 2)| + |x^2 - 3x + 1| = 11(2x - 7).$$

Очевидно, должно выполняться неравенство $2x - 7 > 0$, т. е. $x > 7/2$. Но тогда

$$x - 3 > 0, \quad x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3 > 0,$$

$$x^2 - 3x - 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > 0.$$

Значит, модули можно просто «снять» и получить

$$x^3 - 5x^2 + 4x + 6 + x^2 - 3x + 1 = 22x - 77 \quad \text{или} \quad x^3 - 4x^2 - 21x + 84 = 0,$$

откуда $x = 4$, $x = \pm\sqrt{21}$. С учетом условия $x > 7/2$ выписываем ответ: 4; $\sqrt{21}$. ►

☛ **Ответ:** 4; $\sqrt{21}$.

15. Решить уравнение $|1 - |1 - |1 - x||| = 1/2$.

◀ В таких «задачах-матрешках» успешно применяется метод решения «с конца». Пусть

$$|1 - |1 - x|| = y, \quad y \geq 0;$$

тогда уравнение имеет вид $|1 - y| = 1/2$; отсюда $y_1 = 1/2$, $y_2 = 3/2$. Значит,

а) $|1 - |1 - x|| = 1/2$ или б) $|1 - |1 - x|| = 3/2$.

Пусть теперь

$$|1 - x| = z, \quad z \geq 0;$$

решая уравнения

$$|1 - z| = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad |1 - z| = \frac{3}{2}$$

(с учетом условия $z \geq 0$), находим

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{3}{2}, \quad z_3 = \frac{5}{2}.$$

Осталось решить три уравнения того же типа: а) $|1 - x| = 1/2$, б) $|1 - x| = 3/2$, в) $|1 - x| = 5/2$ (уже без ограничений на неизвестную величину). В результате получаем ответ: $-3/2$; $-1/2$; $1/2$; $3/2$; $5/2$; $7/2$. ▶

⦿ **Ответ:** $-3/2$; $-1/2$; $1/2$; $3/2$; $5/2$; $7/2$.

16. Решить уравнение

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| + |x| = \frac{x^2}{|x-1|}.$$

◀ В этом уравнении тоже в глазах рябит от модулей, однако если заметить, что

$$\frac{x}{x-1} + x = \frac{x^2}{x-1},$$

т.е. уравнение имеет вид $|a| + |b| = |a + b|$, и учесть неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$, выполняющееся при любых a и b , причем равенство имеет место, только если знаки чисел a и b совпадают, а также в случае равенства нулю хотя бы одного из них, то станет ясно, что уравнение обращается в тождество, если

$$x \cdot \frac{x}{x-1} \geq 0,$$

т.е. при $x \in (1; +\infty) \cup \{0\}$. ▶

⦿ **Ответ:** $x = 0$, $x > 1$.

17. Решить уравнение

$$|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \dots + |x - 100| + |x + 100| = 200x.$$

◀ Заметим, что корнем может быть только неотрицательное значение x и поэтому из неравенства

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_n|$$

(частный случай которого для $n = 2$ мы имели в предыдущем примере), примененного к нашему уравнению, следует, что

$$\begin{aligned} |x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \dots + |x - 100| + |x + 100| &\geq \\ &\geq |200x| = 200x. \end{aligned}$$

Чтобы все подмодульные выражения имели одинаковые знаки — причем, знаки эти должны быть положительными в силу отмеченного выше условия $x \geq 0$, — необходимо выполнение неравенства $x \geq 100$. Тогда уравнение, после упрощения, принимает вид $200x = 200x$, т. е. обращается в тождество.

Неравенство $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_n|$ доказывается в § 24. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [100; +\infty)$.

Методичность требует рассмотрения *систем уравнений с модулем*, и хотя составитель неизвестно ни одного случая, когда система именно благодаря модулю сделалась намного сложнее безмодульной, несколько примеров — перед переходом к неравенствам — едва ли повредят делу.

18. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ |x + 3y + 2z| = 7, \\ 3x + 2y + 3z = 7. \end{cases}$$

◀ Система распадается на две:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ x + 3y + 2z = 7, \\ 3x + 2y + 3z = 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ x + 3y + 2z = -7, \\ 3x + 2y + 3z = 7. \end{cases}$$

Решаем обе параллельно: складывая все уравнения, получаем в случае а) $6x + 6y + 6z = 18$, откуда $x + y + z = 3$; в случае б) аналогично имеем $x + y + z = 2/3$. Случай а): вычитая полученное уравнение из первого, находим

$x = 1$; тогда $y + z = 2$, $3y + 2z = 6$. Умножив первое из этих уравнений и вычитая второе, имеем $z = 0$; тогда $y = 2$. Аналогично в случае б) получаем $x = 10/3$, $y = -5$, $z = 7/3$. ►

☛ **Ответ:** $(1; 2; 0)$, $(10/3; -5; 7/3)$.

19. Решить систему

$$\begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2, \\ xy = 2 + x^2. \end{cases}$$

◄ Рассматриваем два случая. При $xy \geq 4$ получается система

$$\begin{cases} xy - 4 = 8 - y^2, \\ xy = 2 + x^2, \end{cases}$$

которую мы перепишем в виде

$$\begin{cases} y^2 + xy = 12, \\ x^2 - xy = -2. \end{cases}$$

Это однородная система; сложив первое уравнение со вторым, домноженным на 6, получим $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$, откуда 1) $y = 2x$, 2) $y = 3x$.

Первая возможность дает два решения: $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$, удовлетворяющих условию $xy \geq 4$. Вторая возможность приводит к решениям $(1; 3)$, $(-1; -3)$, которые надо отбросить, поскольку для них $xy < 4$.

Пусть теперь $xy < 4$; тогда, раскрывая модуль, снова приходим к однородной системе

$$\begin{cases} y^2 - xy = 4, \\ x^2 - xy = -2. \end{cases}$$

Ее решения новых пар не дает. ►

☛ **Ответ:** $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

20. Найти положительные решения системы

$$\begin{cases} \left| y - \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{5}{2} - x - y \right| = \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \frac{17}{4}. \end{cases}$$

◄ В силу первого уравнения должно выполняться условие $5/2 - x - 1/x \geq 0$. Решая это неравенство (с учетом того, что $x > 0$), находим $x \in [1/2; 2]$.

Кроме того, первое уравнение имеет вид $|a| + |b| = a + b$, что, как мы знаем, равносильно условиям $a \geq 0$, $b \geq 0$. Таким образом,

$$y - \frac{1}{x} \geq 0, \quad \frac{5}{2} - x - y \geq 0,$$

откуда $1/x \leq y \leq 5/2 - x$.

Предположим, что $1/2 < x < 2$, тогда в силу предыдущего неравенства $1/2 < y < 2$ и, значит,

$$x^2 + y^2 < 4 < \frac{17}{4}.$$

Итак, x может принимать только два значения: $x = 2$ и $x = 1/2$. Тогда $y = 1/2$ или $y = 2$. ►

☛ **Ответ:** $(2; 1/2)$, $(1/2; 2)$.

21. Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + |x - \sqrt{y}| = 6 - \frac{9}{|5 - 2x|}.$$

◀ Поскольку $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$, уравнение можно переписать так:

$$|2x - 5| + \frac{9}{|2x - 5|} = 6 - |x - \sqrt{y}|.$$

В силу неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ левая часть уравнения не меньше 6; но правая часть не больше 6.

Значит, одновременно $x = \sqrt{y}$, $|2x - 5| = 9/|2x - 5|$. Теперь уже нетрудно получить ответ: $(1; 1)$, $(4; 16)$. ►

☛ **Ответ:** $(1; 1)$, $(4; 16)$.

22. Решить неравенства: а) $|x^2 - 2x| < x$; б) $|x^3 - x| \geq 1 - x$.

◀ Вспоминая сказанное в начале параграфа относительно неравенств, оформим решение каждого в виде цепочки равносильностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } |x^2 - 2x| < x &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < x, \\ x^2 - 2x > -x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 3), \\ x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) |x^3 - x| \geq 1 - x &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x \geq 1 - x, \\ x^3 - x \leq x - 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq 1, \\ x^3 - 2x + 1 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ (x-1)(x^2 + x - 1) \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Решая совокупность, находим

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup (1; \infty).$$

❖ **Ответ:** а) $x \in (1; 3)$; б) $x \in (-\infty; -(1+\sqrt{5})/2) \cup ((-1+\sqrt{5})/2; 1) \cup (1; \infty)$.

$$23. \text{ Решить неравенство } \left| \frac{2x-1}{x+2} \right| \leq 4.$$

❖ И тут можно не раскрывать модуль на отдельных промежутках, а написать:

$$\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \frac{2x-1}{x+2} \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x+2} \leq 4, \\ \frac{2x-1}{x+2} \geq -4. \end{cases}$$

Решение первого неравенства:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup (-2; \infty), \quad \text{второго: } x \in \left(-\infty; -2\right) \cup \left[-\frac{7}{6}; \infty\right),$$

всей системы: $x \in (-\infty; -9/2] \cup [-7/6; \infty)$. ►

❖ **Ответ:** $x \in (-\infty; -9/2] \cup [-7/6; \infty)$.

24. Решить неравенства

$$\text{а) } |x| \leq x - \frac{1}{x^2}; \quad \text{б) } \frac{1}{|x^2 - x - 2|} > -2; \quad \text{в) } x|x-3| > 0.$$

❖ Считаю эти неравенства небольшой проверкой внимания и бдительности.

- а) Перепишем в виде $|x| - x \leq -1/x^2$; поскольку $|x| \geq x$, решений нет.
 б) Неравенство выполнено, если $x^2 - x - 2 \neq 0$, т.е. при $x \neq -1$, $x \neq 2$.
 в) Левая часть положительна при $x > 0$, $x \neq 3$. ►

❖ **Ответ:** а) $\emptyset$; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$; в) $(0; 3) \cup (3; +\infty)$.

25. Решить неравенство $|1 - |x|| < 1 - x$.

◀ Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - |x| < 1 - x, \\ 1 - |x| > x - 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |x| > x, \\ x + |x| < 2. \end{cases}$$

Первое неравенство выполнено при $x \neq 0$, второе — при $x < 1$, вся система — при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

26. Решить неравенство

$$\left| 1 - \frac{|x|}{1 + |x|} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

◀ Упростив левую часть, получим

$$\frac{1}{1 + |x|} \geq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad 1 + |x| \leq 2, \quad \text{т.е.} \quad -1 \leq x \leq 1. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $-1 \leq x \leq 1$.

27. Решить неравенство $||x^3 - x - 1| - 5| \geq x^3 + x + 8$.

◀ Покажем, как можно оформить решение сухо, с использованием одной лишь логической символики. Имеем:

$$\begin{cases} |x^3 - x - 1| - 5 \geq x^3 + x + 8, \\ |x^3 - x - 1| - 5 \leq -x^3 - x - 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 - x - 1| \geq x^3 + x + 13, \\ |x^3 - x - 1| \leq -x^3 - x - 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x - 1 \geq x^3 + x + 13, \\ x^3 - x - 1 \leq -x^3 - x - 13, \\ \begin{cases} x^3 - x - 1 \leq -x^3 - x - 3, \\ x^3 - x - 1 \geq x^3 + x + 3, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7, \\ x \leq -\sqrt[3]{6}, \\ \begin{cases} x \leq -1, \\ x \leq -2, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{6}, \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt[3]{6}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{6}]$.

28. Решить неравенство $|x^2 + 15x - 77| < |x^2 - 22x + 80|$.

◀ Такие неравенства предпочтительнее всего решать возведением в квадрат с последующим использованием формулы разности квадратов. Поскольку $|a|^2 = a^2$, имеем:

$$\begin{aligned} (x^2 + 15x - 77)^2 &< (x^2 - 22x + 80)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + 15x - 77)^2 - (x^2 - 22x + 80)^2 &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (37x - 157)(2x^2 - 7x + 3) &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{157}{37}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 3) &< 0. \end{aligned}$$

Методом интервалов получаем ответ: $x \in (-\infty; 1/2) \cup (3; 157/37)$. ▶

● **Ответ:** $x \in (-\infty; 1/2) \cup (3; 157/37)$.

29. Решить неравенство $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x+5}| \geq 1$.

◀ Неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{x+5} \geq 1, \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x+5} \leq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 1 + \sqrt{x+5}, \\ \sqrt{x+1} + 1 \leq \sqrt{x+5}. \end{cases}$$

Первое неравенство решений не имеет, так как $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+5}$ всегда. Второе можно возвести в квадрат и прийти к неравенству $2\sqrt{x+1} \leq 3$, откуда $-1 \leq x \leq 5/4$. ▶

● **Ответ:** $-1 \leq x \leq 5/4$.

30. Решить неравенство $\sqrt{4-x} - 2 \leq x|x-3| + 4x$.

◀ ОДЗ определяется условием $x \leq 4$.

Пусть $3 \leq x \leq 4$. Тогда имеем $\sqrt{4-x} \leq x^2 + x + 2$.

Поскольку

$$x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1,$$

а $\sqrt{4-x} \leq 1$, все $x \in [3; 4]$ являются решениями неравенства.

Пусть $x < 3$. Тогда $\sqrt{4-x} \leq -x^2 + 7x + 2$.

Левая и правая части совпадают при $x = 0$. Заметим, что левая часть убывает, а правая возрастает, поэтому $x \in [0; 3]$ являются решениями, а при $x < 0$ неравенство не выполнено. ►

☛ **Ответ:** $x \in [0; 4]$.

31. Решить неравенство

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}.$$

◀ Нет, мы не станем спрашивать (и кого?): «где здесь модуль?», мы понимаем: модуль — внутри. Заменяя $\sqrt{x-1} = y \geq 0$, преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + 1 + 2y} + \sqrt{y^2 + 1 - 2y} &> \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y-1)^2} &> \frac{3}{2} \Leftrightarrow |y+1| + |y-1| > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая неотрицательность y , первый модуль можно снять; тогда мы получим неравенство $y + |y-1| > 1/2$.

Если $y \geq 1$, то, раскрывая модуль, имеем $2y > 3/2$, $y > 3/4$. Решение неравенства: $y \geq 1$.

Если $0 \leq y < 1$, то получаем верное числовое неравенство $1 > 1/2$. Решение неравенства: $0 \leq y < 1$. Значит, неравенство выполнено при всех $y \geq 0$. Таким образом, исходное неравенство выполнено при $\sqrt{x-1} \geq 0$, т.е. при $x \in [1; \infty)$. ►

☛ **Ответ:** $x \geq 1$.

А вот усиленный вариант предыдущего примера. (МГУ, ВМК, 2006).

32. Решить неравенство

$$11\sqrt{2x - \sqrt{48x - 144}} > 2x - 12.$$

Понадобилось всего каких-то 30 лет развития человеческого разума и вместо невинного неравенства

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0$$

(тот же факультет, 1975 г.) от абитуриентов стали требовать куда большего! Отрадно наблюдать приращение интеллекта, происшедшее буквально у нас на глазах!

◀ ОДЗ: $x \geq 3$. Заметим, что при $3 \leq x < 6$ неравенство выполнено, а при $x = 6$ — нет. Рассмотрим случай $x > 6$.

Пусть $\sqrt{2x-6} = y$, тогда $y > \sqrt{6}$ и $2x = y^2 + 6$. Имеем неравенство

$$11\sqrt{y^2+6} - 2\sqrt{6} \cdot y > y^2 - 6$$

или

$$11\sqrt{(y-\sqrt{6})^2} > y^2 - 6 \Leftrightarrow 11|y-\sqrt{6}| > (y-\sqrt{6})(y+\sqrt{6}).$$

Поскольку $y > \sqrt{6}$, сразу получаем $11 > y + \sqrt{6}$ или $y < 11 - \sqrt{6}$, отсюда

$$x < 3 + \frac{y^2}{2} = 3 + \frac{1}{2}(11 - \sqrt{6})^2 = \frac{133 - 22\sqrt{6}}{2}.$$

И окончательно, $3 \leq x < (133 - 22\sqrt{6})/2$, $x \neq 6$. ▶

☛ **Ответ:** $[3; 6) \cup (6; (133 - 22\sqrt{6})/2)$.

«Идеология» решения системы неравенств с модулем мало чем отличается от решения иррационального неравенства без модуля: в обоих случаях дело сводится к совмещению нескольких интервалов, на которых выполнено то или иное простейшее (т. е. линейное или квадратное) неравенство.

33. Решить систему

$$\begin{cases} |x^2 - 6x| < 5, \\ |2x - 6| < 7. \end{cases}$$

◀ Первое неравенство выполняется при $3 - \sqrt{14} < x < 1$, $5 < x < 3 + \sqrt{14}$. Решение второго $-0,5 < x < 6,5$. Поскольку $\sqrt{14} > 3,5$, пересечением будут два интервала: $(-0,5; 1)$ и $(5; 6,5)$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in (-1/2; 1) \cup (5; 13/2)$.

34. Решить неравенство

$$1 < \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 2.$$

◀ Заменяем неравенство равносильной совокупностью

$$\begin{cases} 1 < \frac{x-1}{2x+1} < 2, \\ -2 < \frac{x-1}{2x+1} < -1. \end{cases}$$

Решением первого двойного неравенства являются $x \in (-2; -1)$, второго — $x \in (-1/5; 0)$. ►

☛ **Ответ:** $x \in (-2; -1) \cup (-1/5; 0)$.

И напоследок — перед обращением к параметрам — немного экзотики.

35. Решить неравенство $x - |y| - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1$.

◀ ОДЗ определяется условием $x^2 + y^2 \geq 1$, откуда следует, что должно быть выполнено по крайней мере одно из неравенств $|x| \geq 1$, $|y| \geq 1$. Заметим, что если $x < 1$, то исходное неравенство выполняться не может (левая часть меньше 1). Значит, $x \geq 1$. Если $x = 1$, то неравенство принимает вид $-2|y| \geq 0$, откуда $y = 0$. Если же $x > 1$, преобразуем неравенство так:

$$(x - 1) - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq |y|$$

и после домножения обеих частей на положительное выражение $x - 1 + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, придем к неравенству

$$2 - 2x - y^2 \geq |y|(x - 1 + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}).$$

Но это неравенство не может иметь места, так как левая его часть отрицательна, а правая положительна. ►

☛ **Ответ:** $(1; 0)$.

36. Найти наименьшее значение выражения

$$|2x - y - 1| + |x + y| + |y|.$$

◀ Попробуем выйти в пространство и представить себе поверхность

$$z = |2x - y - 1| + |x + y| + |y|.$$

Это — открытый сверху (со стороны оси Oz) многогранник с шестью бесконечными гранями и одной треугольной — «донышком» (наклонным); это последнее проектируется в треугольник плоскости Oxy , образованный прямыми $2x - y - 1 = 0$, $x + y = 0$, $y = 0$. И более или менее ясно, что экстремальное значение достигается в одной из трех «вершин» многогранника, поскольку иначе мы можем уменьшить данное выражение, спустившись по боковой грани в угловую точку¹⁾.

¹⁾ Для проверки возьмем любую точку, лежащую на нашей поверхности в той же грани, что и точка $N(1/3; -1/3; 1/3)$, например, $A(1; -1; 3)$. Любая точка $B(x; y; z)$ отрезка NA будет иметь

Указанные прямые пересекаются попарно в точках $(0; 0)$, $(1/2; 0)$, $(1/3; -1/3)$. Осталось выяснить, какая из пар доставляет наименьшее значение; подстановка показывает, что это — третья пара, для которой данное выражение равно $1/3$. ►

☛ **Ответ:** $1/3$.

Введение *параметра* способно значительно оживить уравнение (неравенство, систему), в чем мы и убедимся на оставшихся примерах параграфа. Как всегда, разгоняемся постепенно...

37. Решить уравнение $\sqrt{x-3} + a^2|x| = 0$.

◀ Если $a = 0$, то $x = 3$; если $a \neq 0$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - 3 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

которая решений не имеет. ►

☛ **Ответ:** Если $a = 0$, то $x = 3$; если $a \neq 0$, то решений нет.

38. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x-a}}{|x-2|} \geq 0$.

◀ Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq a, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Если $a = 2$, то решением будет $x > 2$; если $a > 2$, то $x \geq a$; если $a < 2$, то $a \leq x < 2$, $x > 2$. ►

☛ **Ответ:** Если $a < 2$, то $x \in [a; 2) \cup (2; +\infty)$; если $a = 2$, то $x \in (2; +\infty)$; если $a > 2$, то $x \in [a; +\infty)$.

аппликату $z < 3$. Действительно: координаты вектора $\vec{NA}$ таковы: $\vec{NA} = (2/3; -2/3; 8/3)$. Поскольку векторы $\vec{NA}$ и $\vec{NB}$ коллинеарны, а вектор $\vec{NB}$ имеет координаты $\vec{NB} = (x-1/3; y+1/3; z-1/3)$, можно записать условие коллинеарности в виде равенств

$$\frac{x-1/3}{2/3} = \frac{y+1/3}{-2/3} = \frac{z-1/3}{8/3} = k$$

или $x = k + 1/3$, $y = -k - 1/3$, $z = 4k + 1/3$. Точка N получается при $k = 0$, точка a — при $k = 2/3$; возьмем промежуточное значение (точка B), например, $k = 1/3$. Для него, как мы видим, $z = 5/3 < 3$.

39. Решить неравенство $(x - 3)|x + a| < 0$.

◀ Если $a = -3$, имеем $(x - 3)|x - 3| < 0 \Rightarrow x < 3$.

Если $a > -3$, то $-a < 3$ и неравенство выполнено при $x < -a$ и при $-a < x < 3$.

Если $a < -3$, то $-a > 3$ и, значит, $x < 3$. ▶

☛ **Ответ:** Если $a \leq -3$, то $x \in (-\infty; 3)$; если $a > -3$, то $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; 3)$.

40. Решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

◀ Это уравнение хочется решать графически. (Не говоря о том, что тема «модуль плюс параметр» и вообще может рассматриваться как составная часть практикума по разделу «графики».) Уступим желанию и, переписав уравнение в виде $|x + 3| - 4 = a|x - 1|$, построим графики его левой и правой частей (рис. 16).

Левая часть имеет вид характерного «уголка» с вершиной в точке $(-3; -4)$, правая представляет собой множество «уголков» с вершиной в точке $(1; 0)$ (а при $a = 0$ — просто ось абсцисс).

Следим за пересечением графиков при разных a . Начнем с положительных значений. При $a > 1$ графики пересекаются только в точке $(1; 0)$, поэтому единственный корень уравнения $x = 1$. При $a = 1$ решением являются все $x \geq 1$. При $0 \leq a < 1$ к $x = 1$ добавляется абсцисса еще одной точки пересечения, расположенной в области $x < -3$; поэтому, раскрывая модули при этом условии, получаем $-x - 3 + a(x - 1) = 4$, откуда $x = (a + 7)/(a - 1)$.

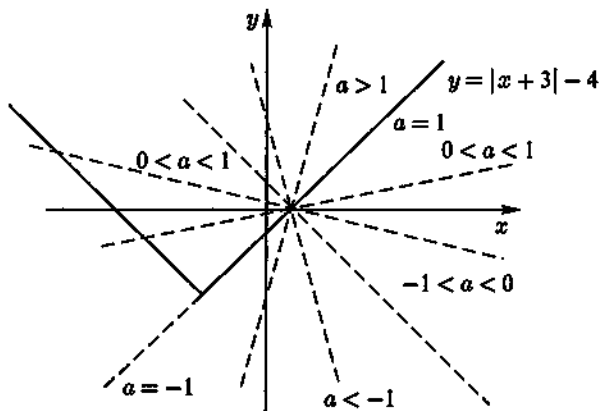


Рис. 16

Теперь то же самое повторяется при $a < 0$. Два корня:

$$x = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{a+7}{a-1}$$

имеем при $-1 < a < 0$. При $a = -1$ графики совпадают на участке $-3 \leq x \leq 1$. И пересечение состоит только из точки $(1; 0)$ при $a < -1$. По итогам исследования выписываем ответ: если $a < -1$, то $x = 1$; если $a = -1$, то $x \in [-3; 1]$; если $-1 < a < 1$, то $x = 1$, $x = (a+7)/(a-1)$; если $a = 1$, то $x \in [1; +\infty)$; если $a > 1$, то $x = 1$. ►

❶ **Ответ:** Если $a < -1$, то $x = 1$; если $a = -1$, то $x \in [-3; 1]$; если $-1 < a < 1$, то $x = 1$, $x = (a+7)/(a-1)$; если $a = 1$, то $x \in [1; +\infty)$; если $a > 1$, то $x = 1$.

«Решить при всех a » — задачи с таким условием это, в общем, честная рутина (как правило). Если же говорить о том случае, когда задача с параметром становится *интересной*, то это обычно связано с более или менее аномальной ситуацией, с такой особенностью уравнения (неравенства, системы), которая исчезает (или не видна) при замене параметра произвольным числом.

41. Найти все a , при которых неравенство $|x^2 - 2x + a| > 5$ не имеет решений на отрезке $[-1; 2]$.

◀ Сделав замены $x - 1 = t$, $a - 1 = b$, приводим неравенство к виду $|t^2 + b| > 5$. При этом рассматривается отрезок $t \in [-2; 1]$. Графиком функции $y = |t^2 + b|$ являются либо обычные параболы — при $b \geq 0$, либо параболы с отраженной вверх нижней частью. Из рис. 17 ясно, что нас устроит любая «парабола» (того или иного вида), расположенная между параболы I и II, где первая имеет уравнение $y = t^2 + 1$, а уравнение второй $y = t^2 - 5$.

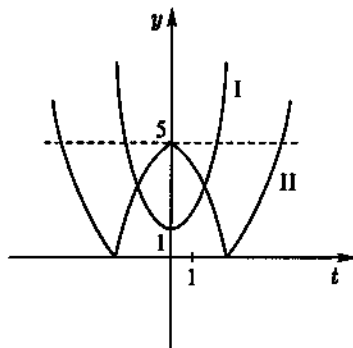


Рис. 17

Соответственно,

$$-5 \leq b \leq 1 \quad \text{или} \quad -5 \leq a - 1 \leq 1,$$

откуда получаем ответ: $-4 \leq a \leq 2$. ►

☞ **Ответ:** $-4 \leq a \leq 2$.

42. Найти все a , при которых число решений системы

$$\begin{cases} |x - y| + |x + y| = 4, \\ |x - 1| + |y| = a, \end{cases}$$

максимально.

◀ График первого уравнения — квадрат со стороной 4 и центром в начале координат; стороны квадрата параллельны осям (рис. 18). График второго уравнения — система квадратов с центром в точке $(1; 0)$, повернутых относительно первого на 45° .

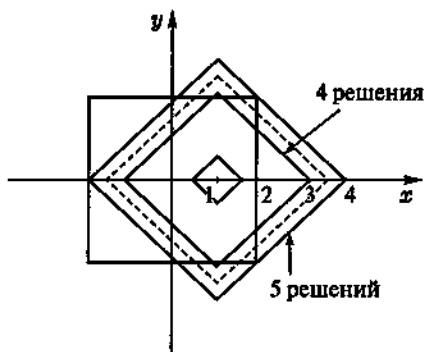


Рис. 18

Нарисовав сперва достаточно маленький квадрат второго семейства (например $|x - 1| + |y| = 1/2$), целиком лежащий внутри первого квадрата, начинаем постепенно «раздувать» его и следить за точками пересечения. Уравнения

$$|x - 1| + |y| = 2 \quad \text{и} \quad |x - 1| + |y| = 3$$

соответствуют случаям 4 и 5 решений соответственно. Всё, что между ними, даст 6 решений. Больше не получится, поскольку с увеличением a подвижный квадрат пересекает (пока пересекает) только две стороны неподвижного, что не дает более 4 точек пересечений. ►

☞ **Ответ:** $2 < a < 3$.

43. Найти все a , для которых уравнение $|x - 2| + b|2x + 1| = a$ имеет хотя бы одно решение при любом b .

◀ При $b > 0$ графики функций $y = b|2x + 1|$ и $y = a - |x - 2|$ (послушно возникающие перед мысленным взором умудренного читателя — или рисуемые им) всегда будут иметь общую точку, если «усы» второго графика пройдут через точку $(-1/2; 0)$ или выше, а это имеет место при условии $a \geq 5/2$. Если же $b < 0$, то при $a > 5/2$ пересечения не будет. ▶

● **Ответ:** $a = 5/2$.

44. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1, \end{cases}$$

имеет решения.

◀ Попробуем и в этом случае обойтись без чертежа, переложив его вычерчивание на плечи читателя. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 1, \\ x^2 + (y - 1)^2 = a^2. \end{cases}$$

Решением неравенства служат четыре единичных круга с центрами в точках $(\pm 3; \pm 3)$, $(\pm 3; \mp 3)$, решением уравнения — окружность радиуса $|a|$ с центром в точке $(0; 1)$. Система будет иметь решения, пока окружность пересекается с данными кругами. Верхних кругов (расстояние до которых от нее меньше) окружность коснется при условии

$$(|a| + 1)^2 = 4 + 9,$$

т.е. при $|a| = \sqrt{13} - 1$. А перестанет с ними пересекаться при $|a| > \sqrt{13} + 1$ (радиус окружности возрастет на 2). Нижних кругов окружность первый раз коснется при условии

$$(|a| + 1)^2 = 16 + 9,$$

т.е. при $|a| = 4$, а перестанет их касаться при $|a| > 6$. Таким образом, пересечения будут при

$$\sqrt{13} - 1 \leq |a| \leq 6.$$

● **Ответ:** $a \in [-6; 1 - \sqrt{13}] \cup [\sqrt{13} - 1; 6]$.

45. Найти все a , при которых число целочисленных решений неравенства $x^2 - 3x + 3|x + a| + a \leq 0$ максимально.

◀ Прежде всего перепишем неравенство в виде $3|x + a| \leq 3x - x^2 - a$ и заменим равносильной системой

$$\begin{cases} 3(x + a) \leq 3x - x^2 - a, \\ 3(x + a) \geq -3x + x^2 + a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 4a \leq 0, \\ x^2 - 6x - 2a \leq 0. \end{cases}$$

Для решения представляются разные способы. Самый экономный — использование координатной плоскости xOa , в которой по оси ординат откладываются значения параметра a (рис. 19). Тогда последнюю систему лучше переписать так:

$$\begin{cases} a \leq -\frac{x^2}{4}, \\ a \geq \frac{x^2}{2} - 3x. \end{cases}$$

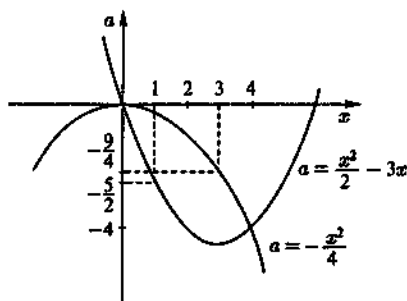


Рис. 19

Ее решением (геометрически) является область, заключенная между двумя параболой. Число целочисленных решений x равно количеству пересечений горизонтальной прямой вида $a = a_0$ с прямыми вида $x = n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Если выполнить чертеж с умеренной аккуратностью, станет ясно, что n может равняться только 0, 1, 2, 3, 4, причем больше трех целочисленных решений получить не может. А три решения получится, во-первых, в случае $a = -4$ (это будут $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$), во-вторых, если

прямая $a = a_0$ расположена между точками пересечения прямой $x = 3$ с параболой $a = -x^2/4$ и прямой $x = 1$ с параболой $a = x^2/2 - 3x$, т. е. при $-5/2 \leq a \leq -9/4$ (и решениями будут $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$).

Плодотворность такого подхода, омрачается, возможно, только тем, что для кого-то он остается слишком экзотическим. Тогда приходится действовать более традиционно. Например, так.

Систему

$$\begin{cases} x^2 + 4a \leq 0, \\ x^2 - 6x - 2a \leq 0. \end{cases}$$

можно попробовать «просто решить». Мы получим тогда при допустимых a (которые определяются условием $-9/2 \leq a \leq 0$) систему

$$\begin{cases} -2\sqrt{-a} \leq x \leq 2\sqrt{-a}, \\ 3 - \sqrt{2a+9} \leq x \leq 3 + \sqrt{2a+9}. \end{cases}$$

Целые решения первого неравенства должны удовлетворять условию $-4 \leq x \leq 4$, второго — $0 \leq x \leq 6$; значит, это только 0, 1, 2, 3, 4. Из четырех возможных способов взаимного расположения отрезков

$$[-2\sqrt{-a}; 2\sqrt{-a}] \quad \text{и} \quad [3 - \sqrt{2a+9}; 3 + \sqrt{2a+9}]$$

реализуется только такой, при котором решением системы будет

$$3 - \sqrt{2a+9} \leq x \leq 2\sqrt{-a}. \quad (*)$$

(Другие варианты приводят к недопустимым значениям параметра. Например, если $3 - \sqrt{2a+9} < -2\sqrt{-a}$, то $2\sqrt{-a} < \sqrt{2a+9} - 3 \leq 0$, т. е. $a = 0$, что не дает ответа на поставленный вопрос.)

Теперь просто подставим в неравенство (*) те целые значения x , которые могут быть решением. При $x = 0$ для a получаем условие $a \geq 0$, что не годится. При $x = 1$ имеем

$$3 - \sqrt{2a+9} \leq 1 \leq 2\sqrt{-a}.$$

Решив два простых неравенства, получим $-5/2 \leq a \leq -1/4$.

Действуя аналогично, получим еще три условия:

$$-4 \leq a \leq -1, \quad -\frac{5}{2} \leq a \leq -\frac{9}{4} \quad \text{и} \quad -\frac{9}{2} \leq a \leq -4.$$

Всё вместе возможно при $a = -4$ и при $-5/2 \leq a \leq -9/4$, как и при первом способе решения. ►

☛ **Ответ:** $a = -4$, $-5/2 \leq a \leq -9/4$.

46. Найти все a , при которых уравнение $|x^3| - x + a = 0$ имеет единственное решение.

◀ График функции $y = |x^3|$, весьма похожий на стандартную школьную параболу $y = x^2$, имеет единственную точку пересечения с прямой $y = x - a$, если эта прямая является касательной. Точка пересечения, очевидно, имеет положительную абсциссу, поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$(x^3)' = 3x^2 = 1,$$

откуда $x = 1/\sqrt{3}$ — абсцисса точки касания. Тогда $y = (1/\sqrt{3})^3 = 1/(3\sqrt{3})$ — ордината этой точки и $a = x - y = 2/3\sqrt{3}$ — искомое значение параметра. ►

☞ **Ответ:** $a = 2/3\sqrt{3}$.

Не надо, однако, думать, что задачи с модулем, содержащие параметр, *всегда* требуют привлечения графиков.

47. Найти все a , при которых уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

◄ Преобразуем уравнение так:

$$\left| \frac{(x - 2a)^2 + 1}{x - 2a} \right| + (x - 1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2a)^2 + 1}{|x - 2a|} = 2 - (x - 1)^2 \Leftrightarrow |x - 2a| + \frac{1}{|x - 2a|} = 2 - (x - 1)^2.$$

Левая часть как сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, поэтому и $2 - (x - 1)^2 \geq 2$, т. е. корнем уравнения может быть только $x = 1$. Значит, $|x - 2a| = 1$ и тогда $|1 - 2a| = 1$, что дает $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. ►

☞ **Ответ:** $a = 0$, $a = 1$.

48. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y + 3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2, \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

◄ Переписав систему так:

$$\begin{cases} \sqrt{5|x|} + \sqrt{|y + 3|} = 1, \\ 25x^2 + (y + 3)^2 = 16a, \end{cases}$$

видим, что замена $\sqrt{5|x|} = u$, $\sqrt{|y + 3|} = v$ приводит ее к виду

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^4 + v^4 = 16a. \end{cases}$$

Ясно, что по каждому ненулевому u и v находится по два значения x и y (что вместе составит 4 решения системы), и по одному, если одно вспомогательное неизвестное равно 0.

Если $u = 0$, то $v = 1$ и тогда $a = 1/16$. Это же значение получится, если наоборот: $u = 1$, $v = 0$. Значит, при $a = 1/16$ система имеет 4 решения: $(0; -2)$, $(0; -4)$, $(\pm 1/5; -3)$.

Если ни u , ни v не равны 0, то необходимо потребовать, чтобы было $u = v$. Действительно, если (u_0, v_0) — решение данной (симметричной) системы, то и $(v_0; u_0)$ также ее решение, и тогда число решений исходной системы будет равно 8.

Итак, $u = v = 1/2$ и тогда $a = 1/128$. В этом случае система также имеет 4 решения: $(\pm 1/20; -11/4)$, $(\pm 1/20; -13/4)$. ►

☛ **Ответ:** $a = 1/16$, $a = 1/128$.

В заключение — две задачи, которые, несмотря на формулировку, назвать «рутинными» довольно трудно. Как сказал поэт, «ведь всё равно ты не сумеешь стекло зубами укусить»... Что-то в этом роде, несомненно, испытывает нормальный школьник (да и не он один) перед такими задачами. И тем не менее, решать их надо...

49. При всех a решить уравнение

$$\left| x^4 + \frac{2a-1}{3}x^2 + \frac{2a^2+a+2}{12} \right| = \frac{a}{2} \left| x^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{6} \right| + \frac{a+1}{6}.$$

◀ Переписав уравнение в виде

$$\left| \left(x^2 + \frac{2a-1}{6} \right)^2 - \frac{(2a-1)^2}{36} + \frac{2a^2+a+2}{12} \right| = \frac{a}{2} \left| x^2 + \frac{2a-1}{6} \right| + \frac{a+1}{6},$$

сделаем замену

$$\left| x^2 + \frac{2a-1}{6} \right| = t.$$

Не станем торопиться с раскрытием модуля в полученном уравнении

$$\left| t^2 + \frac{2a^2+7a+5}{36} \right| = \frac{at}{2} + \frac{a+1}{6};$$

ведь способов, как мы знаем, два, а когда в уравнении параметр, они могут сильно отличаться друг от друга в смысле трудоемкости. Займемся исследованием допустимых значений a . Поскольку $t \geq 0$, при $a < -1$ правая часть

отрицательна и решений нет. Если же $a \geq -1$, то $2a^2 + 7a + 5 \geq 0$ и модуль можно просто снять. Мы приходим к уравнению

$$t^2 - \frac{at}{2} + \frac{2a^2 + a - 1}{36} = 0,$$

из которого находим

$$t_1 = \frac{a+1}{6}, \quad t_2 = \frac{2a-1}{6}.$$

Если $a \geq 1/2$, то оба корня неотрицательны и мы имеем четыре (или три, если $a = 1/2$) уравнения для нахождения x :

$$\text{а) } x^2 + \frac{2a-1}{6} = \frac{a+1}{6} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2-a}{6}}, \text{ если } 1/2 \leq a \leq 2;$$

$$\text{б) } x^2 + \frac{2a-1}{6} = -\frac{a+1}{6} \Rightarrow x^2 = -\frac{a}{2} < 0 - \text{решений нет};$$

$$\text{в) } x^2 + \frac{2a-1}{6} = \frac{2a-1}{6} \Rightarrow x = 0;$$

$$\text{г) } x^2 + \frac{2a-1}{6} = -\frac{2a-1}{6} \Rightarrow x^2 = -\frac{2a-1}{3} < 0 - \text{решений нет}.$$

Пусть теперь $-1 \leq a < 1/2$. Тогда имеем два уравнения:

$$\text{а) } x^2 + \frac{2a-1}{6} = \frac{a+1}{6} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2-a}{6}} - \text{корень и в этом случае};$$

$$\text{б) } x^2 + \frac{2a-1}{6} = -\frac{a+1}{6} \Rightarrow x^2 = -\frac{a}{2}, \quad x = \pm \sqrt{-\frac{a}{2}}, \text{ если } -1 \leq a \leq 0.$$

По результатам проведенного исследования выписываем ответ: если $a < -1$, то решений нет; если $-1 \leq a \leq 0$, то

$$x = \pm \sqrt{(2-a)/6}, \quad x = \pm \sqrt{-a/2};$$

если $0 < a < 1/2$, то

$$x = \pm \sqrt{(2-a)/6};$$

если $1/2 \leq a < 2$, то

$$x = \pm \sqrt{(2-a)/6}, \quad x = 0;$$

если $a \geq 2$, то $x = 0$. ►

☛ **Ответ:** если $a < -1$, то решений нет; если $-1 \leq a \leq 0$, то $x = \pm \sqrt{(2-a)/6}$, $x = \pm \sqrt{-a/2}$; если $0 < a < 1/2$, то $x = \pm \sqrt{(2-a)/6}$; если $1/2 \leq a < 2$, то $x = \pm \sqrt{(2-a)/6}$, $x = 0$; если $a \geq 2$, то $x = 0$.

50. Решить уравнение $a|x + \sqrt{1 - x^2}| + 2x^2 - 1 = 0$.

◀ Выражения $\sqrt{1 - x^2}$ и $2x^2 - 1$ имеют недвусмысленное тригонометрическое происхождение. И хотя уравнение вполне можно решить средствами одной лишь алгебры, будем считать эту задачу предтечей того, чем нам придется заниматься в следующей главе, к которой мы уже вплотную приблизились.

Итак, сделаем замену $x = \cos y$, где $y \in [0; \pi]$. Тогда уравнение принимает вид

$$a|\cos y + \sin y| + \cos 2y = 0 \quad \text{или} \quad a|\cos y + \sin y| = (\cos y + \sin y)(\sin y - \cos y).$$

Если $\cos y + \sin y = 0$, т. е. $y = 3\pi/4$, то уравнение обращается в тождество. Тогда $x = -\sqrt{2}/2$ — корень уравнения при любом a . Идем дальше.

Пусть теперь

$$\cos y + \sin y > 0. \quad (*)$$

Уравнение принимает вид

$$a = \sin y - \cos y \quad \text{или} \quad \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Если $|a| > \sqrt{2}$, то решений нет. Если $a = \pm\sqrt{2}$, то $\sin(y - \pi/4) = \pm 1$, откуда

$$y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

С учетом условия $y \in [0; \pi]$ это дает нам $y = 3\pi/4$, т. е. снова $x = -\sqrt{2}/2$.

Пусть теперь $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$; тогда уравнение имеет две серии решений

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi k.$$

Если $a \geq 0$, то из первой серии решением может быть только

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

а если $a < 0$, то это число будет корнем при выполнении условия

$$\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \geq 0,$$

откуда $a \geq -1$.

Итак, при $a \in [-1; \sqrt{2})$ мы получили $y = \pi/4 + \arcsin(a/\sqrt{2})$, тогда

$$x = \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 - a^2} - a}{2}.$$

Условие $\cos y + \sin y > 0$ в этом случае выполнено, поскольку

$$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 - a^2} + a}{2}.$$

Что касается второго корня $y_2 = 5\pi/4 - \arcsin(a/\sqrt{2})$, то он условию (*) не удовлетворяет.

Случай $\cos y + \sin y < 0$ рассматривается аналогично, и мы не будем утруждать терпеливого читателя. ►

☛ **Ответ:** $x = -\sqrt{2}/2$ при любом a ; $x = (-a - \sqrt{2 - a^2})/2$ при $a \in (-\sqrt{2}; -1)$; $x = (-a \pm \sqrt{2 - a^2})/2$ при $a \in [-1; 1]$; $x = (-a + \sqrt{2 - a^2})/2$ при $a \in (1; \sqrt{2})$.



**Привал очарованных
странников**

1. На первое предлагается решить следующие уравнения:

- а) $|3x^2 + 5x - 4| + 1 = 2x$;
- б) $|x - 1| + |x - 3| = 2x - 4$;
- в) $|10x - 6| - |10x - 5| = 1/2$;
- г) $|x - |x - 4|| - 2x = 4$;
- д) $|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| = 7$;
- е) $5 \cdot \sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|$;
- ж) $|x + \sqrt{1 - x^2}| = 2 - 4x^2$;
- з) $x^4 - 2x^2 + 2 = 1 - \sqrt{x^3 - |x|}$;
- и) $||x + 3| - |x - 1|| = 2 - x^2$;
- к) $|3 - |2 - |1 - x|| = 1$;
- л) $||x^4 - \sqrt{x^2 - 1}| - 11| = x^4 + \sqrt{x^2 - 1} - 15$;
- м) $|x^3 - 3x + 1| = x^3 + 3x^2 - 1$;
- н) $||x^3 - 3x^2 - 1| - 4| = x^3 + 3x^2 + 3$;
- о) $\sqrt{5x - 34} = |x - 3| - 4$.

2. На второе — решите следующие неравенства:

а) $|x^3 - 1| > 1 - x$;

б) $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$;

в) $|3x^2 - 7x - 6| < |x^2 + x|$;

г) $|x^2 - |x|| < 1/4$;

д) $|x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|$;

е) $|x^3 - x + 5| > |x^3 - 5| + x$;

ё) $\sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 1} \geq |x - 2|$;

ж) $|\sqrt{x^2 + 1} - x - \frac{1}{2x}| < \frac{1}{8x^3}$.

з) $\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{|3 - 4x|} \leq \sqrt{4x - 3}$.

и) $\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0$;

к) $\frac{(|3x + 5| - |5x + 3|)(x^2 - 1)}{\sqrt{4x + 5} + 2x + 1} \geq 0$;

л) $x^2 + |x - 1| + 2x < |x^2 - |x| - 2|$.

м) $||x^3 + x - 3| - 5| < x^3 - x + 8$;

н) $\sqrt{\frac{500 + 30x - 2x^2}{2x + 5}} > 10 - |x|$;

о) $\frac{1}{x-2} + \frac{5}{6 - 3\sqrt{4 + 3x - x^2}} > \frac{1}{1 + |x-2|}$;

п) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8} - 4} < \frac{1}{2|x-5| - 5}$.

3. И закусите смесью:

Решите уравнения:

а) $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$;

б) $2 \cdot \sqrt{1+x} \sqrt{1+(x+1)} \sqrt{1+(x+2)} \sqrt{1+(x+3)(x+5)} = x$;

в) $|x-6||x-3||x+1| = |x-4||x-2||x-1|$.

Решите неравенство:

$$\text{г) } \frac{(\sqrt{2x^2+1}-x^2-1)(|2x+3|-|3x+2|)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x+5}-x+1)(x^{99}-1)} \leq 0.$$

4. Решите при всех значениях параметра:

а) уравнение $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$; б) неравенство $|x+2a| \leq \frac{1}{x}$;

5. Найдите все значения a , при которых:

а) уравнение $3|x+2a|+x-3a=15$ имеет хотя бы один корень, причем все корни принадлежат отрезку $[4; 9]$.

б) неравенство $x^2+4x+6a|x+2|+9a^2 \leq 0$ имеет не более одного решения.

в) система

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

г) уравнение $|x^2-1|+|x^2-x-2|=x^2+3x+a$ имеет три различных решения.

д) уравнение $5|x-3a|+|x-a^2|+4x=a$ не имеет решений.

е) неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

ж) периметр фигуры, заданной системой

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ a|y| \leq |x|, \end{cases}$$

больше, чем $4+2\sqrt{2}+\pi/2$.

з) система

$$\begin{cases} 2|x|+3|y|+|3x+2y|=11, \\ x^2+y^2=a^2, \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

и) уравнение

$$|x| + \left| \frac{x+1}{3x+1} \right| = a$$

имеет ровно три решения.

6. Найдите наименьшее $a > 0$, при котором система

$$\begin{cases} 2|x|+|y|=2, \\ x^2+y^2=a^2, \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения. При этом a найдите площадь области, заданной неравенством

$$\frac{2|x| + |y| - 2}{x^2 + y^2 - a^2} \leq 0.$$

7. Найдите все пары (a, b) , при которых неравенство

$$|x^2 + ax + b| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

Кунсткамера

Решите уравнения:

$$1. 13x - 3x^2 - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{|4-x|}{\sqrt{x-1}} + |4-x| = 3x|4-x| - \frac{4}{\sqrt{x-1}} + 4.$$

$$2. |x^3 + 12x^2 - 11x + 6| + |x^3 - 7x^2 - x - 1| = 18x^2 - 14x + 3.$$

Решите неравенства:

$$3. \frac{|x^2 - 2x + 3/4| + |6 - 2x| - 5}{\sqrt{(13/2)x^2 - 2x^3 - 2x + 13/2}} \leq 0.$$

$$4. \frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}$$

Советы и решения

Р 1. г) Если $x \geq 4$, то имеем $4 = 2x + 4$ и решений нет. Если $-2 \leq x < 4$, имеем

$$|2x - 4| = 2x + 4,$$

откуда $x = 0$.

д) Пусть $x - 2\sqrt{x} + 2 = y > 0$; получаем уравнение $|y - 3| + y = 7$, имеющее единственный положительный корень $y = 5$. Тогда

$$x - 2\sqrt{x} + 2 = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 4.$$

ж) Несмотря на недвусмысленные намеки на тригонометрию — в виде выражений $\sqrt{1-x^2}$ и $2(1-2x^2)$ — можно обойтись и без нее (тем более что она и так ждет нас в следующих параграфах). Итак, надо решить совокупность уравнений

$$x + \sqrt{1-x^2} = \pm 2(2x^2 - 1)$$

при условии $|x| \leq 1/\sqrt{2}$. Домножая на сопряженное, получаем

$$2x^2 - 1 = \pm 2(2x^2 - 1)(x - \sqrt{1-x^2}).$$

Отсюда либо $2x^2 - 1 = 0$, либо

$$x - \sqrt{1-x^2} = \pm \frac{1}{2}.$$

Все эти уравнения вполне решаемы, надо только не забыть о проверке. В частности, надо будет убедиться, что один из корней уравнения

$$x - \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2},$$

а именно $(1 + \sqrt{7})/4$ не удовлетворяет условию $|x| \leq 1/\sqrt{2}$, поскольку

$$\frac{1 + \sqrt{7}}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{7} > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{7} > 8$$

(а это верно).

з) Имеем $(x^2 - 1)^2 = -\sqrt{x^3 - |x|} \Leftrightarrow x^2 - 1 = x^3 - |x| = 0$.

м) Совокупность

$$x^3 - 3x + 1 = \pm(x^3 + 3x^2 - 1)$$

решается легко: корни $(-3 \pm \sqrt{33})/6$, $(-3 \pm \sqrt{33})/4$ и $x = 0$. Главное здесь — проверка условия $x^3 + 3x^2 - 1 \geq 0$. $x = 0$ не подходит. Непосредственно подставлять, конечно, не хочется. Но надо. Удачи тебе, читатель!

Р 2. б) Если $x > 3$, неравенство равносильно неравенству $1/(x - 2) \geq 2$; если $x < 3$ — то неравенству $-1/(x - 2) \geq 2$.

г) В силу четности можно рассмотреть только случай $x > 0$, а потом добавить к ответу симметричный относительно 0.

ё) Просто возводим в квадрат, ибо $|x|^2 = x^2$.

ж) Решением, очевидно, могут быть только $x > 0$. Заменяя неравенство равносильной системой, приходим к двум неравенствам

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} < x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^3}, \\ \sqrt{x^2 + 1} > x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}. \end{cases}$$

Первое можно смело возвести в квадрат; это даст

$$0 < \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{64x^6} + \frac{1}{8x^4},$$

что верно. Второе неравенство решаем, рассматривая отдельно случаи

$$x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} \geq 0 \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} < 0.$$

Неравенство

$$x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} \geq 0$$

равносильно $8x^4 + 4x^2 - 1 \geq 0$, откуда

$$x \geq \sqrt{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}.$$

Возводя в квадрат второе неравенство системы, получим $x > \sqrt{2}/4$. Это условие сильнее, чем

$$x \geq \sqrt{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}.$$

Если

$$x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} < 0,$$

т. е.

$$0 < x \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}},$$

то неравенство выполняется.

$$з) \dots \Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{|3-4x|} < \sqrt{4x-3}.$$

ОДЗ: $x > 3/4$. Если $3/4 < x \leq 2$, то неравенство выполнено. Если $x > 2$, имеем

$$(x-2)^3 \leq (4x-3)^{3/2} \Leftrightarrow x-2 \leq \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow x^2-4x+4 \leq 4x-3$$

и т. д.

и) Найдя условие существования радикала $x \in [1; 6]$, можно смело написать $|x^3 - 6x + 5| < |x^2 - 2x - 3|$ и решить возведением в квадрат.

$$\begin{aligned} м) \dots \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + x - 3| < x^3 - x + 13, \\ |x^3 + x - 3| > -x^3 + x - 3, \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^3 + x - 3 < x^3 - x + 13, \\ x^3 + x - 3 > -x^3 + x - 13, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 + x - 3 > -x^3 + x - 3, \\ x^3 + x - 3 < x^3 - x + 3, \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 8, \\ x > -\sqrt[3]{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x < 3. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Р 3. б) Начинаем с конца; так как $x \geq 0$, то

$$\sqrt{1 + (x+3)(x+5)} = \sqrt{x^2 + 8x + 16} = \sqrt{(x+4)^2} = |x+4| = x+4,$$

аналогично

$$\sqrt{1 + (x+2)(x+4)} = \sqrt{x^2 + 6x + 9} = x+3,$$

далее

$$\sqrt{1 + (x+1)(x+3)} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} = x+2,$$

и наконец,

$$\sqrt{1 + x(x+2)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = x+1.$$

Тогда $2(x+1) = x \Rightarrow x = -2$, однако условие $x \geq 0$ не выполнено.

в) Поскольку $|a||b||c| = |abc|$, имеем уравнение

$$|(x-6)(x-3)(x+1)| = |(x-4)(x-2)(x-1)|$$

$$\text{или } x^3 - 8x^2 + 9x + 18 = \pm(x^3 - 7x^2 + 14x - 8).$$

г) Пользуемся тем, что, с точки зрения знака, множитель $x^{99} - 1$ ведет себя так же, как $x - 1$, и применяем метод интервалов.

Р 4. а) Ясно, что решения могут быть только при $a > 0$. Домножив на сопряженное, получим уравнение

$$\sqrt{|x|+1} + \sqrt{|x|} = 1/a,$$

что после вычитания из исходного даст

$$2\sqrt{|x|} = \frac{1-a^2}{a}.$$

Это уравнение при $0 < a \leq 1$ имеет корни $x = \pm((a^2 - 1)/2a)^2$.

б) Ясно, что $x > 0$. Если $a \geq 0$, то прямая $y = x + 2a$ и гипербола $y = 1/x$ пересекаются в точке, которую находим из равенства $x + 2a = 1/x$, т.е.

$$x = \sqrt{a^2 + 1} - a$$

и тогда решение неравенства $x \in (0; \sqrt{a^2 + 1} - a]$. Если теперь $a < 0$, то при $a \in (-1; 0)$ всё остается без изменения, но при $a = -1$ добавляется вторая точка пересечения, а при $a < -1$ еще и третья. Эти две новые точки находим из равенства $-x - 2a = 1/x$, т.е.

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Тогда решением неравенства будет объединение

$$x \in (0; -a - \sqrt{a^2 - 1}) \cup [\sqrt{a^2 - 1} - a; \sqrt{a^2 + 1} - a].$$

Р 5. а) Построив графики функций $y = 15 - x$ и $y = 3|x + 2a| - 3a$, видим, что они пересекаются, если нижняя точка «клина», т.е. $(-2a; -3a)$ лежит не выше прямой, т.е. выполнено неравенство $-3a \leq 15 + 2a$, откуда $a \geq -3$. При $a = -3$ графики пересекаются в одной точке, для которой $x = 6$. С увеличением a график модуля движется влево, причем $a = -2$ уже заведомо не годится, так как клин пересечет прямую как правее, так и левее прямой $x = 4$. Граничное значение параметра получим из уравнения $3|4 + 2a| - 3a = 15 - 4$, учитывая, что $a < -2$; тогда $-12 - 6a - 3a = 11$ и $a = -23/9$.

б) Пусть $|x + 2| = t \geq 0$; тогда $t^2 + 6at + 9a^2 - 4 \leq 0$, откуда $-2 - 3a \leq t \leq 2 - 3a$. Это неравенство выполнено только при одном значении t , если $2 - 3a = 0$. Но в условии сказано «не более одного», что может означать и «ни одного», поэтому нас устраивает и случай $2 - 3a < 0$. Таким образом, $a \geq 2/3$.

в) Первое уравнение решаем обычным порядком и находим: $x = -1$, $x \in [1; 4]$. Корни второго уравнения $x_1 = a - 2$, $x_2 = a$. Единственность решения системы возможна в четырех случаях:

1) $a = -1$;

2) $a - 2 = -1$, т.е. $a = 1$, однако это значение не годится, так как решениями будут не только $x = -1$, но и $x = 1$.

3) $\begin{cases} a - 2 \in [1; 4], \\ a \notin [1; 4]. \end{cases}$ Это дает $a \in (4; 6]$.

4) $\begin{cases} a \in [1; 4], \\ a - 2 < 1. \end{cases}$ В этом случае $a \in (1; 3)$.

г) Используем координатную плоскость xOa и построим график функции

$$a = |x^2 - 1| + |x^2 - x - 2| - x^2 - 3x,$$

раскрывая модуль на отдельных промежутках. Горизонтальная прямая пересечется с графиком в трех точках, если эта прямая пройдет через вершину параболы $a = -3x^2 - 2x + 3$ (являющейся графиком при $x \in [-1; 1]$) или через точку, где эта парабола соединяется

с параболой $a = x^2 - 4x - 3$ (являющейся графиком при $x \leq -1$ и $x \geq 2$). Таким образом, $a_1 = 2$, $a_2 = 10/3$.

д) Строим график функции $y = 5|x - 3a| + |x - a^2|$ и следим за его пересечениями с прямыми вида $y = a - 4x$. При этом рассматриваем отдельно случаи: 1) $3a < a^2$; 2) $3a > a^2$. График имеет вид характерного «клина», и уравнение не имеет решений, если $y(3a) > a - 4 \cdot 3a$. Что в первом случае ($a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$) дает неравенство $a^2 + 8a > 0$, откуда $a \in (-\infty; -8) \cup (3; +\infty)$, а во втором ($a \in (0; 3)$) — неравенство $a^2 - 14a < 0$, откуда $a \in (0; 3)$. Если $3a = a^2$, т.е. $a = 0$ или $a = 3$, то получаем уравнения

$$6|x| = -4x \quad \text{и} \quad 6|x - 9| = 3 - 4x$$

соответственно. Первое имеет решения, второе — нет.

ж) Если $a \leq 0$, то второе неравенство выполнено при всех (x, y) , а первое — в области под полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ (рис. 20).

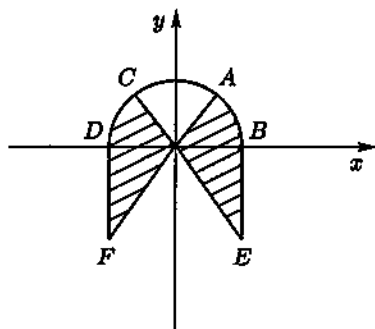


Рис. 20

Можно сказать, что в этом случае периметр области бесконечен, т.е. $a \leq 0$ удовлетворяет условию. При $a > 0$ решением системы является область, состоящая из двух треугольников: OEB и OFD , и двух секторов: OAB и OCD . Поскольку $OA = 1$, $BE = 1/a$, $OE = \sqrt{1 + 1/a^2} = \sqrt{a^2 + 1}/a$, длина дуги AB равна $\arctg(1/a)$, условие задачи приводит к неравенству

$$\frac{1}{a} + \arctg \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} > 1 + \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}.$$

При $a = 1$ левая и правая части совпадают, а при $a < 1$ левая часть увеличивается (и ввиду свойств функций, и потому что увеличивается периметр фигуры). Значит, $a < 1$.

з) Чтобы построить график первого уравнения, надо кропотливо раскрыть все модули, рассматривая случаи $x \geq 0$, $y \geq 0$; $x \leq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \geq 0$; $x \leq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 0$, и т.д. В результате получится шестиугольник с тремя парами взаимно параллельных противоположных сторон. Два решения система будет иметь в двух случаях: а) если окружность $x^2 + y^2 = a^2$ касается изнутри двух сторон, расположенных на прямых $x + y = \pm 11/5$; б) окружность проходит через вершины $A(-22/13; 33/13)$

и $C(22/13; -33/13)$. Расстояние от начала координат до прямых $x + y = \pm 11/5$ равно

$$r_1 = \frac{11}{5} \cos 45^\circ = \frac{11\sqrt{2}}{10}$$

— это величина радиуса окружности в первом случае. Расстояние от начала координат до точки A равно

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{22}{13}\right)^2 + \left(\frac{33}{13}\right)^2} = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

— это величина радиуса во втором случае.

и) Строим график функции

$$y = \left| \frac{x+1}{3x-1} \right|$$

(рис. 21), исходя из гиперболы

$$y = \frac{x+1}{3x-1} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3(3x-1)},$$

нижнюю часть которой отражаем вверх, и сечём его «клином» $y = a - |x|$.

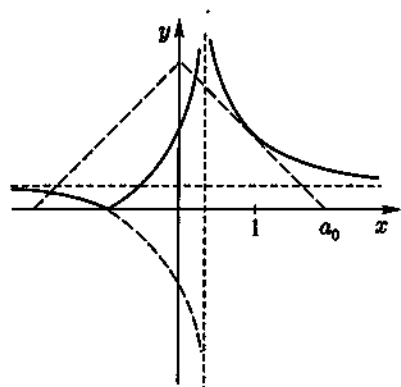


Рис. 21

Три точки пересечения графики будут иметь только при $a = a_0$, где a_0 отвечает касанию прямой $y = a - x$ и гиперболы

$$y = \frac{x+1}{3x-1}.$$

(При $a > a_0$ будет 4 пересечения, при $a < a_0$ либо два, либо меньше). Решая уравнение

$$a - x = \frac{x+1}{3x-1} \quad \text{или} \quad 3x^2 - 3ax + a + 1 = 0,$$

требуем равенства нулю дискриминанта, откуда $a_1 = -2/3$, $a_2 = 2$. Первое значение не подходит — графики вообще не пересекаются.

Р 6. Графиком первого уравнения является граница ромба с центром в начале координат и диагоналями 4 и 2, второго — окружность; 4 корня означают, что окружность вписана в ромб. Отсюда $a = r = 1 \cdot 2/\sqrt{5} = 2/\sqrt{5}$. Неравенство

$$\frac{2|x| + |y| - 2}{x^2 + y^2 - 4/5} \leq 0$$

задает две области: первая — внутри круга $x^2 + y^2 \leq 4/5$, но вне ромба (и это пустое множество), вторая — вне круга и внутри ромба: ее площадь равна разности площадей ромба и круга, т.е. $4 - 4\pi/5$.

Р 7. Если условие задачи выполнено, то $|x^2 + ax + b| \leq 2$ при $1 \leq x \leq 5$. Если трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ положителен при $1 \leq x \leq 5$, т.е. неравенство имеет вид

$$x^2 + ax + b \leq 2,$$

то должны выполняться условия: $f(1) \leq 2$, $f(5) \leq 2$, $D < 0$, $f(-a/2) < 2$. Первое и третье условия приводят к неравенству $1 - a > a^2/4$, откуда

$$-2 - 2\sqrt{2} < a < -2 + 2\sqrt{2};$$

второе и третье аналогично дают

$$-10 - 2\sqrt{2} < a < -10 + 2\sqrt{2},$$

что несовместимо с предыдущим. Итак, у трехчлена должны быть корни. Тогда график функции $y = |x^2 + ax + b|$ имеет характерный вид параболы с отраженной относительно оси Ox «подводной» частью (рис. 22).

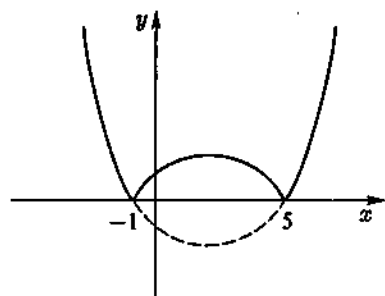


Рис. 22

И для выполнения условий задачи необходимо потребовать: если вершина параболы $x = -a/2$ принадлежит отрезку $[1; 5]$ (т.е. $a \in [-10; -2]$), то $|f(-a/2)| \leq 2$, $|f(1)| \leq 2$, $|f(5)| \leq 2$. Эти условия приводят к системе

$$\begin{cases} -2 + \frac{a^2}{4} \leq b \leq \frac{a^2}{4} + 2, \\ -3 - a \leq b \leq 1 - a, \\ -5a - 27 \leq b \leq -5a - 23. \end{cases}$$

Изобразив ее графически на плоскости (a, b) , видим (рис. 23), что есть только одна удовлетворяющая ей точка: $a = -6$, $b = 7$.

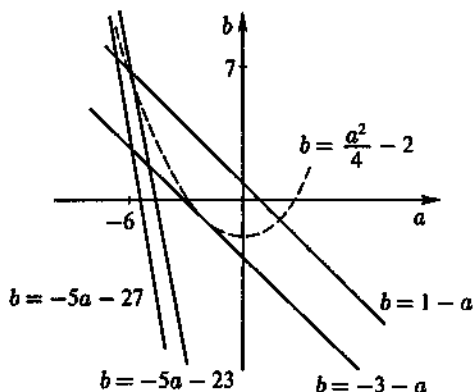


Рис. 23

Если вершина $x = -a/2$ не принадлежит отрезку $[1; 5]$, то первое условие можно снять, однако параллелограмм, являющийся решением неравенств $|f(1)| \leq 2$, $|f(5)| \leq 2$, расположен в области $a \in [-10; -2]$, поэтому этот случай невозможен.

Кунсткамера

Р 1. Если $x > 4$, то получаем уравнение $3x^2 - 13x + 4 = \frac{4-x}{\sqrt{x-1}}$ или $(x-4)(3x-1)\sqrt{x-1} = 4-x \Leftrightarrow (3x-1)\sqrt{x-1} = 1$. Но, т.к. $x > 4$, то $3x-1 > 11$, $\sqrt{x-1} > \sqrt{3} > 1$ и решений нет. Если же $1 < x \leq 4$, уравнение сводится к тождеству $12x = 12x$.

Р 2. Уравнение имеет вид

$$|a| + |b| = a - b - (x+2)^2 \quad \text{или} \quad |a| - a + |b| + b + (x+2)^2 = 0. \quad (*)$$

Поскольку по свойству модуля, $|a| - a \geq 0$, $|b| + b \geq 0$, равенство $(*)$ возможно, только если $|a| = a$, $|b| = -b$, $x = -2$.

Р 3. ОДЗ определяется неравенством $6,5x^2 - 2x^3 - 2x + 6,5 > 0$, из которого $x < 3,25$. Теперь решаем равносильное исходному неравенство $|x^2 - 2x + 3/4| + |2x - 6| - 5 \leq 0$, рассматривая три случая:

- 1) $x \leq 1/2$, $3/2 \leq x \leq 3$;
- 2) $1/2 < x < 3/2$;
- 3) $3 < x < 13/4$.

В первом случае получаем $x = 1/2$, $3/2 \leq x \leq 3$. Во втором $1/2 < x < 3/2$. В третьем $3 < x \leq \sqrt{41}/2$. (При этом устанавливаем, что $\sqrt{41}/2 < 13/4$.)

Р 4. Переносим всё в левую часть и приводя к общему знаменателю, приходим к неравенству

$$\frac{x^2 - 6x + 11 - |x^2 - 5x + 4|}{(|x - 3| - |x - 2|)|x - 4|} < 0.$$

Дальше — метод интервалов.

 Ответы

1. а) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-7+\sqrt{109}}{6}$; б) $x \geq 3$; в) $21/40$; г) 0; д) 9; е) $x \leq -1$, $x = 1/5$;
 ж) $-1/\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{7}-1}{4}$; з) 1; и) 0; $1-\sqrt{5}$; к) $-5, -3, 1, 5, 7$; л) $\pm\sqrt{5}$; м) $-\frac{3+\sqrt{33}}{6}$,
 $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$; н) $-\sqrt[3]{3}$; 0; о) $\frac{19+\sqrt{29}}{2}$; 2. а) $x < -1$, $x > 0$, $x \neq 1$; б) $3/2 \leq x < 2$;
 в) $\frac{3-\sqrt{33}}{4} < x < 2-\sqrt{7}$, $\frac{3+\sqrt{33}}{4} < x < 2+\sqrt{7}$; г) $-\frac{\sqrt{2}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$,
 $x \neq \pm 1/2$; д) $-5/3 \leq x \leq 5/3$; е) $-1 < x < 0$, $1 < x < 5$; ж) $x \geq \sqrt[3]{3}$;
 з) $0 < x < \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$, $x > \frac{1}{2\sqrt{2}}$; з) $3/4 < x \leq 7$; и) $1 \leq x \leq 2$, $2+\sqrt{3} < x \leq 6$;
 к) $-5/4 \leq x < -1$, $x = 1$; л) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}-1$; м) $-\sqrt[3]{5} < x < 8$; н) $x < -10$,
 $-5/2 < x < 0$, $5/2 < x \leq 25$; о) $-1 \leq x < 0$, $2 < x < 11/5$, $3 < x \leq 4$;
 п) $-4 < x \leq -2$, $\frac{17-\sqrt{22}}{3} < x < 6$, $15/2 < 7+\sqrt{6}$; 3. а) $2, 5 \leq x \leq 3$; б) $\emptyset$;
 в) 5; $\frac{-5 \pm \sqrt{129}}{2}$; $\frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$; г) $-5 \leq x \leq -1$, $x = 0$, $x > 1$, $x \neq 4$; 4. а) Если
 $0 < a \leq 1$, то $x = \pm(a^2 - 1)^2/4a^2$; иначе - $\emptyset$; б) Если $a < -1$, то
 $x \in (0; -a - \sqrt{a^2 - 1}) \cup [\sqrt{a^2 - 1} - a; \sqrt{a^2 + 1} - a]$; если $a \geq -1$, то
 $x \in (0; \sqrt{a^2 + 1} - a]$; 5. а) $-3 \leq a \leq -23/9$; б) $a \geq 2/3$; в) $a = -1$, $a \in (1; 3)$,
 $a \in (4; 6]$; г) 2; $10/3$; д) $a \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$; е) $a \in (-13/4; 3)$; ж) $a < 1$;
 з) $\pm 11\sqrt{2}/10$, $\pm 11/\sqrt{13}$; и) 2; 6. $a = 2/\sqrt{5}$, $S = 4 - 4\pi/5$; 7. $(-6; 7)$.

 Кунсткамера

1. $1 < x \leq 4$; 2. -2 ; 3. $1/2 \leq x \leq \sqrt{41}/2$; 4. $3 < x < 4$, $4 < x < 7$.

Глава 3

Тригонометрия, или Неравный брак

И алгебра не что иное, как фикция...

В. Погго. Девяносто третий год

Если принять мнение классика, то что же нам останется? Геометрия? Но ее мы с самого начала оставили вне «Гербария». Значит, нужно что-то среднее, находящееся на стыке, на переходе... Тригонометрия! И хотя никто не любит ее — из-за того, по-видимому, что «sin» — по-английски «грех» — нам незачем вникать в причины, когда можно заняться следствиями...

Не мысля забавить гордый свет, предлагая методы сверхбыстрого постижения, поговорим о тригонометрии издалека... С чего, так сказать, начинается эта наука? Тоже, наверное, с «воспоминаний детства»: синус, косинус... Стоит припомнить, что сообщил нам об этих вещах старик Погорелов (или кто?)...

Первоначально тригонометрические функции определяются как функции острых углов прямоугольных треугольников: синус угла — это отношение катета, противолежащего данному углу, к гипотенузе; косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе. Углы при этом измеряются в градусах. Градусная мера основана на том, что некий конкретный угол берется за единицу измерения: как мы знаем, это — угол, который получится, если «вырезать» из круглого пирога клин, равный $1/360$ части целого. В результате мы имеем угол в 1° , и тогда, чтобы измерить произвольный угол, остается выяснить, сколько раз укладывается в нем эталонный (и тут ситуация аналогична привычному измерению длин и соотношениям между числами целыми, дробными и иррациональными: ясно, что величина угла может оказаться равной целому, дробному или иррациональному числу градусов).

Градусная мера угла пришла к нам из древнего Вавилона, в котором использовалась шестидесятеричная система счисления — и поэтому угол, скажем, в $1/2$ часть градуса до сих пор принято называть углом в 30 минут и обозначать $30'$. (Хотя и обозначение $0,5^\circ$ тоже абсолютно законно.)

Теперь вернемся к синусам и косинусам.

Чтобы получить синус угла α , большего 90° (но меньшего 360°), надо начертить окружность единичного радиуса на координатной плоскости Oxy и отложить от оси Ox (одной стороны угла) против часовой стрелки угол α ; его вторая сторона пересечет окружность в точке с координатами $(\sin \alpha; \cos \alpha)$.

Таким образом, углы в тригонометрии не *строятся* — как в геометрии, а *откладываются* — на тригонометрическом круге радиуса 1 с центром в начале координат.

Поскольку каждому углу соответствует совершенно определенный синус (косинус), говорят, что *синус является функцией угла*.

Что касается углов, больших 360° , то важно понять, что таких углов в наглядно-геометрическом смысле не существует. Однако введенная функция, т. е. синус, проявляет способность существовать и независимо — для выражений вида $360^\circ \cdot n + \alpha$ (где n — целое число, α — угол, меньший 360°); достаточно просто положить $\sin(360^\circ n + \alpha) = \sin \alpha$. При этом под выражением $360^\circ \cdot n + \alpha$ понимается не столько угол, сколько некая отвлеченная сущность, которая геометрически может быть изображена в виде угла α . Эту сущность естественно представлять себе как *бесконечное множество углов*, отличающихся от α на величину $360^\circ \cdot n$, причем эти углы могут быть как положительными, так и отрицательными.

Тут и назревает необходимость в ином способе измерения углов (а точнее — обобщении самого понятия тригонометрической функции), который был бы лишен отмеченной неясности. Разумность радианной меры измерения углов объясняется тем, что если взять угол (обычный геометрический) и построить несколько концентрических окружностей разных радиусов с центром в его вершине, то отношения $l_1 : r_1$, $l_2 : r_2$, $l_3 : r_3$ длин дуг, отсекаемых углом на окружностях, к радиусам этих окружностей, будут всякий раз одинаковы. Поэтому *длину дуги* и считают мерой *величины угла*.

Длина такой дуги, которая равна радиусу окружности, принимается за единицу измерения — *радиан*.

Радиан — это просто *число*, действительное число, причем каждому углу величиной в определенное число градусов *соответствует* (а не равно ему!) свое число (радиан). Так, углу в 360° соответствует число 2π , а произвольному углу α (градусов) — число $2\pi\alpha/360$. Если же мы рассматриваем выражения $\sin \alpha$, в которых α принимает значения, большие 2π , то лучше говорить о синусе *числа α* (а не угла).

Конечно, обороты речи вроде «синус угла в 450 градусов» или «синус угла в 10 радиан» и т. п. употребляются в процессе изучения тригонометрии на каждом шагу, но при этом имеется в виду определенная условность, и ее желательно знать хотя бы тому абитуриенту, которому предстоит сдавать устный экзамен.

Кажется, мы частично выявили причину того, «почему никто не любит тригонометрии». Итак, на вопрос: «что такое $\sin \alpha$?» можно отвечать следующим образом: « $\sin \alpha$ — это ордината конца радиус-вектора длины 1 , образующего с положительным направлением оси Ox угол α ».

Тригонометрический круг — важнейший сакральный объект этой науки, поскольку здесь рассматриваются не просто углы, а углы, расположенные определенным образом: их вершины находятся в начале координат, одна из сторон жестко совмещена с положительной полуосью оси Ox , а другая имеет возможность свободно вращаться вокруг точки $(0; 0)$. Для углов, меньших 360° , в школьной геометрии имеется такое полезное уточнение как *плоский угол*: это *часть плоскости*, ограниченная углом. И если поворот от оси Ox к второй стороне угла происходит против часовой стрелки, то угол считается положительным, если по часовой стрелке, то — отрицательным.

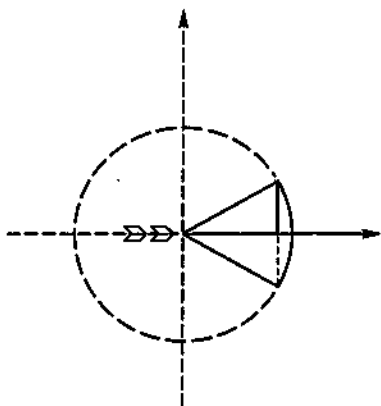


Рис. 24

Но можно обойтись и без угла. Можно сказать и так: «синус числа α — это ордината точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу α ». (А само соответствие между числами и точками единичного круга строится так: если $\alpha > 0$, то берется нить длины α и наматывается от точки $(1; 0)$ на окружность против часовой стрелки: конец нити дает нужную точку. Если же $\alpha < 0$, то берется нить длины $-\alpha$ и наматывается по часовой стрелке).

Таинственное слово «синус» появилось на свет в результате перевода с санскрита (древнеиндийского языка) словосочетания «половина тетивы лука». И дей-

ствительно (рис. 24), очень наглядный образ, возникший не без участия тригонометрического круга.

Возможно, это хотя бы отчасти примирит нас с самой нелюбимой темой школьной математики.

Достигнутого торжества игра и мука —
Натянутая тетива тугого лука...

* * *

Эти предварительные замечания не преследуют цели дать полное изложение определений. Они просто предваряют следующую, столь же предварительную часть главы, носящую название

§ 9. Проверь себя, или 60 разминочных вопросов

Без знания правильных ответов на эти вопросы дальнейшее чтение будет затруднительно (т. е. чтение не как механическое движение глазами по бумаге, а нечто, заслуживающее этого почтенного наименования).

1. В какой четверти лежит угол α , если: а) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$; б) $\cos \alpha < 0$, $\lg \alpha > 0$; в) $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$?

◀ а) в четвертой; б) в третьей; в) во второй или в третьей. ▶

2. Вычислите: а) $\sin 120^\circ \cos 210^\circ \lg 300^\circ$; б) $\sin(-225^\circ) \cos(-240^\circ) \lg(-150^\circ)$.

$$\leftarrow \text{ а) } \sin 120^\circ = \sin (90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 210^\circ = \cos (180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

Тогда

$$\sin 120^\circ \cos 210^\circ \operatorname{tg} 300^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \rightarrow$$

$$\text{ б) } \sin (-225^\circ) = -\sin (180^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos (-240^\circ) = \cos 240^\circ = \cos (180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} (-150^\circ) = -\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} (90^\circ + 60^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Тогда

$$\sin (-225^\circ) \cos (-240^\circ) \operatorname{tg} (-150^\circ) = -\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

3. Вычислите:

$$\text{ а) } \sin \frac{5\pi}{3}; \quad \text{ б) } \cos (-3\pi); \quad \text{ в) } \operatorname{tg} \left(-7\frac{1}{6}\pi\right); \quad \text{ г) } \operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}.$$

$\leftarrow$ Воспользуемся тем, что период синуса и косинуса равен 2π , а период тангенса и котангенса равен π .

$$\text{ а) } \sin \frac{5\pi}{3} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{ б) } \cos (-3\pi) = \cos 3\pi = \cos \pi = -1;$$

$$\text{ в) } \operatorname{tg} \left(-7\frac{1}{6}\pi\right) = -\operatorname{tg} \left(7\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{ г) } \operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4} = \operatorname{ctg} \left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1. \quad \rightarrow$$

4. Известно, что $\cos \alpha = 1/2$; верно ли, что $\alpha = \pi/3$?

$\leftarrow$ Нет, поскольку соотношению $\cos \alpha = 1/2$ кроме угла $\alpha = \pi/3$ удовлетворяют все углы вида $\pm\pi/3 + 2\pi n$. $\rightarrow$

5. Пусть $\sin \alpha = 1/3$; чему равен $\cos \alpha$, если $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$?

◀ Если $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$, то $\cos \alpha < 0$. Значит, в формуле

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

перед знаком радикала нужно выбрать знак «-», т. е.

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



6. Пусть $\cos \alpha = -1/4$; чему равен $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$?

◀ В указанном диапазоне углов котангенс положителен, поэтому, учитывая, что $\cos \alpha < 0$, имеем

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{15/16} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Тогда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$



7. Пусть $\operatorname{tg} \alpha = 2$; чему равен $\sin \alpha$?

◀ В этом случае ответ неоднозначен, поскольку из формулы

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

следует

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{5}$$

и значит,

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



8. Упростите выражение

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta,$$

если $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1/3$.

$$\begin{aligned} \leftarrow \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) = \\ &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1 = -\frac{2}{3}. \end{aligned} \rightarrow$$

9. Найдите $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$, если $3 \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta)$.

$$\begin{aligned} \leftarrow 3(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad \text{тогда} \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= 4 \sin \alpha \sin \beta \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}. \end{aligned} \rightarrow$$

10. Укажите три угла, синусы которых равны: а) 1; б) $1/2$.

$\leftarrow$ а) Например, 90° , 450° , -270° . б) Например, 30° , 150° , -210° . $\rightarrow$

11. Какой знак имеет сумма $\sin A + \sin B + \sin C$, если A , B и C — углы треугольника?

$\leftarrow$ Поскольку углы треугольника заключены в диапазоне $(0; \pi)$, синус каждого из них строго положителен, а, значит, и рассматриваемая сумма всегда положительна. $\rightarrow$

12. Упростите:

а) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \sin(\alpha + \pi);$

б) $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin(\alpha - 7\pi) \cos(3\pi - 2\alpha);$

в) $\frac{3 \cos 197^\circ + 5 \cos 163^\circ}{2 \cos 17^\circ}.$

$\leftarrow$ Вспомяная формулы приведения и отбрасывая или добавляя, где можно, период (или несколько), имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \sin(\alpha + \pi) &= \\ &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{tg}(\alpha) - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \sin(\pi + \alpha) = \\ &= \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \alpha - (-\sin \alpha)(-\sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\alpha - 7\pi) \cos(3\pi - 2\alpha) &= \\
 &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\alpha + \pi) \cos(\pi - 2\alpha) = \\
 &= -\cos\alpha(-\sin\alpha)(-\cos 2\alpha) = -\cos\alpha \sin\alpha \cos 2\alpha = \\
 &= -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \sin 4\alpha.
 \end{aligned}$$

В конце мы дважды использовали формулу синуса двойного угла.

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \frac{3 \cos 197^\circ + 5 \cos 163^\circ}{2 \cos 17^\circ} &= \frac{3 \cos(180^\circ + 17^\circ) + 5 \cos(180^\circ - 17^\circ)}{2 \cos 17^\circ} = \\
 &= \frac{-3 \cos 17^\circ - 5 \cos 17^\circ}{2 \cos 17^\circ} = -4. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

13. Вычислите:

$$\text{а) } \sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ; \quad \text{б) } \sin 73^\circ \sin 77^\circ + \cos 107^\circ \sin 13^\circ.$$

◀ а) Формула синуса разности в чистом виде:

$$\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ = \sin(73^\circ - 13^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Формула косинуса суммы с предварительным применением формул приведения:

$$\begin{aligned}
 \sin 73^\circ \sin 77^\circ + \cos 107^\circ \sin 13^\circ &= \\
 &= \sin 73^\circ \sin 77^\circ + (-\cos 73^\circ) \cos 77^\circ = -\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

14. Упростите:

$$\text{а) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{2(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

◀ а) Пример этот — своего рода рекордсмен: ничего более простого в тригонометрии не существует. Тем не менее:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

$$\text{б) } \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{2(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1/\cos^2 \alpha} \cdot \frac{(1/\sin^2 \alpha)}{1/\operatorname{tg} \alpha} = 4 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 4. \quad \blacktriangleright$$

15. Пусть $\operatorname{tg} \alpha = 2$; вычислите

$$\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

◀ По условию, $\sin \alpha / \cos \alpha = 2$, т. е. $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Поэтому

$$\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \cos \alpha + \cos \alpha} = -\frac{1}{5}.$$

▶

16. Упростите

$$\frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ}.$$

◀ Поскольку $\operatorname{ctg} 50^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ$, формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

дает нам

$$\frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ} = \operatorname{tg}(20^\circ + 40^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

▶

17. Найдите $\cos(\alpha - \beta)$, если

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \quad \sin \beta = -\frac{2}{3}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \quad \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right).$$

◀ Для применения формулы косинуса разности нам недостает косинусов обоих углов; учитывая области изменения α и β , имеем

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Тогда

$$\cos(\alpha - \beta) = -\frac{2\sqrt{10}}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{2}{9}(1 + \sqrt{10}).$$

▶

18. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

◀

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{5}.$$

▶

19. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \pi/3)$, если $\sin \alpha = 1/3$, $\alpha \in (\pi; 3\pi/2)$.

◀ $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -2\sqrt{2}/3$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = -1/2\sqrt{2}$, поэтому

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1/2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}/2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

▶

20. Верно ли равенство:

а) $\cos 47^\circ + \cos 73^\circ = \cos 13^\circ$; б) $\sin 87^\circ - \sin 27^\circ = \cos 57^\circ$?

◀ а) $\cos 47^\circ + \cos 73^\circ = 2 \cos \frac{47^\circ + 73^\circ}{2} \cos \frac{47^\circ - 73^\circ}{2} =$

$$= 2 \cos 60^\circ \cos 13^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 13^\circ = \cos 13^\circ.$$

б) $\sin 87^\circ - \sin 27^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 57^\circ = \cos 57^\circ.$

Оба равенства верны. ▶

21. Упростите $\sin 13^\circ \cos 21^\circ - \sin 74^\circ \sin 8^\circ$.

◀ $\sin 13^\circ \cos 21^\circ - \sin 74^\circ \sin 8^\circ = \frac{1}{2}(\sin 34^\circ - \sin 8^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 66^\circ - \cos 82^\circ) =$

$$= \frac{1}{2}(\sin 34^\circ - \sin 24^\circ) = \sin 5^\circ \cos 29^\circ,$$

поскольку $\sin 8^\circ = \cos 82^\circ$, а $\cos 66^\circ = \sin 24^\circ$. ▶

22. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha \cos \beta = -1/2$, $\alpha - \beta = -\pi/3$.

◀ Здесь используется формула

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

из которой следует, что

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

▶

23. Упростите $\cos^2 80^\circ + \cos^2 40^\circ + (1/2) \sin 50^\circ$.

◀ Пришел черед формулы понижения степени

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos^2 80^\circ + \cos^2 40^\circ + \frac{1}{2} \sin 50^\circ &= \frac{1 + \cos 160^\circ + 1 + \cos 80^\circ + \sin(90^\circ - 40^\circ)}{2} = \\ &= \frac{2 + 2 \cos 120^\circ \cos 40^\circ + \cos 40^\circ}{2} = \frac{2 - \cos 40^\circ + \cos 40^\circ}{2} = 1. \end{aligned}$$

24. Возможно ли равенство:

$$\text{а) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}; \quad \text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \text{в) } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}?$$

◀ Синус и косинус могут принимать любые значения в диапазоне $[-1; 1]$, поэтому в первых двух случаях ответ положительный, в третьем — отрицательный. ▶

25. Определите знак числа: а) $\sin 1$; б) $\cos 2$; в) $\sin 5$; г) $\lg(-2)$.

◀ Поскольку градусная мера угла в 1 радиан — примерно 57° , в первом случае угол расположен в первой четверти, во втором — во второй, в третьем — в четвертой, в четвертом — в третьей. Следовательно,

$$\sin 1 > 0, \quad \cos 2 < 0, \quad \sin 5 < 0, \quad \lg(-2) > 0.$$

26. Сравните числа: а) $\sin 35^\circ$ и $\sin 36^\circ$; б) $\cos 25^\circ$ и $\cos 26^\circ$; в) $\lg 17^\circ$ и $\lg 18^\circ$; г) $\sin 44^\circ$ и $\sin 144^\circ$; д) $\cos 195^\circ$ и $\cos 215^\circ$; е) $\sin(-220^\circ)$ и $\sin 156^\circ$; ж) $\sin 5^\circ$ и $\cos 5^\circ$.

◀ а) б) На интервале $(0; 90^\circ)$ большему углу соответствует больший синус, поэтому $\sin 35^\circ < \sin 36^\circ$; с косинусом же всё наоборот, поэтому

$$\cos 25^\circ > \cos 26^\circ.$$

в) Тангенс также возрастает в рассматриваемых пределах, поэтому

$$\lg 17^\circ < \lg 18^\circ.$$

г) Достигнув значения $\sin 90^\circ = 1$, синус начинает убывать, и поскольку угол в 144° дальше от 90° , чем угол в 44° , $\sin 44^\circ > \sin 144^\circ$.

д) На отрезке $[180^\circ; 270^\circ]$ косинус возрастает от -1 до 0 , поэтому первое значение меньше.

е) Поскольку

$$\sin(-220^\circ) = -\sin 220^\circ = -\sin(180^\circ + 40^\circ) = \sin 40^\circ,$$

а $\sin 156^\circ = \sin(180^\circ - 24^\circ) = \sin 24^\circ$, первое число больше.

ж) $\cos 5^\circ = \sin 85^\circ$, поэтому $\sin 5^\circ < \cos 5^\circ$. ►

27. Найдите $\sin \alpha/2$, если $\cos \alpha = -12/13$, $\alpha \in (\pi; 3\pi/2)$.

◀ Поскольку,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

и в данном случае

$$\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right),$$

имеем

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}. \quad \blacktriangleright$$

28. Вычислите:

а) $\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$; б) $\sin 15^\circ \sin 45^\circ$; в) $\sin 15^\circ - \cos 15^\circ$.

◀ а) $\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} = 0$;

б) $\sin 15^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$;

в) $\sin 15^\circ - \cos 15^\circ = \sin 15^\circ - \sin 75^\circ = -2 \sin 30^\circ \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacktriangleright$

29. Докажите тождество:

а) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$; б) $\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha$.

◀ а) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) =$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$;

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha &= (\cos \alpha + \cos 3\alpha) + 2 \cos 2\alpha = \\
 &= 2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha = 2 \cos 2\alpha (1 + \cos \alpha) = 2 \cos 2\alpha \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

30. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2/3}$.

◀ Используем легко проверяемое непосредственно равенство

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha.$$

Оно дает нам: $\sin 2\alpha = 2/3 - 1 = -1/3$. $\blacktriangleright$

31. Найдите: а) $\sin (\arcsin 1/3)$; б) $\arcsin (\sin 35^\circ)$; в) $\arcsin (\sin 125^\circ)$.

◀ а) Здесь задание само дает ответ: «Что такое $\arcsin (1/3)$? Это угол (первой четверти), синус которого равен одной трети. Значит синус этого угла, т. е. $\sin (\arcsin (1/3))$, равен $1/3$ ».

б) И здесь то же самое: $\arcsin (\sin 35^\circ)$ — это угол в пределах $[-90^\circ; 90^\circ]$, синус которого равен $\sin 35^\circ$. Конечно, это сам угол 35° .

в) А вот здесь ответ 125° был бы явно неверен, поскольку $125^\circ \notin [-90^\circ; 90^\circ]$. Но зато угол $180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$, синус которого такой же, принадлежит указанному интервалу. Значит, $\arcsin (\sin 125^\circ) = 55^\circ$. $\blacktriangleright$

32. Вычислите:

$$\text{а) } \arcsin \frac{1}{2} + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \text{б) } \arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } \arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{4}{5}; \quad \text{г) } \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

◀ а) Вызывая на сетчатке фрагмент таблицы значений тригонометрических функций, пишем:

$$\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{б) } \arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2};$$

это частный случай формулы $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$;

$$\text{в) } \arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{4}{5} = 0;$$

это частный случай формулы $\arcsin |x| = \arccos \sqrt{1-x^2}$;

$$\text{г) } \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} = 0, \text{ поскольку при } x > 0 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} 1/x. \quad \blacktriangleright$$

33. Вычислите:

$$\text{а) } \cos \left(\arcsin \frac{1}{5} \right) - \sin \left(\arccos \frac{1}{5} \right); \quad \text{б) } \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \left(-\frac{1}{3} \right);$$

$$\text{в) } \arccos \frac{1}{3} + \arccos \left(-\frac{1}{3} \right).$$

◀ а) Выражение равно 0, так как $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$;

б) Выражение равно 0, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

$$\text{в) } \arccos \frac{1}{3} + \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) = \arccos \frac{1}{3} + \pi - \arccos \frac{1}{3} = \pi. \quad \blacktriangleright$$

34. Сравните: а) $\sin \alpha + \cos \alpha$ и 1,5; б) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ и 1,9, если $\alpha \in (0; \pi/2)$.

◀ а) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \pi/4) \leq \sqrt{2} < 1,5$;

б) $|a + 1/a| \geq 2$, поэтому $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2 > 1,9$. $\blacktriangleright$

35. Равносильны ли уравнения:

$$\text{а) } \sin x = \cos x \text{ и } \sin^2 x = \cos^2 x; \quad \text{б) } \sin x = 1 \text{ и } \sqrt{\sin^2 x} = 1;$$

$$\text{в) } \sin x = 1 \text{ и } \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2?$$

◀ а) Первое уравнение имеет решение $x = \pi/4 + \pi n$, второе — $x = \pm \pi/4 + \pi n$. Эти серии не совпадают, поэтому уравнения не равносильны.

б) Решение первого уравнения $x = \pi/2 + 2\pi n$, второго — $x = \pi/2 + \pi n$. Уравнения не равносильны.

в) Решение первого $x = \pi/2 + 2\pi n$, второе решений не имеет. Уравнения не равносильны.

Неравносильность уравнений а)–в) видна и без решения их, но, поскольку равносильными называются уравнения, множества решений которых совпадают, доказывать равносильность или неравносильность правильнее непосредственным сравнением этих множеств. $\blacktriangleright$

36. При каких a уравнение $\sin x + \cos x = a$ имеет решения?

◀ Поскольку $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$, уравнение разрешимо при $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. ▶

* * *

Наверное, вам не слишком весело было возиться с этими очевидными задачами: ведь и ежу, как говорится, ясно, что от подобных примеров до вершин абитуриентской математики, дистанция изрядная, чтобы не сказать больше. Но...

Тихо, тихо ползи улитка по склону Фудзи,
Вверх до самых высот.

Если на выполнение этого задания вы потратили не более... и сделали менее... ошибок, можете смело переходить к чтению основной части главы. (Это утверждение не следует понимать слишком серьезно: оно маскируется под широковещательные и многообещающие вердикты, которыми славятся составители тестов — да и самих экзаменационных вариантов. Что бы ни случилось, читайте дальше и будьте счастливы!)

Первый этап занятий тригонометрией (при подготовке к экзаменам, имеется в виду) состоит в попытке выучить формулы, без которых в тригонометрии, действительно, делать нечего. Не хотелось бы просто выписывать формулы, которые считаются «основными» и рекомендовать: «запомните их»! Но сказать о формулах хоть что-то, попытаться как-то помочь — наш долг. И для еще более плавного «вхождения в тему» позволим себе несколько небольших вылазок в заповедную и неприкосновенную зону школьных учебников.

Прежде всего: кроме того, что формулы, конечно, *знать надо*, пропуском в тригонометрический рай служит всего *одна формула*, а именно формула сложения $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (или аналогичная формула для косинуса).

Положив в этой формуле $\alpha + \beta = 90^\circ$, мы, учитывая, что тогда $\cos \beta = \sin \alpha$ и $\cos \alpha = \sin \beta$, сразу получим основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (которое, по сути, является другой формулировкой теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, где a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза; тогда делением обеих частей равенства на c^2 мы получаем соотношение

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

равносильное $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, если обозначить через α угол этого треугольника, противолежащий катету a , поскольку тогда $\sin \alpha = a/c$, $\cos \alpha = b/c$).

Формулы сложения доказываются, как правило, с использованием векторов, что затушевывает их (формул) смысл. Если же ограничиться случаем острых углов α и β , то доказательство можно легко получить средствами геометрии треугольника.

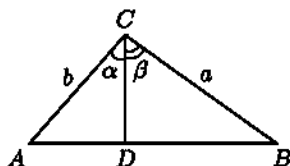


Рис. 25

Построим такой треугольник ABC , в котором высота CD образует со сторонами $AC = b$ и $BC = a$ углы α и β соответственно (рис. 25).

Тогда

$$AB = AD + DB = b \sin \alpha + a \sin \beta.$$

С другой стороны, согласно теореме синусов,

$$AB = 2R \sin(\alpha + \beta), \quad a = 2R \sin A = 2R \cos \alpha, \quad b = 2R \sin B = 2R \cos \beta,$$

т. е.

$$2R \sin(\alpha + \beta) = 2R \sin \alpha \cos \beta + 2R \cos \alpha \sin \beta,$$

что после сокращения на $2R$ дает нам требуемую формулу (здесь $2R$ — диаметр описанной окружности треугольника ABC).

Справедливости ради скажем, что векторное доказательство чрезвычайно просто — умей лишь владеть понятием скалярного произведения. Так, для вывода формулы $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ надо всего лишь рассмотреть два единичных вектора $\vec{a} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$ и $\vec{b} = (\cos \beta; \sin \beta)$; тогда их скалярное произведение, с одной стороны, равно $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, а с другой $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi = \cos \phi$, где $\phi = \alpha - \beta$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из формулы $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ сразу следует самая доступная формула школьной тригонометрии — «синус двойного угла»: она получается, если положить $\beta = \alpha$.

Однако и формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ можно доказать непосредственно при помощи треугольника. Возьмем равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами $AB = BC = a$ и углом 2α при вершине B . Высота $BD = a \cos \alpha$, основание $AC = 2a \sin \alpha$; поэтому площадь треугольника ABC равна $a^2 \sin \alpha \cos \alpha$. С другой стороны, площадь этого треугольника можно посчитать по формуле $(1/2)AB \cdot BC \sin B$, из которой следует другое выражение, а именно $(1/2)a^2 \sin 2\alpha$. Тогда $a^2 \sin \alpha \cos \alpha = (1/2)a^2 \sin 2\alpha$, откуда $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Соображения, подсказанные треугольником, могут оказаться полезными при решении некоторых задач тригонометрии (ведь не забудем, что самый смысл слова «тригонометрия» означает «измерение треугольника», и иногда стоит вспомнить о том смысле, который утрачен рабами ЕГЭ).

Мрак, окутывающий тригонометрические функции, до конца не рассеивается, поскольку не для всех даже целых углов нахождение их синуса-косинуса возможно без помощи вычислительных средств.

Всё же нелишне знать, что кроме углов вида $15^\circ \cdot n$, можно вычислить значения синуса-косинуса всех углов вида $3^\circ \cdot n$. Основой служат $\sin 15^\circ$, $\sin 18^\circ$ и формулы сложения.

Чтобы найти $\sin 15^\circ$ можно, конечно, представить эту величину в виде $\sin(45^\circ - 30^\circ)$, однако интереснее получить из треугольника. Для этого достаточно взять равнобедренный треугольник с основанием $2b$, боковыми сторонами a и углом при вершине 30° . Тогда $\sin 15^\circ = b/a$; с другой стороны, по теореме косинусов, $4b^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 30^\circ$, откуда

$$4b^2 = a^2(2 - \sqrt{3}) \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Поскольку

$$2 - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2},$$

выражение для нужной нам величины можно представить в виде

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Что касается $\sin 18^\circ$, то для его вычисления нужно рассмотреть равнобедренный треугольник с углом при вершине 36° . Пусть его основание снова равно $2b$, а боковая сторона равна a . Тогда $\sin 18^\circ = b/a$. Проведем биссектрису угла при основании и обозначим ее длину через x ; поскольку два полученных угла будут равны 36° , боковая сторона разделится на отрезки x и $a - x$. Теперь, согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника,

$$\frac{2b}{a} = \frac{a - x}{x} = \frac{a}{x} - 1 = 2 \cos 36^\circ - 1.$$

Поскольку $\cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$, обозначив $\sin 18^\circ = t$, получаем уравнение

$$2t = 2 - 4t^2 - 1 \quad \text{или} \quad 4t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Его единственный положительный корень

$$t = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

и дает значение $\sin 18^\circ$.

Оперируя углами в 15° и 18° в сочетании с формулами сложения, можно получать значения тригонометрических функций углов, кратных 3° . Например:

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ,$$

где

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};$$

после преобразований получается

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8} \left(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{9 - 3\sqrt{5}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{15 + 3\sqrt{5}} \right).$$

Следующий шаг: $\sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 30^\circ)$, причем $\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ$, $\cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$. Потом $\sin 9^\circ = \sin(45^\circ - 36^\circ)$, и т. д.

Пусть эти напутствия о треугольниках служат своеобразной прелюдией к дальнейшему постижению тригонометрии.

§ 10. Тригонометрические преобразования

Любовь — это крепкая вера, священное писание, незблемый и нетленный гранит, уровень и отвес, в гимназические годы осиянно воспринятая тригонометрия, в которой ошибки не бывает.

М. Осоргин. Что такое любовь

Тригонометрические преобразования и вычисления — пролог к популярнейшей теме поступательной математики — тригонометрическим уравнениям (и, естественно, неравенствам и системам, которые встречаются много реже).

Комбинирование тригонометрических формул позволяет вычислять значения различных комбинаций тригонометрических функций.

1. Проверить равенство:

а) $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$ и вывести из него равенства:

б) $\sin 54^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{4}$;

в) $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ = 8$;

г) $\frac{1}{\sin 9^\circ} + \frac{1}{\sin 81^\circ} + \frac{1}{\sin 27^\circ} - \frac{1}{\sin 63^\circ} = 6\sqrt{2}$.

◀ а) Несмотря на то что нам уже известно значение

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

и мы могли бы вычислить $\sin 54^\circ$, используя формулы сложения (как было объяснено в предыдущем параграфе), для проверки равенств а) и б) можно пойти совсем другим путем.

Преобразовывая разность в произведение, имеем:

$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ.$$

Теперь используем то, что углы, входящие в данное произведение, удваиваются, и применим формулу синуса двойного угла: для этого умножим и разделим полученное выражение на $\cos 18^\circ$. Тогда

$$\begin{aligned} 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ &= \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \\ &= \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos (90^\circ - 72^\circ)} = \frac{(1/2) \sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \sin 54^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{2}(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ) = \frac{1}{2}(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = \frac{1}{4}.$$

в) Заметим, что

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha};$$

поэтому левая часть доказываемого равенства может быть представлена в виде

$$\frac{2}{\sin 18^\circ} + \frac{2}{\sin 30^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 4 + 2 \left(\frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} \right) = 4 + \frac{2 \cdot (1/2)}{1/4} = 8.$$

Для вычисления выражения в скобках мы использовали результаты пп. а) и б).

г) Разобьем левую часть на две пары, которые преобразуем по отдельности:

$$\frac{1}{\sin 9^\circ} + \frac{1}{\sin 81^\circ} = \frac{\sin 81^\circ + \sin 9^\circ}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} = \frac{2 \sin 45^\circ \cos 36^\circ}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 54^\circ}{(1/2) \sin 18^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \sin 54^\circ}{\sin 18^\circ};$$

$$\frac{1}{\sin 27^\circ} - \frac{1}{\sin 63^\circ} = \frac{\sin 63^\circ - \sin 27^\circ}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \frac{2 \cos 45^\circ \sin 18^\circ}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 18^\circ}{(1/2) \sin 54^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ}.$$

Искомое выражение равно, таким образом,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} \frac{\sin^2 54^\circ + \sin^2 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} &= 8\sqrt{2}((\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)^2 + 2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ) = \\ &= 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$



При упрощении мы использовали прием выделения полного квадрата в форме $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$.

Заметим, что теперь мы можем расширить свои познания в тригонометрических функциях разных углов; поскольку $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 1/2$, а

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

имеем

$$\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

2. Вычислить:

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

◀ Пусть

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = X;$$

умножим обе части равенства на $\sin \pi/7$ и преобразуем полученные произведения в сумму. Имеем:

$$\begin{aligned} X \sin \frac{\pi}{7} &= \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) \sin \frac{\pi}{7} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X \sin \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{7} \quad \text{и} \quad X = -\frac{1}{2}.$$

☛ **Ответ:** $-1/2$.

3. Вычислить

$$\cos \frac{3\pi}{17} \cos \frac{6\pi}{17} \cos \frac{12\pi}{17} \cos \frac{24\pi}{17}.$$

◀ При нахождении произведений есть два пути: либо последовательное преобразование произведений в сумму (разность), либо домножение на подходящим образом подобранную функцию. Пойдем вторым путем, заметив, что входящие в условие углы удваиваются. Пусть $3\pi/17 = \alpha$; тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{(1/2) \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha}{\sin \alpha} = \dots = \frac{1}{16} \frac{\sin 16\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\sin 16\alpha = \sin \frac{48\pi}{17} = \sin \left(3\pi - \frac{3\pi}{17} \right) = \sin \frac{3\pi}{17} = \sin \alpha.$$

☛ **Ответ:** $1/16$.

4. Проверить равенство

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$$

◀ Обязательным пунктом изучения тригонометрии является формула вспомогательного угла

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha \mp \phi),$$

где ϕ — любой угол, удовлетворяющий условию $\operatorname{tg} \phi = b/a$. В данном примере без нее не обойтись.

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \cos(10^\circ + 60^\circ)}{(1/2) \sin 20^\circ} = \frac{4 \cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} = 4. \quad \blacktriangleright$$

5. Проверить равенство $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \sin 20^\circ = \sqrt{3}$.

◀ Мы понимаем, что $\sqrt{3}$ — так сказать, «тригонометрическое число»; мало того, $\sqrt{3} = \operatorname{ctg} 30^\circ$; поэтому доказываемое равенство можно переписать так:

$$\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ = 4 \sin 20^\circ.$$

И теперь

$$\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ \sin 70^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{(1/2) \cos 20^\circ} = 4 \sin 20^\circ,$$

что и требовалось. $\blacktriangleright$

6. Вычислить

$$\cos^4 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{5\pi}{16} + \cos^4 \frac{7\pi}{16}.$$

◀ Пусть $\pi/16 = \alpha$, $3\pi/16 = \beta$; тогда, поскольку

$$\frac{5\pi}{16} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16}, \quad \frac{7\pi}{16} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16},$$

искомая сумма имеет вид

$$X = \cos^4 \alpha + \cos^4 \beta + \sin^4 \beta + \sin^4 \alpha.$$

Но

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha, \end{aligned}$$

т. е.

$$X = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}(\cos 4\alpha + \cos 4\beta) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** 3/2.

7. Проверить равенство

$$2\left(3\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{5\pi}{8}\right) - 16\sin^3 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{5\pi}{16} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

◀ В этом примере нам понадобится формула понижения для третьей степени (синуса), которую мы получим из формулы синуса тройного угла. Поскольку $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$, имеем $4\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - \sin 3\alpha$. Тогда, понижая степень у синуса и косинуса, получаем

$$\begin{aligned} 16\sin^3 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{5\pi}{16} &= 2\left(3\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right) = \\ &= 6\sin \frac{\pi}{8} + 6\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} - 2\sin \frac{3\pi}{8} - 2\sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} = \\ &= 2\left(3\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8}\right) + 3\sin \frac{3\pi}{4} - 3 + \sin \frac{\pi}{4} = 2\left(3\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8}\right) + 2\sqrt{2} - 3. \end{aligned}$$

Поскольку $\sin(3\pi/8) = \sin(5\pi/8)$, отсюда сразу следует справедливость исходного равенства. ▶

Иные тождества с синусами, которые каким-то образом выдумывают экзаменаторы, могут довести до ненависти к предмету наших дум. Но — молчание...

8. Вычислить

$$\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{4\pi}{21} \sin \frac{10\pi}{21}.$$

◀ Перепишем это произведение более единообразно:

$$\sin \frac{3\pi}{42} \sin \frac{8\pi}{42} \sin \frac{20\pi}{42}.$$

Нет, сразу преобразовывать в сумму — разность не станем (не мешаем, впрочем, читателю отложить книжку в сторону и заняться этим самостоятельно). Времени у нас в обрез, а потому достанем из тумбочки палочку-выручалочку — формулу

$$\sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha. \quad (**)$$

Она легко доказывается (здесь не побрезгаем произведение разложить):

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) &= \frac{1}{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \left(2\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(2\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \sin (3\alpha + \pi) + \frac{1}{4} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha. \end{aligned}$$

Возвращаемся к нашему произведению и смотрим на него совсем другими глазами. Во-первых, перепишем его еще раз так:

$$\sin \frac{3\pi}{42} \sin \frac{8\pi}{42} \sin \frac{22\pi}{42}$$

(заменяя последний множитель по формуле приведения $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$). А теперь заметим, что $\pi/3 = 14\pi/42$, и поэтому

$$\sin \frac{3\pi}{42} \sin \frac{8\pi}{42} \sin \frac{22\pi}{42} = \sin \frac{3\pi}{42} \sin \frac{8\pi}{42} \sin \left(\frac{8\pi}{42} + \frac{14\pi}{42} \right).$$

Конечно, полного наложения на формулу (**) не произошло, однако не станем унывать; запишем ее для $\alpha = 8\pi/42$. Мы получим

$$\sin \frac{8\pi}{42} \sin \frac{22\pi}{42} \sin \frac{36\pi}{42} = \frac{1}{4} \sin \frac{24\pi}{42} = \frac{1}{4} \sin \frac{18\pi}{42}$$

(снова формула $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$ в конце).

Но, увидев двойной угол, сразу переписываем это равенство так:

$$\sin \frac{8\pi}{42} \sin \frac{22\pi}{42} \cdot 2 \sin \frac{18\pi}{42} \cos \frac{18\pi}{42} = \frac{1}{4} \sin \frac{18\pi}{42}$$

и, сокращая, приходим к равенству

$$\sin \frac{8\pi}{42} \sin \frac{22\pi}{42} \sin \frac{3\pi}{42} = \frac{1}{8},$$

поскольку

$$\cos \frac{18\pi}{42} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{42} \right) = \sin \frac{3\pi}{42}.$$

Таким образом, искомое произведение равно $1/8$. ►

☛ **Ответ:** $1/8$.

9. Доказать равенство

$$\operatorname{tg} 117^\circ + \operatorname{tg} 118^\circ + \operatorname{tg} 125^\circ = \operatorname{tg} 117^\circ \operatorname{tg} 118^\circ \operatorname{tg} 125^\circ.$$

◀ Некоторые равенства с тангенсами представляют собой не что иное, как замаскированные формулы.

Правила хорошего тона требуют уменьшить углы (посредством формул приведения); тогда доказываемое равенство примет вид:

$$\operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ + \operatorname{ctg} 35^\circ = \operatorname{ctg} 27^\circ \operatorname{ctg} 28^\circ \operatorname{ctg} 35^\circ,$$

что можно переписать в виде

$$\operatorname{ctg} 27^\circ (1 - \operatorname{ctg} 28^\circ \operatorname{ctg} 35^\circ) = -(\operatorname{ctg} 28^\circ + \operatorname{ctg} 35^\circ)$$

или

$$\operatorname{ctg} 27^\circ = \frac{\operatorname{ctg} 28^\circ + \operatorname{ctg} 35^\circ}{\operatorname{ctg} 28^\circ \operatorname{ctg} 35^\circ - 1} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 27^\circ = \frac{1}{\operatorname{ctg}(28^\circ + 35^\circ)} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 27^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 27^\circ},$$

что верно.

Как видим, доказываемое равенство — просто по-другому записанная формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

Несмотря на увлекательность темы, с которой не может спорить ученик, начинающий уже подпадать под неотразимое очарование тригонометрии, надо где-то и остановиться — нельзя же объять необъятное. Но где? Когда? Наверное, почувствовав себя свободно в окружении синусов, косинусов, тангенсов... Ну, давайте еще пару замысловатых примерчиков — и перейдем к следующему разделу — тригонометрическим преобразованиям и тождествам.

10. Вычислить $\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 66^\circ \operatorname{tg} 78^\circ$.

◀ В этой задаче нам понадобится довольно редкая формула тангенса тройного угла, которую не обязательно помнить, если можешь вывести ее в случае надобности.

Действительно:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Кроме того, мы используем формулу

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha,$$

которая легко проверяется:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha (\sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha)}{(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)} \cdot \frac{(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha)}{(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Теперь основная часть: Запишем предыдущее тождество для двух случаев: $\alpha = 6^\circ$ и $\alpha = 18^\circ$. Мы получим два равенства:

$$\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 54^\circ \operatorname{tg} 66^\circ = \operatorname{tg} 18^\circ \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 18^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 78^\circ = \operatorname{tg} 54^\circ,$$

перемножив которые, найдем

$$\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 66^\circ \operatorname{tg} 78^\circ = 1.$$



❖ **Ответ:** 1.

11. Вычислить

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}.$$

◀ **Произведение**

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$$

вычисляется так же, как это сделано в примере 3; и равно оно $-1/8$. Что касается величины

$$\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7},$$

то здесь нельзя воспользоваться ни удвоением углов, ни вычислить, преобразовывая произведение в сумму-разность — синусы не сокращаются. И даже палочка-выручалочка из примера 8 бездействует. Остается последний путь: попробовать вычислить не само произведение, а его *квадрат*.

Пусть

$$\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = x, \quad \frac{\pi}{7} = \alpha;$$

тогда

$$\begin{aligned} 8x^2 = & (1 - \cos 2\alpha)(1 - \cos 4\alpha)(1 - \cos 8\alpha) = 1 - (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha) + \\ & + (\cos 2\alpha \cos 4\alpha + \cos 4\alpha \cos 8\alpha + \cos 8\alpha \cos 2\alpha) - \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha. \end{aligned}$$

Мы уже знаем, что

$$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha = -\frac{1}{2} \quad (\text{пример 2});$$

ведь

$$\cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7}.$$

Таким же образом можно убедиться в том, что $\cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha = 1/8$.

Остается вычислить сумму попарных произведений; имеем

$$\begin{aligned} & \cos 2\alpha \cos 4\alpha + \cos 4\alpha \cos 8\alpha + \cos 8\alpha \cos 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha + \cos 12\alpha + \cos 4\alpha + \cos 10\alpha + \cos 6\alpha) = \\ &= \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha \end{aligned}$$

(поскольку при $\alpha = \pi/7$ верны равенства $\cos 2\alpha = \cos 12\alpha$, $\cos 4\alpha = \cos 10\alpha$). А эта сумма опять-таки равна $-1/2$.

Таким образом,

$$8x^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \quad \text{т.е.} \quad x^2 = \frac{7}{64} \quad \text{и} \quad x = \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7} = -\sqrt{7}.$$

❧ **Ответ:** $-\sqrt{7}$.

Понятно, что число подобных задач кажется бесконечным, но порешать какое-то их количество стоит, поскольку круг знаний об углах вроде $\pi/10$, $\pi/9$, $\pi/7$, $\pi/5$ и т. п., доступных абитуриенту, на самом деле сильно ограничен. И этих границ вполне можно достичь за конечное время.

Современная наука о человеке установила, что доказательство тождеств благотворно влияет на логическое мышление индивида. «Мало знать самому, надо еще уметь подать свое знание в таком виде, в котором оно будет очевидно и для других».

Чтобы не повторять пройденного, разберем сперва два примера, в которых помогает прием *решения с конца*.

12. Доказать, что $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

◀ Рассмотрим выражение $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} 2x$; оно равно

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x.$$

Таким образом,

$$2 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{ctg} 8\alpha = 4(\operatorname{tg} 4\alpha + 2 \operatorname{ctg} 8\alpha) = 4 \operatorname{ctg} 4\alpha.$$

Тогда

$$2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{ctg} 4\alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$$

и аналогично

$$\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha,$$

что и требовалось доказать. ▶

13. Доказать тождество

$$\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

◀ Преобразуем *правую* часть, последовательно применяя формулу понижения степени:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^4 \alpha &= \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2\alpha + (1 + \cos 4\alpha)/2}{1 + 2 \cos 2\alpha + (1 + \cos 4\alpha)/2} = \\ &= \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}, \end{aligned}$$

что и требовалось. ►

В старых задачниках особое место занимали примеры, в которых предлагалось привести выражения к виду, *удобному для логарифмирования*. Иными словами — преобразовать в такие произведения, в которых знаки суммы и разности встречаются только под знаками тригонометрических функций, а не между самими функциями. Несмотря на то, что тематика эта считается устаревшей, мы отдадим ей дань: ведь нет ничего под солнцем, что не устарело бы и не возрождалось бы когда-нибудь вновь. Тем более что преобразование суммы-разности в произведение — одно из самых популярных преобразований и при доказательстве тождеств, и при решении уравнений.

14. Преобразовать в произведение:

- а) $2 \sin \alpha + 1$; б) $1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha$; в) $\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8 \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha$.
 г) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2$.

◀ а) $2 \sin \alpha + 1 = 2(\sin \alpha + 1/2) = 2(\sin \alpha + \sin 30^\circ) = 4 \sin \frac{\alpha + 30^\circ}{2} \cos \frac{\alpha - 30^\circ}{2}.$

б) $1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha = (1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha) =$
 $= \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg} \alpha \right) \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{tg} \alpha \right) = 3(\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} \alpha) =$
 $= \frac{3 \sin(30^\circ - \alpha) \sin(30^\circ + \alpha)}{\cos^2 30^\circ \cos^2 \alpha} = 4 \sin(30^\circ - \alpha) \sin(30^\circ + \alpha) \cos^{-2} \alpha.$

в) $\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha = (\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha)(\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha) =$
 $= \frac{2 \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} \frac{2}{\sin 4\alpha} = \frac{4 \cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha};$

поэтому

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8 \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha &= \frac{4 \cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha} - \frac{8 \cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \\
 &= \frac{4 \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} \left(\frac{1}{\sin 4\alpha} - 2 \cos 4\alpha \right) = \frac{4 \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} \left(\frac{1 - \sin 8\alpha}{\sin 4\alpha} \right) = \\
 &= \frac{4 \cos 4\alpha (\sin 4\alpha - \cos 4\alpha)^2}{\sin^2 4\alpha} = 8 \cos 4\alpha \sin^2 \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin^{-2} 4\alpha.
 \end{aligned}$$

г) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2 =$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\
 &= 1 - \cos^2 \alpha - \frac{1 + \cos 2\beta + 1 + \cos 2\gamma}{2} + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\
 &= -\cos^2 \alpha - \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha (\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)) = \\
 &= -\cos \alpha (\cos \alpha - \cos(\beta + \gamma)) - \cos(\beta - \gamma) (\cos(\beta + \gamma) - \cos \alpha) = \\
 &= (\cos \alpha - \cos(\beta + \gamma)) (\cos(\beta - \gamma) - \cos \alpha) = \\
 &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Как видим, цепочки выкладок становятся всё длиннее. И недаром: математика славится «фантастической длины цепочками равносильностей». (Ю. И. Манин)

15. Доказать тождество $16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha = \sin 5\alpha$.

◀ Здесь нам предлагается попросту вывести формулу синуса пятикратного аргумента. Поэтому снова зайдем с конца:

$$\begin{aligned}
 \sin 5\alpha &= \sin(2\alpha + 3\alpha) = \sin 2\alpha \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \sin 3\alpha = \\
 &= 2 \sin \alpha \cos \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = \\
 &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) (4(1 - \sin^2 \alpha) - 3) + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) (3 - 4 \sin^2 \alpha) = \\
 &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) (1 - 4 \sin^2 \alpha) + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) (3 - 4 \sin^2 \alpha) = \\
 &= \sin \alpha (2 - 10 \sin^2 \alpha + 8 \sin^4 \alpha + 3 - 10 \sin^2 \alpha + 8 \sin^4 \alpha) = \\
 &= 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha,
 \end{aligned}$$

ч. и т. д. ▶

На психику весьма положительно действует переключение регистра — переход к условным равенствам, т. е. к задачам, в которых требуется вывести

какое-либо соотношение из немногочисленных данных — или же найти какую-то комбинацию функций (тригонометрических, разумеется) по известной. «Дано...», «Найти...» Здравствуй, школа! (Ну, и прощай навеки, конечно!..)

16. Пусть $\sin \alpha - \sin \beta = 1$, $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$. Найти $\cos(\alpha + \beta)$.

◀ Преобразуем левые части данных в условии соотношений к произведениям; мы получим

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \quad \text{и} \quad 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{3}.$$

Возведем в квадрат каждое равенство и сложим результаты; тогда

$$4 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 4 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = 1.$$

Остается вызвать формулу косинуса двойного угла:

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 = 1. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** 1.

17. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$; найти $\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha$.

◀ Поскольку $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2/\sin 2\alpha$, откуда $\sin 2\alpha = 2/3$, искомая сумма

$$\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{2}{\sin 6\alpha} = \frac{2}{3 \sin 2\alpha - 4 \sin^3 2\alpha} = \frac{27}{11}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** 27/11.

18. Найти $\operatorname{ctg} \alpha$, если $12 \sin \alpha + 5 \cos \alpha = 13$.

◀ Вспомогательный угол напрашивается; действительно

$$12 \sin \alpha + 5 \cos \alpha = 13 \sin(\alpha + \phi),$$

где $\operatorname{tg} \phi = 5/12$. Значит, $\sin(\alpha + \phi) = 1$ и $\alpha + \phi = \pi/2 + 2\pi n$. Тогда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \phi + 2\pi n \right) = \operatorname{tg} \phi = \frac{5}{12}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** 5/12.

19. Найти $|\sin 2\alpha|$, если

$$\cos 2\alpha \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} < \sin \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

◀ Поскольку

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \leq \frac{1}{3},$$

отсюда следует, что $\sin^2 \alpha \geq 1/3$. Но одновременно $1/2 < \sin \alpha \leq 1/\sqrt{3}$. Значит, $\sin \alpha = 1/\sqrt{3}$. Тогда

$$\cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad |\sin 2\alpha| = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \quad \blacktriangleright$$

✎ **Ответ:** $4\sqrt{2}/3$.

20. Найти $\operatorname{tg} 1^\circ$, если известно, что $\cos 157^\circ = a$.

◀ Прежде всего нужно как-то связать между собой данные углы. Поскольку $157 \cdot 2 = 314 = 315 - 1$, а $315 = 360 - 45$, связь установлена и обещает успех.

Теперь используем формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$$

и формулу тангенса разности. Имеем с одной стороны:

$$\operatorname{tg} 314^\circ = \operatorname{tg} 2 \cdot 157^\circ = \frac{2a\sqrt{1-a^2}}{2a^2 - 1};$$

а с другой

$$\operatorname{tg} 314^\circ = \operatorname{tg} (315^\circ - 1^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 315^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ}{1 + \operatorname{tg} 315^\circ \operatorname{tg} 1^\circ} = \frac{1 + \operatorname{tg} 1^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ - 1},$$

поскольку $\operatorname{tg} 315^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$.

Если теперь обозначить $\operatorname{tg} 1^\circ = x$, то получится уравнение

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2a\sqrt{1-a^2}}{2a^2-1}.$$

Решая его, находим

$$\operatorname{tg} 1^\circ = x = \frac{2a^2 - 1 + 2a\sqrt{1-a^2}}{2a\sqrt{1-a^2} + 1 - 2a^2}. \quad \blacktriangleright$$

✎ **Ответ:** $\frac{2a^2 - 1 + 2a\sqrt{1-a^2}}{2a\sqrt{1-a^2} + 1 - 2a^2}.$

Условные равенства бывают довольно замысловатыми.

21. Пусть

$$\frac{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{4}{9}.$$

Найти

$$\frac{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma)}{\cos \gamma \cos(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

◀ Здесь от обилия греческих букв несколько рябит в глазах, но если не испугаться и пуститься в глубины алфавита, всё обходится без неожиданностей.

Перепишем условие в виде $9 \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta$ и преобразуем произведение в суммы. Получим

$$9 \cos(\alpha - \beta) - 9 \cos(\alpha + \beta + 2\gamma) = 4 \cos(\alpha - \beta) + 4 \cos(\alpha + \beta),$$

откуда

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{9}{5} \cos(\alpha + \beta + 2\gamma) + \frac{4}{5} \cos(\alpha + \beta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma)}{\cos \gamma \cos(\alpha + \beta + \gamma)} &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + 2\gamma)}{\cos(\alpha + \beta + 2\gamma) + \cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{(9/5) \cos(\alpha + \beta + 2\gamma) + (4/5) \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta + 2\gamma)}{\cos(\alpha + \beta + 2\gamma) + \cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta + 2\gamma) + \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta + 2\gamma) + \cos(\alpha + \beta)} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

►

🔖 **Ответ:** 4/5.

22. Пусть

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a \cos \alpha + 1} = \frac{a^2 + 2a \cos \beta + 1}{a^2 - 1}.$$

Доказать, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \frac{a + 1}{a - 1}.$$

◀ Решить этот пример можно — труднее понять его происхождение. Но это тема для другого рассказа.

Из условия следует, что

$$(a^2 - 1)^2 = (a^2 + 1)^2 + 2a(a^2 + 1)(\cos \alpha + \cos \beta) + 4a^2 \cos \alpha \cos \beta,$$

откуда

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta} = -\frac{2a}{a^2 + 1}.$$

Перейдем к тангенсам половинных углов, коль скоро они задействованы в формулировке.

Тогда

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\beta/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\beta/2)};$$

$$1 + \cos \alpha \cos \beta = 1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\beta/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\beta/2)}.$$

Подставляя оба выражения в дробь и преобразовывая, получим, обозначив $\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) = x$, равенство

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = -\frac{2a}{a^2 + 1}.$$

Тогда

$$x^2 = \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^2,$$

откуда и следует требуемое. ►

23. Исключить α и β из системы

$$\begin{cases} x \operatorname{ctg}^2 \alpha + y \operatorname{ctg}^2 \beta = 1, \\ x \cos^2 \alpha + y \cos^2 \beta = 1, \\ x \sin \alpha = y \sin \beta, \end{cases}$$

если известно, что числа x и y удовлетворяют условиям $xy \neq 0$, $x+y \neq 0$, $x+y \neq 1$.

◀ Переписав второе уравнение в виде $x - x \sin^2 \alpha + y - y \sin^2 \beta = 1$ и объединив с третьим, получим подсистему

$$\begin{cases} x \sin^2 \alpha + y \sin^2 \beta = x + y - 1, \\ x \sin \alpha - y \sin \beta = 0. \end{cases}$$

Эта система линейна относительно двух неизвестных $\sin^2 \alpha$ и $\sin^2 \beta$. Решая ее, найдем

$$\sin^2 \alpha = \frac{y(x+y-1)}{x(x+y)}, \quad \sin^2 \beta = \frac{x(x+y-1)}{y(x+y)}.$$

Тогда, поскольку

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1,$$

получаем

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{x^2 - y^2 + y}{y(x + y - 1)}, \quad \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{y^2 - x^2 + x}{x(x + y - 1)}.$$

Подстановка найденных величин в первое уравнение исходной системы, дает

$$\frac{x(x^2 - y^2 + y)}{y(x + y - 1)} + \frac{y(y^2 - x^2 + x)}{x(x + y - 1)} = 1.$$

В принципе, ответ получен, но его можно существенно упростить, если избавиться от знаменателя. В самом деле:

$$x^2(x^2 - y^2 + y) + y^2(y^2 - x^2 + x) = xy(x + y - 1).$$

Раскрывая скобки, приходим к равенству $(x^2 - y^2)^2 + xy = 0$. ►

✎ **Ответ:** $(x^2 - y^2)^2 + xy = 0$.

Теперь снова вернемся в «числовую область» и разберем несколько примеров на сравнение значений тригонометрических функций друг с другом. В современную эпоху задачи на вычисления без калькулятора подобны этакому катанию на лыжах без палок; но сознательные ограничения иногда полезны, поскольку приучают работать с минимумом материала, в стесненных условиях.

24. Доказать, что $\operatorname{tg} 208^\circ < \sin 492^\circ$.

◀ Поскольку

$$\operatorname{tg} 208^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 28^\circ) = \operatorname{tg} 28^\circ, \quad \sin 492^\circ = \sin (540^\circ - 48^\circ) = \sin 48^\circ,$$

докажем, что $\operatorname{tg} 28^\circ < \sin 48^\circ$. Но

$$\operatorname{tg} 28^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ < \sin 48^\circ. \quad \blacktriangleright$$

25. Сравнить $\cos (3\pi/11)$ и 0,55.

◀ Рассматриваемый угол близок к углу $3\pi/10$, синус которого нам уже известен. Попробуем этим воспользоваться.

Поскольку

$$\cos \frac{3\pi}{11} > \cos \frac{3\pi}{10},$$

сравним

$$\cos \frac{3\pi}{10} \text{ и } 0,56 = \frac{14}{25}.$$

Имеем

$$\cos \frac{3\pi}{10} = \cos 54^\circ = \sqrt{1 - ((\sqrt{5} + 1)/4)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

И выстраиваем цепочку сравнений:

$$\begin{aligned} \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \vee \frac{196}{625} &\Leftrightarrow 6250 - 2936 \vee 1250\sqrt{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3314 \vee 1250\sqrt{5} \Leftrightarrow 10982596 > 7812500. \end{aligned}$$

Значит,

$$\cos \frac{3\pi}{11} > \cos \frac{3\pi}{10} > 0,56 > 0,55. \quad \blacktriangleright$$

Проницательный и трудолюбивый читатель, возможно, заметил, что, по большому счету, формулировка задания по тригонометрии не имеет самодевуляющего значения: и в задачах на проверку равенств, и при доказательстве тождеств, и при сравнении величин нам приходится делать примерно одно и то же. Не форма важна, а содержание и методы решения. Поэтому мы не слишком усердно подразделяли задания на циклы, стараясь только, чтобы задачи не были похожи друг на друга, как горошины. Кажется, это полезно для абитуриента, которому надо готовиться к тому, что на экзамене ему подадут сборную солянку.

В заключение рассмотрим несколько задач, связанных с углами треугольника.

26. Доказать, что если углы треугольника ABC удовлетворяют равенству $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$, то данный треугольник – прямоугольный.

◀ Имеем:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0; \quad 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C = 0.$$

Тогда, поскольку в силу условия

$$A + B + C = \pi, \quad \cos C = \cos(\pi - A - B) = -\cos(A+B),$$

получаем

$$\begin{aligned} \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2(A+B) &= 0 \\ \text{или } \cos(A+B)(\cos(A-B) + \cos(A+B)) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда либо $\cos(A+B) = 0$, и тогда угол C прямой; либо

$$\cos(A-B) + \cos(A+B) = 0,$$

т. е. $\cos A \cos B = 0$, и прямым является один из углов A или B . ▶

27. Пусть A, B, C — углы некоторого треугольника. Доказать, что тогда:

$$\text{а) } \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\text{б) } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$$

$$\text{в) } \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1.$$

$$\blacktriangleleft \text{ а) } \sin A + \sin B + \sin(A+B) =$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{\pi - C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\text{б) } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) - \sin 2(A+B) =$$

$$= 2 \sin(A+B)(\cos(A-B) - \cos(A+B)) =$$

$$= 4 \sin(A+B) \sin A \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

в) Идеология примера нам знакома: замаскированная формула. Имеем:

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} A(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) =$$

$$= 1 - \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \Leftrightarrow \operatorname{ctg} A = \frac{1 - \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(B+C),$$

что верно, если $A+B+C = \pi$. $\blacktriangleright$

С равенствами, кажется, всё более или менее ясно. Обратимся к неравенствам.

28. Доказать, что если $A+B+C = \pi$, то:

$$\text{а) } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2};$$

$$\text{б) } \sin A + \sin B + \sin C \geq 4 \sin A \sin B \sin C;$$

$$\text{в) } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > \frac{3}{4}.$$

$$\blacktriangleleft \text{ а) } \cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \cos(A+B) =$$

$$= -2t^2 + 2at + 1, \text{ где } t = \cos \frac{A+B}{2}, a = \cos \frac{A-B}{2}.$$

Выделяя полный квадрат, приводим выражение к виду

$$\frac{a^2}{2} + 1 - 2\left(t - \frac{a}{2}\right)^2,$$

что не превосходит $3/2$, поскольку $|a| \leq 1$.

6) Так как

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2};$$

$$4 \sin A \sin B \sin C = 8 \sin A \sin B \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2},$$

то, сокращая на

$$\sin \frac{A+B}{2} \neq 0,$$

приводим доказываемое неравенство к равносильному виду

$$\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \geq 4 \sin A \sin B \cos \frac{A+B}{2}$$

или

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \geq 2 \sin A \sin B \cos \frac{A+B}{2},$$

что в свою очередь приводится к

$$1 \geq 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A+B}{2}.$$

Но это неравенство равносильно

$$1 \geq 4 \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \cos \frac{A+B}{2} \quad \text{или} \quad t^2 - at + \frac{1}{4} \geq 0,$$

где

$$t = \cos \frac{A+B}{2}, \quad a = \cos \frac{A-B}{2}.$$

И поскольку

$$t^2 - at + \frac{1}{4} = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1-a^2}{4} \geq 0,$$

неравенство доказано. Заметим, что равенство достигается только если $A = B = C$, т. е. в случае равностороннего треугольника.

в) Начальные действия во всех этих задачах примерно одинаковые. И тут мы легко преобразовываем доказываемое неравенство к виду

$$\cos(A+B)(1 - \cos(A-B)) < \frac{1}{4}.$$

Что дальше? Квадратного трехчлена не видно, зацепиться как будто не за что. Остается... ну, конечно, неравенство Коши, которое всегда стоит держать на прицеле при доказательстве неравенств, даже тригонометрических.

Итак, в силу

$$ab < \left(\frac{a+b}{2} \right)^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} \cos(A+B)(1 - \cos(A-B)) &< \left(\frac{\cos(A+B) + 1 - \cos(A-B)}{2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1 - 2 \sin A \sin B}{4} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \sin A \sin B \right)^2 < \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

поскольку $0 < \sin A \sin B < 1$. ►

Мы видим: тригонометрия настолько разнообразна, что количество примеров практически бесконечно. Но что мы можем с этим поделать? Решать, решать, решать.

Да, мы попытались навести какой-то порядок в означенном разнообразии, но... Какое воспитательное значение имеет наш труд?

Другие по живому следу

Пройдут твой путь за пядью пядь...

Не знаю, можно ли еще что-либо сделать для ученика... Всё же напоследок, как дополнительное напоминание о разнообразии мира, разберем два примера.

Первый из них, хотя и кажется относящимся к другой области, в действительности сводится к сравнению синусов.

29. Решить неравенство $x^2 - (\sin 4 + \sin 5)x + \sin 4 \cdot \sin 5 < 0$.

◀ В силу теоремы Виета, корнями трехчлена будут $\sin 4$ и $\sin 5$, значит, неравенство выполнено на интервале между этими числами. Но какое из них больше? Во-первых, каждое из них отрицательно, поскольку аргументы обоих синусов принадлежат промежутку $[\pi; 2\pi]$. Меньшим будет то значение, которое соответствует углу, ближайшему к $3\pi/2$ (в котором достигается наименьшее значение синуса на рассматриваемом отрезке). Иными словами, надо сравнить числа $3\pi/2 - 4$ и $5 - 3\pi/2$ или 3π и 9 . Поскольку $3\pi > 9$, первое число больше, т. е. 4 дальше от $3\pi/2$, чем 5 , значит, $\sin 4 > \sin 5$. ►

 **Ответ:** $x \in (\sin 5; \sin 4)$.

А простейшая формула приведения $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ — всё, что нужно для решения следующей задачи.

30. Вычислить

$$I = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)) dx.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos x) + 1 - \cos^2(\cos(\pi/2 - x))) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos x) - \cos^2(\cos(\pi/2 - x))) dx. \end{aligned}$$

Ввиду трудности подынтегрального выражения напрашивается гипотеза, что последний интеграл равен 0, т. е.

$$J = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos x) - \cos^2(\cos(\pi/2 - x))) dx = 0.$$

Если сделать замену $\pi/2 - x = y$, то интеграл J преобразуется к виду

$$\begin{aligned} J &= \int_{\pi/2}^0 (\cos^2(\cos(\pi/2 - y)) - \cos^2(\cos y))(-dy) = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos(\pi/2 - y)) - \cos^2(\cos y)) dy = -J, \end{aligned}$$

т. е. действительно, $J = 0$ и $I = \pi/2$. ►

 **Ответ:** $\pi/2$.



**Привал зачарованных
стражников**

1. Дано: $\sin \alpha = 4/5$, $\sin 4\alpha > 0$. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$.
2. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha + \sin \beta = \sqrt{2}/2$, $\cos \alpha + \cos \beta = 1$.

3. Вычислите

$$\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9}.$$

4. Проверьте равенство: $\sin 6^\circ + \sin 42^\circ - \sin 66^\circ - \sin 78^\circ = -\sqrt{5}/2$.

5. Покажите, что

$$\sin 9^\circ = \frac{1}{4} \left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right).$$

6. Вычислите $\cos 47^\circ + \cos 25^\circ - \cos 11^\circ - \cos 61^\circ - \sin 7^\circ$.

7. Вычислите

$$\frac{\cos 140^\circ}{\sin 20^\circ} \sqrt{\sin^2 10^\circ - \cos^3 80^\circ}.$$

8. Докажите, что уравнение $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$ имеет корень $x = \operatorname{tg}^2 20^\circ$.

9. Дано: $7 \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha - 4 \cos \alpha = 28$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$.

10. Вычислите

$$32 \cos^3 \frac{\pi}{12} \sin^2 \frac{\pi}{8} - 12 \cos \frac{\pi}{12}.$$

11. Вычислите

$$\sin^2 \frac{\pi}{11} + \sin^2 \frac{2\pi}{11} + \sin^2 \frac{3\pi}{11} + \sin^2 \frac{4\pi}{11} + \sin^2 \frac{5\pi}{11}.$$

12. Пусть

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Покажите, что

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}.$$

13. Вычислите при $\alpha = 2\pi/17$:

а) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha$;

б) $(\cos \alpha + \cos 4\alpha)(\cos 2\alpha + \cos 8\alpha)$.

14. Пусть $\sin(40^\circ + x) = 0,8$, $0 < x < 45^\circ$. Найдите $\cos(70^\circ + x)$.

15. Вычислите

$$\sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{11\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30}.$$

16. Представьте в виде произведения

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \frac{\sin(x + y + z)}{\cos x \cos y \cos z}.$$

17. Найдите $\sin 4\alpha$, если $\sin 2\alpha \leq \frac{4}{5}$, $1 < \operatorname{tg} \alpha \leq 2$.

18. Найдите

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta)}{\operatorname{tg} \alpha},$$

если $\sin(2\alpha + 2\beta) = 2 \sin 2\beta$.

19. Докажите равенство:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = \frac{1 + \cos(\pi/7)}{\sin(\pi/7)};$$

$$\text{б) } \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

20. Пусть

$$A = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}, \quad B = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Найдите значения A и B , если известно, что они положительны и одно из них втрое больше другого.

21. Найдите угол α из условия

$$\sin \alpha = \cos 50^\circ + \frac{2(1 + \cos 40^\circ)}{\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}.$$

22. Исключите α и β из системы

$$\begin{cases} x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha = 1, \\ x \cos^2 \beta + y \sin^2 \beta = 1, \\ x \operatorname{tg} \alpha = y \operatorname{tg} \beta, \end{cases}$$

если $x \neq y$.

23. Докажите, что

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}^2(60^\circ + \alpha) = 9 \operatorname{tg}^2 3\alpha + 6$$

при всех допустимых α .

24. Дано:

$$a \sin^4 \alpha + b \cos^4 \alpha = \frac{ab}{a+b}.$$

Докажите, что

$$a^3 \sin^{12} \alpha + b^3 \cos^{12} \alpha = \left(\frac{ab}{a+b} \right)^3.$$

25. Найдите значение выражения

$$(x - y)^2 + (x \operatorname{ctg} \alpha + y \operatorname{ctg} \beta - 2)^2 + 4 \sin (2\alpha + 2\beta)$$

при $x = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha - 1$, $y = \cos 2\beta + \sin 2\beta - 1$.

26. Пусть

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \dots + a_n \cos \alpha_n = 0$$

$$\text{и } a_1 \cos (\alpha_1 + 1) + a_2 \cos (\alpha_2 + 1) + \dots + a_n \cos (\alpha_n + 1) = 0.$$

Докажите, что тогда и для любого x имеет место равенство

$$a_1 \cos (\alpha_1 + x) + a_2 \cos (\alpha_2 + x) + \dots + a_n \cos (\alpha_n + x) = 0.$$

27. Проверьте равенство

$$\cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21} = \frac{\sqrt{21} + 1}{4}.$$

28. Пусть α, β, γ — углы некоторого треугольника. Найдите косинусы этих углов, если $\cos \alpha + \cos \beta = 7/5$, $\cos (\alpha - \beta) - \cos \gamma = 24/25$.**29. Пусть A, B, C — углы некоторого треугольника. Докажите, что тогда:**

а) $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$.

б) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$;

в) $\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

30. Докажите неравенство

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \leq \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

при $\alpha, \beta \in (0; \pi/2)$.

Советы и решения

Р 1. Находим последовательно: $\cos \alpha = \pm 3/5$, тогда $\sin 2\alpha = \pm 24/25$; в свою очередь, $\cos 2\alpha = -7/25$, и поскольку должно быть $\sin 4\alpha = 2(\pm 24/25)(-7/25) > 0$, уточняем: $\sin 2\alpha = -24/25$. Тогда $\operatorname{tg} 2\alpha = 24/7$.

Р 2. Пусть $\alpha + \beta = 2x$, $\alpha - \beta = 2y$. Из условия следует, что

$$\begin{cases} 2 \sin x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2 \cos x \cos y = 1, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}/2$. Тогда

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Р 3. Преобразовывая в сумму, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \\ & = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} \right) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9} \right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Р 4. Группируя через один, имеем

$$\begin{aligned} & -2 \sin 30^\circ \cos 36^\circ - 2 \sin 18^\circ \cos 60^\circ = -(\cos 36^\circ + \sin 18^\circ) = \\ & = -(\sin 54^\circ + \sin 18^\circ) = -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

(см. пример 1 данного параграфа).

Р 5. Зная, что

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

и находя

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

имеем

$$\begin{aligned} \sin 9^\circ &= \sin (45^\circ - 36^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 36^\circ - \sin 36^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 54^\circ - 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{8} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{4} \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}). \end{aligned}$$

Р 6. ... $= 2 \cos 36^\circ \cos 11^\circ - 2 \cos 36^\circ \cos 25^\circ - \sin 7^\circ = 4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \sin 7^\circ - \sin 7^\circ = 0$, поскольку $\cos 36^\circ \sin 18^\circ = \sin 54^\circ \sin 18^\circ = 1/4$ (пример 1).

Если преобразовать данное выражение к виду $-\cos 11^\circ - \cos 83^\circ - \cos 155^\circ - \cos 227^\circ - \cos 299^\circ$, то можно воспользоваться решением, предложенным в примере 5 раздела «Хитрые задачи».

Р 7. ... $= -\frac{\cos 40^\circ \sqrt{\sin^2 10^\circ - \sin^3 10^\circ}}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} =$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\cos 40^\circ \sin 10^\circ \sqrt{1 - \sin 10^\circ}}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = -\frac{\cos 40^\circ \sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2}}{2 \cos 10^\circ} = \\ &= \frac{\cos 40^\circ (\cos 5^\circ - \sin 5^\circ)}{2 \cos 10^\circ} = \frac{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ}{4 \cos 10^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos (45^\circ - 35^\circ)}{4 \cos 10^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

(При упрощении корня мы воспользовались тем, что $\sin 5^\circ - \cos 5^\circ = \sqrt{2} \sin (-40^\circ) < 0$).

Р 8. Из формулы тангенса тройного угла следует, что

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}^3 20^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

Возводя в квадрат и заменяя $\operatorname{tg}^2 20^\circ = x$, получаем

$$\frac{9x - 6x^2 + x^3}{1 - 6x + 9x^2} = 3,$$

откуда $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$.

Р 9. Перепишем условие так:

$$7 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha = 28 \cos \alpha \quad \text{или} \quad -\cos \alpha (4 \cos \alpha - \sin \alpha) = 7(4 \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Так как $\cos \alpha \neq -7$, то $4 \cos \alpha - \sin \alpha = 0$, откуда $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

Р 10. Воспользовавшись формулами

$$\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

и обозначив $\cos(\pi/12) = x$, приводим данное выражение к виду

$$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 3x\right)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 12x = 2\sqrt{2} - 2 - 6x\sqrt{2}.$$

Но

$$x = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/6)}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Р 11. Пусть $\alpha = \pi/11$, тогда по формуле

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

данное выражение преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}(5 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha - \cos 8\alpha - \cos 10\alpha).$$

Сумма косинусов находится аналогично примеру 2, а именно:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha + \cos 10\alpha &= \frac{\sin \alpha (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \dots + \cos 10\alpha)}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha + \dots + \sin 11\alpha - \sin 9\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{-\sin \alpha + \sin 11\alpha}{2 \sin \alpha} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

поскольку $11\alpha = \pi$.

Значит, исходное выражение равно $11/4$.

Р 12. Пусть $\alpha/2 = x$, $\beta/2 = y$; тогда $\operatorname{tg} y = 4 \operatorname{tg} x$. Левая часть доказываемого равенства равна, таким образом,

$$\operatorname{tg}(y - x) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x} = \frac{3 \operatorname{tg} x}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Подставляя

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

в правую часть доказываемого равенства, получаем

$$\frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha} = \frac{6 \operatorname{tg} x}{5(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 3(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{3 \operatorname{tg} x}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Р 13. а) Пусть $x = \alpha/2$. Домножение (и деление) на $\sin x$ дает

$$\frac{\sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \dots + \sin 17x - \sin 15x}{2 \sin x} = \frac{\sin 17x - \sin x}{2 \sin x} = -\frac{1}{2},$$

поскольку $17x = \pi$.

б) Раскрыв скобки и преобразовав всё в сумму, получим

$$\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha).$$

Но при данном α имеем $\cos 9\alpha = \cos 8\alpha$ и $\cos 12\alpha = \cos 5\alpha$, поэтому выражение принимает вид

$$\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha)$$

и сумма в скобке вычисляется домножением на $\sin \alpha/2$, как в предыдущем примере, и снова она равна $-1/2$, а все выражение, таким образом, $-1/4$.

Р 14. Обозначим $40^\circ + x = \alpha$. Тогда из условия следует, что,

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \cos(70^\circ + x) = \cos(30^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}.$$

Р 15. Перемножая через один, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{5} \right) \left(\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{3} \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{2\pi}{5} \right) \left(\cos \frac{\pi}{5} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \right) - \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2},$$

а

$$\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin 54^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{4}.$$

$$\textbf{Р 16.} \quad \dots = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} + \operatorname{tg} z - \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z} =$$

$$= \frac{\sin(x+y) \cos z + \sin z \cos x \cos y - \sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z} =$$

$$= \frac{\sin(x+y) \cos z + \sin z \cos x \cos y - \sin(x+y) \cos z - \sin z \cos(x+y)}{\cos x \cos y \cos z} =$$

$$= \frac{\sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z.$$

Р 17. Пусть $\operatorname{tg} \alpha = x$. Тогда, поскольку

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

имеем неравенство

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq \frac{4}{5}.$$

Оно выполнено, если $x \notin (1/2; 2)$. По условию, $1 < x \leq 2$. Значит, $x = 2$, тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{4}{3} \quad \text{и} \quad \sin 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = -\frac{24}{25}.$$

Р 18. Переписав условие в виде $\sin(2\alpha + 2\beta) - \sin 2\beta = \sin 2\beta$, получим

$$2 \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) = \sin 2\beta,$$

откуда

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \frac{\sin 2\beta}{2 \sin \alpha}$$

и тогда

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta)}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \sin(\alpha + 2\beta) \cos \alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\beta}{\sin 2\beta} = 3.$$

Р 19. а) Поскольку

$$\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{1 + \cos(\pi/7)}{\sin(\pi/7)} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{14} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14} \right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}.$$

б) Складывая первые два синуса и раскладывая третий, имеем

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - 2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} &= 2 \sin \frac{3\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right) = \\ &= 4 \sin \frac{3\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} = 4 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}. \end{aligned}$$

Но это произведение уже вычислено в примере 11.

в) Перепишем доказываемое равенство в виде

$$\sin \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7} \cos \frac{3\pi}{7}$$

и возведем обе части в квадрат. Мы получим

$$\sin^2 \frac{3\pi}{7} - 8 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + 16 \sin^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{3\pi}{7} = 7 \cos^2 \frac{3\pi}{7}.$$

Формулы понижения степени и синуса двойного угла преобразуют это равенство к виду

$$\frac{1 - \cos(6\pi/7)}{2} - 4 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} + 4 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right) \left(1 + \cos \frac{6\pi}{7} \right) = \frac{7}{2} \left(1 + \cos \frac{6\pi}{7} \right).$$

Левая часть после упрощений приводится к

$$\frac{5}{2} - 2 \cos \frac{2\pi}{7} - 2 \cos \frac{4\pi}{7} + \frac{3}{2} \cos \frac{6\pi}{7}$$

и доказываемое равенство свелось к проверке того, что

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Но это уже установлено нами в примере 2 основной части параграфа.

$$\begin{aligned} \text{Р 20. } A &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = \\ &= \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma}. \end{aligned}$$

Если $A = 3B$, то

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma} &= \frac{3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos (\alpha + \beta) \sin \gamma &= 3 \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + 3 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \cos (\alpha + \beta) \sin \gamma &= 2 \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + 3 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \gamma (\cos (\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta) &= 2 (\sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= 2C, \end{aligned}$$

где $\sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$, откуда $A = -2$, что противоречит условию.

Итак, $B = 3A$. Тогда

$$\begin{aligned} 3 \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + 3 \cos (\alpha + \beta) \sin \gamma &= \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 (\sin (\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos (\alpha + \beta) \sin \gamma) &= \sin \gamma (\cos \alpha \cos \beta - \cos (\alpha + \beta)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin (\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

т. е. $B = 2$ и тогда $A = 2/3$.

Р 21. Поскольку $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$, $1 + \cos 40^\circ = 2 \cos^2 20^\circ$, имеем

$$\sin \alpha = \cos 50^\circ + 2 \cos^2 20^\circ \operatorname{tg} 20^\circ = \sin 40^\circ + \sin 40^\circ = 2 \sin 40^\circ > 2 \sin 30^\circ = 1.$$

Значит, требуемого угла не существует.

Р 22. Из первых двух уравнений следует, что

$$x(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) = y(1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha)$$

и, так как $x \neq y$, то $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = 0$, т. е.

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta \quad \text{или} \quad \sin \alpha = \pm \cos \beta.$$

Если $\sin \alpha = \cos \beta$, то $\cos \alpha = \pm \sin \beta$; тогда из третьего уравнения получаем $x \cos^2 \beta = \pm y \sin^2 \beta$. В случае $x \cos^2 \beta = -y \sin^2 \beta$ не выполнено второе уравнение системы. Значит,

$$x \cos^2 \beta = y \sin^2 \beta \quad \text{или} \quad x(1 - \sin^2 \beta) = y \sin^2 \beta,$$

откуда

$$\sin^2 \beta = \frac{x}{x + y}.$$

Тогда из условия $x \cos^2 \beta = y \sin^2 \beta = 1/2$ получаем $\cos^2 \beta = 1/(2x)$. Таким образом,

$$\frac{x}{x+y} + \frac{1}{2x} = 1,$$

откуда $x + y = 2xy$.

Случай $\sin \alpha = -\cos \beta$ разбирается аналогично и приводит к тому же выводу: $x + y = 2xy$.

Р 23. Пусть $\operatorname{tg} \alpha = x$, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}^2(60^\circ + \alpha) &= x^2 + (\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha))^2 + \\ &+ 2 \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3} - x}{1 + x\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} + x}{1 - x\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2(3 - x^2)}{1 - 3x^2} = \\ &= \frac{9x^6 + 45x^2 + 6}{(1 - 3x^2)^2}. \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$9 \operatorname{tg}^2 3\alpha + 6 = \frac{9(3x - x^3)^2}{(1 - 3x^2)^2} + 6 = \frac{9x^6 + 45x^2 + 6}{(1 - 3x^2)^2},$$

ч. и т.д.

Р 24. Здесь мы имеем дело с интересным возведением в куб, поскольку требуется установить, что из $x + y = z$ следует $x^3 + y^3 = z^3$. Это имеет место только в случае $3xy(x + y) = 0$. Разберем все три возможности.

Если $x = 0$, т.е. $a \sin^4 \alpha = 0$, то

$$\begin{cases} a = 0, \\ \sin^4 \alpha = 0. \end{cases}$$

Первое равенство влечет $b \cos^4 \alpha = 0$, откуда

$$\begin{cases} b = 0, \\ \cos^4 \alpha = 0. \end{cases}$$

Непротиворечивы варианты

$$\begin{cases} a = 0, & b \neq 0, \\ \cos^4 \alpha = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b = 0, & a \neq 0, \\ \sin^4 \alpha = 0, \end{cases}$$

Тогда обе части доказываемого равенства равны 0. Аналогично разбирается случай $y = 0$, т.е. $b \cos^4 \alpha = 0$.

Если же $x + y = 0$, т.е. $a \sin^4 \alpha + b \cos^4 \alpha = 0$, то это значит, что

$$\frac{ab}{a+b} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \end{cases}$$

и мы возвращаемся к разобранным вариантам.

Р 25. Имеем:

$$\begin{aligned} x - y &= \cos 2\alpha + \sin 2\alpha - \cos 2\beta - \sin 2\beta = \sqrt{2} \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(2\beta - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4} \right) \sin (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= 8 \sin^2(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}) \sin^2(\beta - \alpha) = \\ &= 2(1 - \sin(2\alpha + 2\beta))(1 - \cos(2\alpha - 2\beta)) = \dots \\ &\dots = 2 - 2 \sin(2\alpha + 2\beta) - 2 \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 4\alpha + \sin 4\beta.\end{aligned}\quad (*)$$

С другой стороны, $x = 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)$, поэтому

$$x \operatorname{ctg} \alpha = 2 \cos \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) \quad \text{и} \quad x \operatorname{ctg} \alpha - 1 = 2 \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha - 1 = \sqrt{2} \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$

аналогично

$$y \operatorname{ctg} \beta = 2 \cos \beta (\cos \beta - \sin \beta) \quad \text{и} \quad y \operatorname{ctg} \beta - 1 = \sqrt{2} \cos\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(x \operatorname{ctg} \alpha + y \operatorname{ctg} \beta - 2)^2 &= \\ &= 2 \cos^2\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos^2\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

что легко приводится к виду

$$2 - \sin 4\alpha - \sin 4\beta - 2 \sin(2\alpha + 2\beta) + 2 \cos(2\alpha + 2\beta).\quad (**)$$

Сложив теперь выражения (*), (**) и $4 \sin(2\alpha + 2\beta)$, получим 4.

Р 26. Второе условие переписывается так:

$$a_1(\cos \alpha_1 \cos 1 - \sin \alpha_1 \sin 1) + \dots + a_n(\cos \alpha_n \cos 1 - \sin \alpha_n \sin 1) = 0$$

или

$$\cos 1(a_1 \cos \alpha_1 + \dots + a_n \cos \alpha_n) = \sin 1(a_1 \sin \alpha_1 + \dots + a_n \sin \alpha_n).$$

Первая скобка равна 0 по условию, значит, и $a_1 \sin \alpha_1 + \dots + a_n \sin \alpha_n = 0$. Тогда аналогично

$$\begin{aligned}a_1 \cos(\alpha_1 + x) + a_2 \cos(\alpha_2 + x) + \dots + a_n \cos(\alpha_n + x) &= \\ = \cos x(a_1 \cos \alpha_1 + \dots + a_n \cos \alpha_n) - \sin x(a_1 \sin \alpha_1 + \dots + a_n \sin \alpha_n) &= 0.\end{aligned}$$

Р 27. Ключом к решению служат единообразные разложения аргументов, т. е. равенства

$$\frac{2}{21} = \frac{2}{3} - \frac{4}{7}, \quad \frac{8}{21} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7}, \quad \frac{10}{21} = \frac{4}{3} - \frac{6}{7}$$

(которые можно получить методом неопределенных коэффициентов, представляя нужную дробь в виде $a/3 - b/7$). Таким образом, левая часть доказываемого равенства имеет вид

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{7}\right) &= \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{4\pi}{7} + \\ + \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{3} \cos \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{3} \sin \frac{6\pi}{7} &= \\ = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7} \right).\end{aligned}$$

Первая скобка равна $-1/2$ (пример 2), вторая скобка равна $\sqrt{3}/2$ (упражнение 19 б)). Подставляя, получаем то, что нужно.

Р 28. Условие задачи можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = \frac{7}{5}, \\ \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \frac{24}{25}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = \frac{7}{5}, \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{12}{25}, \end{cases}$$

откуда $\cos \alpha = 4/5$, $\cos \beta = 3/5$ (или наоборот); тогда $\cos \gamma = 0$.

Р 29. а) Левая часть

$$\begin{aligned} \sin 4A + \sin 4B - \sin(4A + 4B) &= 2 \sin(2A + 2B) \cos(2A - 2B) - \sin(4A + 4B) = \\ &= 2 \sin(2A + 2B)(\cos(2A - 2B) - \cos(2A + 2B)) = 4 \sin(2A + 2B) \sin 2A \sin 2B = \\ &= -4 \sin(2\pi - 2A - 2B) \sin 2A \sin 2B = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C. \end{aligned}$$

б) $8 \cos A \cos B \cos C = -4(\cos(A + B) + \cos(A - B)) \cos(A + B) = -4t^2 - 4at$, где $t = \cos(A + B)$, $a = \cos(A - B)$. Но

$$-4t^2 - 4at = a^2 - 4\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 \leq 1,$$

поскольку $|a| \leq 1$.

в) Докажем эквивалентное неравенство

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \leq 27/64,$$

применив неравенство Коши для трех неотрицательных чисел

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Итак:

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \leq \left(\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{3}\right)^3 = \frac{1}{27 \cdot 8} (3 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C)^3.$$

Обозначим $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = x$; тогда надо доказать, что

$$\frac{(3-x)^3}{27 \cdot 8} \leq \frac{27}{64} \quad \text{или} \quad x \geq -3/2.$$

Но $x = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos(2A+2B) = 2t^2 + 2at - 1$, где $t = \cos(A+B)$, $a = \cos(A-B)$. И

$$2t^2 + 2at - 1 = 2\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 1 \geq -\frac{3}{2}.$$

Р 30. Доказываемое неравенство равносильно

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{или} \quad \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$$

(поскольку $0 < (\alpha + \beta)/2 < \pi/2$), что верно.

Ответы

1. $24/7$; 2. $2\sqrt{2}/3$; 3. $-3/4$; 6. 0; 7. $\sqrt{2}/4$; 9. 4; 10. $2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 5$;
11. $11/4$; 13. а) $-1/2$; б) $-1/4$; 14. $(3\sqrt{3} - 4)/10$; 15. $1/16$;
16. $\lg x \lg y \lg z$; 17. $-24/25$; 18. 3; 20. $A = 2/3$, $B = 2$; 21. Такого угла нет; 22. $x + y = 2xy$; 23. 4; 28. $\cos \alpha = 4/5$, $\cos \beta = 3/5$, $\cos \gamma = 0$.

§ 11. Обратные тригонометрические функции

Много, много времени посвящаем мы тому, чтобы научиться грамотному обращению с обратными тригонометрическими функциями. Начинается всё с простейших одноходовок, а заканчивается...

Есть разделы курса (поступательной математики), состоящие, так сказать, из сплошных скользких мест. Обратные тригонометрические — ярчайший тому пример. Для движения (безопасного) по этим участкам нужна даже не просто зимняя резина, не просто шипы — нужны *цепи*! Цепи прочные мысли, в которые нужно заковать ширь эфира.

Впрочем, и здесь попадают относительно спокойные участки...

Главную роль в теме играют соображения, связанные с областью определения и областью значений аркфункций. И это особенно важно при решении уравнений и неравенств. Формулы, связывающие аркусы между собой, более чем многочисленны и большинство имеет ограничения по области применимости. Стоит ли запоминать их все? И возможно ли это? Конечно, основные тождества-свойства, такие как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ или $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ помнить нужно и можно хотя бы потому, что они не имеют ограничений (кроме естественного $|x| \leq 1$). А вот такие, казалось бы, простые, как $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$ или $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg}(1/x)$, на проверку оказываются верными *не при всех* допустимых x , а имеют продолжение (как некоторые общепотребительные, а на самом деле усечённые идиомы или пословицы: «собаку съели», «ума палата»), т. е. каждая из этих формул — только половинка соответствующего равенства:

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } x \in [0; 1], \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } x \in [-1; 0] \end{cases}$$

и

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arccotg}(1/x), & \text{если } x > 0, \\ -\pi + \operatorname{arccotg}(1/x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

То же можно сказать и о формулах сложения для аркусов, например,

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

первая из которых верна только при $xy \leq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$, вторая — при $xy < 1$, а в остальных случаях (мы здесь не уточняем всё полностью) должны быть дополнены соотношениями

$$\arcsin x + \arcsin y = \pm \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

и

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pm \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Не говоря уже о том, что сумму арксинусов можно выражать и через арккосинус.

Стоит ли забивать свою голову всем этим материалом, каждый утоп... поступающий решает сам. Нужные формулы всегда можно вывести для того

случая, который представляется в конкретной задаче. Умей владеть лишь этим. (А что до упомянутых пословиц, то — если вам интересно — окончания их такие: «...хвостом подавились» и «...да ключ потерял».)

Но к делу.

1. Вычислить а) $\arcsin(\sin 590^\circ)$; б) $\arccos(\cos 860^\circ)$;

◀ Для решения нужно прежде всего уяснить, что $\arcsin a$, $\arccos a$ и т. д. это не просто угол, синус (косинус, тангенс, котангенс) которого равен a , а угол, заключенный в определенных пределах: $[-90^\circ; 90^\circ]$ для арксинуса, $[0^\circ; 180^\circ]$ для арккосинуса, $(-90^\circ; 90^\circ)$ для арктангенса, $(0^\circ; 180^\circ)$. Причем такой угол всегда только один.

Метод решения дают формулы приведения, поскольку они позволяют привести сколь угодно большой угол, заданный в условии, к углу в любом из указанных диапазонов: $[-90^\circ; 90^\circ]$ или $[0^\circ; 180^\circ]$.

а) $\sin 590^\circ = \sin(3 \cdot 180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ = \sin(-50^\circ)$; значит,

$$\arcsin(\sin 590^\circ) = -50^\circ.$$

б) $\cos 860^\circ = \cos(4 \cdot 180^\circ + 140^\circ) = \cos(140^\circ)$; таким образом,

$$\arccos(\cos 860^\circ) = 140^\circ. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** а) -50° ; б) 140° .

2. Вычислить а) $\arcsin(\sin 3)$; б) $\arccos(\cos 9,5)$; в) $\arccos(\sin 5)$.

◀ Здесь та же ситуация с радианами. Нужно привести соответствующий угол к углу, лежащему в диапазонах $[-\pi/2; \pi/2]$ и $(-\pi/2; \pi/2)$ для арксинуса и арктангенса соответственно; в промежутках $[0; \pi]$ и $(0; \pi)$ — соответственно для арккосинуса и арккотангенса. При этом вычисления нужно вести в *оталеченных числах*, т. е. считать, что π — это приблизительно 3,14, а не 180° .

а) Поскольку $\pi/2 < 3 < \pi$, угол (число) $\pi - 3$ заключен в нужных пределах:

$$-\frac{\pi}{2} < \pi - 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$. Значит, $\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$.

б) Имеем здесь

$$3\pi < 9,5 < \frac{7\pi}{2},$$

поэтому в пределах $[0; \pi]$ заключен угол $4\pi - 9,5$. Поскольку

$$\cos 9,5 = \cos(4\pi - 9,5),$$

находим

$$\arccos(\cos 9,5) = 4\pi - 9,5.$$

в) Воспользуемся формулой $\arcsin a + \arccos a = \pi/2$ (которую позже докажем в качестве упражнения). Из нее следует, что

$$\arccos(\sin 5) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin 5).$$

Вычислим $\arcsin(\sin 5)$. Поскольку $3\pi/2 < 5 < 2\pi$, отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$ принадлежит угол $5 - 2\pi$; при этом $\sin 5 = \sin(5 - 2\pi)$, значит, $\arcsin(\sin 5) = 5 - 2\pi$. Тогда окончательно

$$\arccos(\sin 5) = \frac{\pi}{2} - 5 + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - 5. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** а) $5\pi/2$; б) $4\pi - 9,5$; в) $5\pi/2 - 5$.

3. Вычислить:

$$\text{а) } \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-4)); \quad \text{б) } \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{10}\right) + \operatorname{arccctg}\left(\operatorname{tg} \frac{27\pi}{10}\right).$$

◀ а) Здесь воспользуемся двумя равенствами:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x.$$

Тогда

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 4).$$

Теперь оценим угол. Поскольку $\pi < 4 < 3\pi/2$, интервалу $(0; \pi)$ принадлежит угол $4 - \pi$. Равенство $\operatorname{ctg} 4 = \operatorname{ctg}(4 - \pi)$ показывает, что $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 4) = 4 - \pi$.

Поэтому

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = -\frac{3\pi}{2} + 4.$$

б) Данная сумма преобразовывается к виду

$$\pi - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) - \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} \alpha),$$

где $\alpha = 27\pi/10$. Поскольку $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$, имеем

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha - 3\pi)) = \alpha - 3\pi;$$

$$\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \operatorname{arccctg}(-\operatorname{ctg}(3\pi - \alpha)) = \pi - (3\pi - \alpha) = \alpha - 2\pi.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{10} \right) + \operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{27\pi}{10} \right) &= \\ &= \pi - (2\alpha - 5\pi) = 6\pi - 2\alpha = 6\pi - \frac{27\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}. \end{aligned}$$

 **Ответ:** а) $4 - 3\pi/2$; б) $3\pi/5$.

4. Вычислить $\arcsin(\cos \alpha) + \arccos(\sin \alpha)$, если $7\pi/2 < \alpha < 4\pi$.

◀ Прежде всего, используем формулу $\arcsin a + \arccos a = \pi/2$ и приведем данное выражение к виду $\pi - \arcsin(\sin \alpha) - \arccos(\cos \alpha)$.

Вычислим $\arcsin(\sin \alpha)$. Промежутку $[-\pi/2; \pi/2]$ принадлежит число $\alpha - 4\pi$; кроме того, $\sin \alpha = \sin(\alpha - 4\pi)$. Поэтому

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha - 4\pi.$$

Вычислим $\arccos(\cos \alpha)$. В пределах $[0; \pi]$ лежит число $4\pi - \alpha$; кроме того, $\cos \alpha = \cos(4\pi - \alpha)$. Поэтому

$$\arccos(\cos \alpha) = 4\pi - \alpha.$$

Тогда

$$\arcsin(\sin \alpha) + \arccos(\cos \alpha) = 0,$$

и искомая величина равна π . ▶

 **Ответ:** π .

5. Вычислить а) $\sin(2 \arcsin(1/3))$; б) $\cos(2 \arccos(2/5))$.

◀ Для решения нужны давно знакомые формулы синуса и косинуса двойного угла и переформулировка задачи на языке обычной тригонометрии. Действительно:

а) Пусть $\arcsin(1/3) = \alpha$; требуется найти $\sin 2\alpha$, исходя из условий:

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Конечно, это для нас не задача. И не такое видали. Легко находим:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

б) Если $\arccos(2/5) = \alpha$, то $\cos \alpha = (2/5)$ и

$$\cos\left(2 \arccos \frac{2}{5}\right) = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{25} - 1 = -\frac{17}{25}.$$

☛ **Ответ:** а) $4\sqrt{2}/9$; б) $-17/25$.

6. Вычислить

а) $\sin(2 \operatorname{arctg} 2)$; б) $\cos(3 \operatorname{arctg}(-2))$; в) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13}\right)\right)$.

◀ а) Здесь $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$; тогда по формуле

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

моментально находим $\sin(2 \operatorname{arctg} 2) = 4/5$.

б) Поскольку $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha = -2$, $\alpha \in (\pi/2; \pi)$, находим сперва

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

И тогда

$$\cos(3 \operatorname{arctg}(-2)) = 4\left(-\frac{8}{5\sqrt{5}}\right) + \frac{6}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

в) Пусть $\arccos 5/13 = \alpha$; тогда

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}, \quad \sin \alpha = \frac{12}{13}.$$

Значит,

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}$$

и окончательно,

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

☛ **Ответ:** а) $4/5$; б) $-2\sqrt{5}/25$; в) $-\pi/4$.

7. Вычислить

а) $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{3}{4}$; б) $2 \operatorname{arctg} 2 + \arccos \frac{3}{5}$; в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

◀ Формат задачи таков: в косвенной форме заданы два угла; предлагается определить, чему равна их сумма (разность). Метод решения: вычислить синус или косинус (тангенс — котангенс) данной суммы (разности) и по тому, что получится, судить о том, что было.

При этом брать надо такую функцию, которая монотонна на том интервале, на котором рассматривается сумма или разность углов.

а) Пусть $\alpha = \arcsin(1/3)$, $\beta = \arcsin(3/4)$; очевидно, $0 < \alpha + \beta < \pi$. На интервале $(0; \pi)$ монотонен косинус, поэтому считаем косинус данной суммы.

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{16}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2\sqrt{14} - 3}{12}.$$

Значит,

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{3}{4} = \alpha + \beta = \arccos \frac{2\sqrt{14} - 3}{12}.$$

б) А здесь считаем синус, поскольку данный угол заключен в пределах $(\pi/2; 3\pi/2)$.

Если $\arctg 2 = \alpha$, $\arccos(3/5) = \beta$, то

$$\cos 2\alpha = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}, \quad \sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

(значение берем с положительным знаком, поскольку $\alpha \in (0; \pi/2)$ и, следовательно, $2\alpha \in (0; \pi)$). Тогда

$$\sin(2\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0$$

и, значит, $2\alpha + \beta = \pi$.

в) Пусть

$$\alpha = \arctg \frac{1}{2}, \quad \beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}};$$

ясно, что $\alpha < \beta$, поэтому

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0.$$

Найдем тангенс искомой разности. Так как

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \text{то} \quad \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 3.$$

Имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1/2 - 3}{1 + 3/2} = -1.$$

Значит,

$$\alpha - \beta = -\frac{\pi}{4}.$$



🔍 **Ответ:** а) $\arccos \frac{2\sqrt{14} - 3}{12}$; б) π ; в) $-\pi/4$.

8. Вычислить

$$\arccos \frac{36}{85} - \arccos \frac{15}{17} + \arcsin \frac{4}{5}.$$

◀ Пусть

$$\alpha = \arccos \frac{36}{85}, \quad \beta = \arccos \frac{15}{17} = \arccos \frac{75}{85}.$$

Очевидно, $\alpha > \beta$ и $0 < \alpha - \beta < \pi$. Считаем косинус.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \frac{36}{85} \cdot \frac{15}{17} + \sqrt{1 - \frac{36^2}{85^2}} \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = \\ &= \frac{36 \cdot 15 + 77 \cdot 8}{85 \cdot 17} = \frac{1156}{5 \cdot 17^2} = \frac{34^2}{5 \cdot 17^2} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Значит, $\alpha - \beta = \arccos(4/5)$ и искомая величина равна $\pi/2$, поскольку

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

▶

🔗 **Ответ:** $\pi/2$.

9. Вычислить

$$\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{3} + 1 \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{5\pi}{6} + 1 \right) \right) + \operatorname{arccctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2 \right).$$

◀ По формуле разности котангенсов,

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{3} + 1 \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{5\pi}{6} + 1 \right) &= \frac{\sin(5\pi/6 - 2\pi/3)}{\sin(2\pi/3 + 1) \sin(5\pi/6 + 1)} = \\ &= \frac{1}{\cos(\pi/6) - \cos(3\pi/2 + 2)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2 - \sin 2}. \end{aligned}$$

Тогда искомое выражение равно

$$\operatorname{arccctg} a + \operatorname{arccctg} \frac{1}{a}, \quad \text{где } a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2.$$

Определим знак числа a .

Имеем:

$$a = \sin \frac{\pi}{3} - \sin 2 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - 1 \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + 1 \right) < 0.$$

В самом деле: легко проверить, что

$$-\pi < \frac{\pi}{6} - 1 < 0, \quad 0 < \frac{\pi}{6} + 1 < \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 1\right) < 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + 1\right) > 0.$$

Поскольку $a < 0$, угол $\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg}(1/a)$ заключен в пределах $(\pi; 2\pi)$. На этом интервале монотонен котангенс. Вычисляем:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg} a) = \frac{a \cdot (1/a) - 1}{a + 1/a} = 0.$$

Значит,

$$\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg} \frac{1}{a} = \frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: $3\pi/2$.

10. Сравнить $\arccos(2/3)$ и $\arcsin(3/4)$.

◀ Поскольку

$$\arccos \frac{2}{3} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3},$$

надо сравнить $\sqrt{5}/3$ и $3/4$ или $4\sqrt{5}$ и 9. И так как $80 < 81$, то первое число меньше:

$$\arccos \frac{2}{3} < \arcsin \frac{3}{4}.$$

Ответ: первое число меньше.

11. Сравнить $\arcsin(-7/26)$ и $\operatorname{arctg}(-7/24)$.

◀ Пусть $\arcsin(7/26) = \alpha$. Тогда

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{627}}{26}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{\sqrt{627}}.$$

Пусть $\operatorname{arctg}(7/24) = \beta$, тогда $\operatorname{tg} \beta = 7/24$. Поскольку, очевидно,

$$\frac{7}{\sqrt{627}} < \frac{7}{24},$$

имеем

$$\alpha < \beta \Rightarrow -\alpha > -\beta,$$

т. е.

$$\arcsin\left(-\frac{7}{26}\right) > \operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{24}\right).$$

☞ **Ответ:** первое число больше.

12. Сравнить $\arccos(-10/41)$ и $\pi - \arcsin(40/41)$.

$$\leftarrow \arccos\left(-\frac{10}{41}\right) = \pi - \arccos\frac{10}{41} = \pi - \arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{10}{41}\right)^2} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{1581}}{41}.$$

Но $1581 < 1600 = 40^2$, значит

$$\arcsin\frac{\sqrt{1581}}{41} < \arcsin\frac{40}{41} \quad \text{и} \quad \pi - \arcsin\frac{\sqrt{1581}}{41} > \pi - \arcsin\frac{40}{41}. \quad \blacktriangleright$$

☞ **Ответ:** первое из данных чисел больше.

13. Сравнить $2\pi/5$ и $\arccos(3/10)$.

◀ Угол $2\pi/5$, он же 72° , очень хорошо нам известен. Мы знаем, что

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{3}{10} \Leftrightarrow 5\sqrt{5} < 11$$

и поскольку $125 > 121$, первое число меньше (для углов первой четверти: чем больше косинус, тем меньше угол). ▶

☞ **Ответ:** первое число меньше.

14. Доказать, что $\cos(3\pi/11) < 0,67$.

◀ Эта задача — усиленный вариант примера 25 из предыдущего параграфа. Здесь свести дело к манипуляциям с известными углами не получается, поскольку кроме неравенства $\cos(3\pi/11) > \cos(3\pi/10)$ зацепиться не за что.

Переформулируем задачу в духе данного параграфа, т. е. докажем, что

$$\frac{3\pi}{11} > \arccos(0,67);$$

а это неравенство будет вытекать из неравенства $3\pi/11 > \arccos(2/3)$ (поскольку $\arccos(2/3) > \arccos 0,67$ ввиду того, что $2/3 < 0,67$) или равносильного ему $3\pi > 11 \arccos(2/3)$.

Воспользуемся тем, что $\sin 3\pi = 0$ и сравним с 0 число $\sin(11 \arccos(2/3))$. Пусть $\arccos(2/3) = \alpha$; тогда

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Представим искомую величину в виде $\sin 11\alpha = \sin(9\alpha + 2\alpha)$. Используя формулы двойного и тройного аргумента, находим последовательно:

$$\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{1}{9};$$

$$\sin 3\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{3} - \frac{20\sqrt{5}}{27} = \frac{7\sqrt{5}}{27}; \quad \cos 3\alpha = -\frac{22}{27};$$

$$\sin 9\alpha = \frac{21\sqrt{5}}{27} - \frac{20 \cdot 343\sqrt{5}}{27^3}; \quad \cos 9\alpha = -4\frac{22^3}{27^3} + 3 \cdot \frac{22}{27}.$$

Тогда

$$\sin 11\alpha = \frac{\sqrt{5}}{9 \cdot 27} \left(\frac{20 \cdot 243 - 16 \cdot 22^3}{27^2} + 264 - 21 \right) > 0.$$

И, значит, $11\alpha < 3\pi$, поскольку угол α заключен в интервале $(\pi/4; \pi/3)$ — ввиду оценки $1/2 < 2/3 < \sqrt{2}/2$ — и поэтому $11\alpha \in (11\pi/4; 11\pi/3)$. ►

После небольшого практикума на сравнение чисел нельзя не согласиться с английским логиком А. Н. Уайтхедом: «Своеобразие математики состоит в том, что она устанавливает такие отношения между предметами, которые, если не прибегать к помощи человеческого разума, являются совершенно неочевидными».

В заключение — немного почти теоретического материала.

15. Доказать тождества:

- а) $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$;
- б) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
- в) $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$.

◀ а) Рассмотрим два угла:

$$\alpha = \arcsin x \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Оба они принадлежат отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$, поэтому считаем синус от каждого из них. Тогда равенство синусов будет равносильно равенству углов.

Поскольку

$$\sin \alpha = x \quad \text{и} \quad \sin \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x \right) = \cos \arccos x = x,$$

тождество доказано.

б) Пусть $\alpha = \arcsin x$, $\beta = -\arcsin x$. Оба угла лежат в пределах $[-\pi/2; \pi/2]$, поэтому снова считаем синус от каждого. Имеем равенства

$$\sin \alpha = x \quad \text{и} \quad \sin \beta = \sin (-\arcsin x) = -\sin (\arcsin x) = -x,$$

доказывающие формулу.

в) Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}(-x)$, $\alpha \in (0; \pi)$; $\beta = \pi - \operatorname{arctg} x$, $\beta \in (0; \pi)$.

Тогда

$$\operatorname{ctg} \alpha = -x; \quad \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (\pi - \operatorname{arctg} x) = -\operatorname{ctg} (\operatorname{arctg} x) = -x.$$

И здесь из равенства котангенсов следует равенство углов, поскольку на интервале $(0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонна. ►

16. Доказать равенства:

а) $\arcsin x + \arcsin y =$

$$= \begin{cases} \arccos (\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy), & \text{если } 0 \leq x, \quad y \leq 1, \\ -\arccos (\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy), & \text{если } -1 \leq x, \quad y < 0, \\ \arcsin (x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & \text{если } -1 \leq xy < 0. \end{cases}$$

б) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right);$

$$\text{в) } \arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

◀ а) При $x, y \geq 0$ сумма $\arcsin x + \arcsin y$ заключена в промежутке $[0; \pi]$. Здесь монотонен косинус; и поскольку

$$\cos (\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy,$$

из равенства косинусов следует равенство углов, т. е.

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos (\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy).$$

При $x, y < 0$ можно написать

$$\arcsin x = -\arcsin (-x), \quad \arcsin y = -\arcsin (-y),$$

и поскольку $-x > 0$, $-y > 0$, согласно только что доказанному, имеем:

$$\begin{aligned}\arcsin x + \arcsin y &= -(\arcsin(-x) + \arcsin(-y)) = \\ &= -\arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy).\end{aligned}$$

Если числа x и y разных знаков, то и их арксинусы разных знаков, т. е. в этом случае сумма $\arcsin x + \arcsin y$ заключена в пределах $[-\pi/2; \pi/2]$. И поскольку здесь монотонен синус, из равенства

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

следует третье из доказываемых соотношений.

б) Пусть $x \geq 0$; тогда если $\operatorname{arctg} x = \alpha$, то $\alpha \in [0; \pi/2)$ и мы имеем:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Значит,

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right).$$

Если $x < 0$ равенство также верно, поскольку обе функции нечетные и просто меняют знак.

в) Пусть $x > 0$; тогда если

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \alpha,$$

то $\alpha \in (0; \pi/2)$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(1-x^2)/x^2}} = x.$$

Беря арккосинус от обеих частей, имеем $\alpha = \arccos x$, т. е.

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

что и требуется.

Если же $x < 0$, то $\alpha \in (-\pi/2; 0)$ и

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(1-x^2)/x^2}} = -x$$

(поскольку в этом случае $\sqrt{x^2} = -x$). Тогда, беря арккосинус, получаем, с одной стороны,

$$\arccos(\cos \alpha) = \arccos(-\cos(\alpha + \pi)) = \pi - (\alpha + \pi) = -\alpha$$

(мы прибавляем к аргументу π , поскольку $\alpha \in (-\pi/2; 0)$), а с другой

$$\arccos(\cos \alpha) = \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

т. е. $-\alpha = \pi - \arccos x$ или $\arccos x = \pi + \alpha$, что и требовалось доказать. ►

17. Построить графики функций: а) $y = \arcsin(\sin x)$; б) $y = \arccos(\cos x)$; в) $y = \arctg(\tg x)$; г) $y = \operatorname{arcc}tg(\operatorname{ctg} x)$.

◀ Данные графики хорошо «знать в лицо» — так же, как и графики самих функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arcc}tg x$. Поэтому мы нарисуем здесь все эти графики в качестве справочного материала (рис. 26 а, б, в, г).

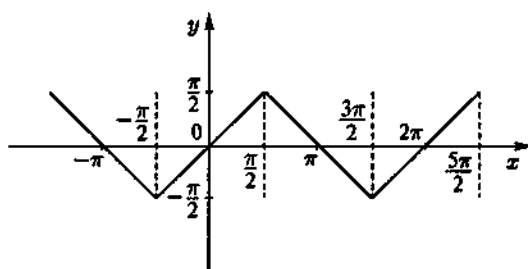


Рис. 26а

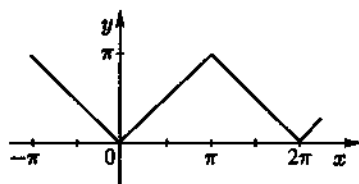


Рис. 26б

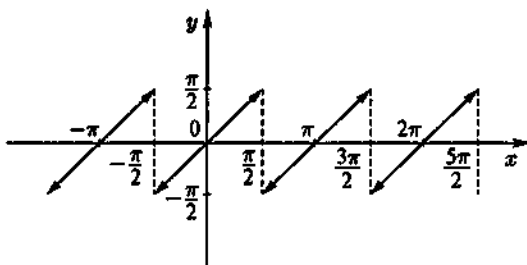


Рис. 26в

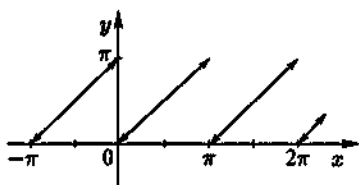


Рис. 26г ▶

18. И такие: а) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = \operatorname{arccctg} (1/x)$.

◀ рис. 27 а, б:

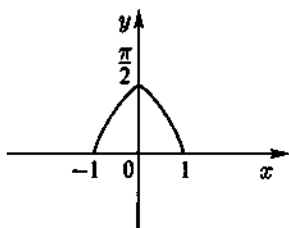


Рис. 27а

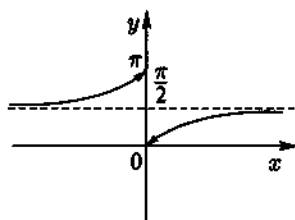


Рис. 27б ▶



Привал разочарованных в разочарованиях

1. Вычислите:

а) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \left(\sqrt{3} \cos \left(2 \operatorname{arccctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) \right) \right)$;

б) $\operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{tg} (\pi/8) - \operatorname{ctg} (\pi/8)}{2}$.

2. Сравните $\arcsin 2/5$ и $\arccos 2/5$.

3. Вычислите:

а) $\cos \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (-2,4) \right)$;

б) $\sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arccctg} \left(-\frac{3}{4} \right) \right)$;

в) $\cos \left(2 \operatorname{arccctg} \left(\sin 3 \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right) \right)$.

4. Сравните $\arccos (-\sqrt{-3 \cos \alpha - 1})$ и $19\pi/24$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

5. Найдите радианную меру угла:

а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$$\text{б) } \arccos \frac{7}{18} + 2 \arcsin \frac{5}{6};$$

$$\text{в) } \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{12}{13} + \arcsin \frac{56}{65};$$

$$\text{г) } \arcsin (\cos (2 \operatorname{arctg} (\sqrt{2} - 1))).$$

6. Вычислите

$$\operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{5}{12} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \right).$$

7. Докажите тождества:

$$\text{а) } \arcsin (-x) = -\arcsin x;$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{г) } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{д) } \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{е) } \arccos \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & x \geq 0, \\ -\arcsin x, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{ж) } \arcsin \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arccos x, & x \geq 0, \\ \pi - \arccos x, & x \leq 0. \end{cases}$$

8. Вычислите $\operatorname{arctg} (\sqrt{5} + 2) - \operatorname{arctg} (2 - \sqrt{5})$.

9. Проверьте равенства:

$$\text{а) } \arccos \frac{1}{2} + \arccos \left(-\frac{1}{7} \right) = \arccos \left(-\frac{13}{14} \right);$$

$$\text{б) } 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{32}{43};$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{7} - \frac{\pi}{8};$$

$$\text{г) } \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

10. Докажите, что:

а) при $1/2 \leq x \leq 1$ имеет место равенство

$$\arccos x + \arccos \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3 - 3x^2} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

б) при $0 < x < 1$ верно равенство

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} + \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi.$$

11. Известно, что $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} c = \pi$. Докажите, что $a + b + c = abc$.

12. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg} (\operatorname{ctg} \alpha) + \operatorname{arctg} (-\operatorname{tg} \alpha)$, если $-5\pi/2 < \alpha < -2\pi$;

б) $2 \arccos (\cos \alpha) + \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 2\alpha)$, если $\pi < \alpha < 5\pi/4$.

в) Выразите $\arcsin (\sin (355/2))$ через число π .

г) Докажите, что при $-\pi/2 + 2\pi k \leq x \leq \pi/2 + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, имеет место равенство

$$\arcsin (\sin x) = x - 2\pi k.$$

Чему равен $\arcsin (\sin x)$ при $\pi/2 + 2\pi k \leq x \leq 3\pi/2 + 2\pi k$?

13. Вычислите:

а) $\arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) + \sin \left(\frac{\pi}{12} - 1 \right) \right)$;

б) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{21\pi}{10} - 1 \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{5} + 1 \right) \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \cos \left(\frac{17\pi}{10} - 2 \right) \right)$.

14. Докажите, что $\arcsin (\cos (\arcsin x)) + \arccos (\sin (\arccos x)) = \pi/2$.

15. Найдите область определения функции

$$y = \arcsin (\arcsin x) + \arccos (\arccos x).$$

16. Докажите, что $\operatorname{arctg} (1/2) < \pi/5$.

17. Сравните $\operatorname{tg} 1, 1$ и $\operatorname{arctg} 1, 1$.

18. Постройте графики функций:

а) $y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$;

б) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Советы и решения

Р 1. а) Выбираемся наружу с конца:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) &= \frac{4\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{6} \rightarrow \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

(круг замкнулся).

б) Поскольку $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha$, исходное выражение равно

$$\operatorname{arctg} \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Р 2. По сути, требуется сравнить числа $2/5$ и $\pi/4$, поскольку $\arcsin x = \arccos x$ при $x = \pi/4$. И так как $2/5 < 3/4 < \pi/4$, а на интервале $(0; \pi/4)$ $\arcsin x < \arccos x$ (графики ведь так и стоят у нас перед глазами!), то второе число больше.

Р 3. а) Согласно формуле

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

заведомо верной при $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ (наш случай), данная величина равна

$$\sqrt{\frac{1 + 5/13}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

поскольку

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 144/25}} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{б) } \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) \right) = \sin \left(\frac{1}{2} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right) \right) = \cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$$

и дальше аналогично а).

в) Согласно формуле синуса тройного угла и равенству

$$\sin (\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

имеем

$$\sin \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right) = 3/5, \quad \sin \left(3 \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right) = \frac{9}{5} - 4 \left(\frac{27}{125} \right) = \frac{117}{125}.$$

Но

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1},$$

поэтому исходное выражение равно

$$\frac{117^2 - 125^2}{117^2 + 125^2} = -\frac{968}{15117}.$$

Р 4. Из условия следует, что $\cos \alpha = \pm 1/2$. Но $-3 \cos \alpha - 1 \geq 0$; значит, $\cos \alpha = -1/2$. Таким образом, надо сравнить $\arccos (-1/\sqrt{2}) = 3\pi/4 = 18\pi/24$ и $19\pi/24$. Ясно, что второе число больше.

Р 5. Конечно, и здесь задание состоит в том, чтобы вычислить некую величину, но иногда на экзаменах встречается и данная формулировка. Итак:

а) Пусть $\operatorname{arctg}(1/3) = \alpha$, $\alpha \in (0; \pi/2)$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+1/9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{и} \quad \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Если вычисляемый угол обозначить через β , то

$$\sin \beta = \sin \left(\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\beta = -\pi/4$.

б) Обозначим искомый угол через α , $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$. Тогда

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{324} \left(1 - 2 \cdot \frac{25}{36} \right) + \frac{7}{18} \cdot 2 \cdot \frac{5}{6} \sqrt{1 - \frac{25}{36}}} = 0.$$

Значит, $\alpha = \pi$.

в) По формуле а) примера 16 данного параграфа,

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{12}{13} &= \arccos \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} \right) = \\ &= \arccos \left(-\frac{33}{65} \right) = \pi - \arccos \left(\frac{33}{65} \right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{33}{65}. \end{aligned}$$

Тогда вся сумма равна

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{33}{65} + \arcsin \frac{56}{65} &= \frac{\pi}{2} + \arccos \left(\sqrt{1 - \left(\frac{33}{65} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{56}{65} \right)^2} - \frac{33 \cdot 56}{65^2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \arccos 0 = \pi. \end{aligned}$$

г) Пусть $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) = \alpha$, тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} = \frac{(1 - \sqrt{2})^2 - 1}{(1 - \sqrt{2})^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и, таким образом, искомая величина есть $\arcsin(-1/\sqrt{2}) = -\pi/4$.

Р 6. Так как

$$\operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{5}{12} \right) = \frac{2 \cdot (5/12)}{1 - (5/12)^2} = \frac{120}{119},$$

искомая величина равна

$$\frac{120/119 - 1/239}{1 + 120/119 \cdot 1/239} = \dots = 1.$$

Р 7. а) Пусть $-\arcsin x = \alpha$, $\arcsin(-x) = \beta$, оба угла заключены в пределах $[-\pi/2; \pi/2]$. Беря синус от каждого, получим $\sin \alpha = -x = \sin \beta$. Значит, $\alpha = \beta$.

б) Пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\pi/2 - \operatorname{arctg} x = \beta$; оба угла заключены в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x = \operatorname{tg} \alpha$, что доказывает тождество.

г) При указанных условиях левая часть заключена в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, где тангенс монотонен, и тангенс левой части, очевидно, равен тангенсу правой (если мы

помним формулу тангенса суммы). Значит, из равенства тангенсов следует равенство самих углов.

д) Пусть $x > 0$, $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arccotg}(1/x) = \beta$; тогда

$$\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = x \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Если $x < 0$, то

$$\beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow -\beta + \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

и поскольку $\operatorname{tg}(-\pi + \beta) = \operatorname{tg} \beta = x$, имеем $\alpha = -\pi + \beta$.

е) Пусть $\arccos \sqrt{1-x^2} = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\arcsin x = \beta$. Если $x > 0$, то

$$\beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2} = \cos \alpha.$$

Если же $x < 0$, то $\beta \in [-\pi/2; 0]$ и $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - x^2} = -\cos \alpha$.

Р 8. Данное выражение равно $\operatorname{arctg}(\sqrt{5}+2) + \operatorname{arctg}(\sqrt{5}-2)$, т. е. имеет вид

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1}{a},$$

где $a > 0$. Но тогда если $\alpha = \operatorname{arctg} a$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = a \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arccotg} \frac{1}{a}$$

и

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{a} + \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Р 9. а) Доказываемое равенство равносильно

$$\frac{\pi}{3} + \pi - \arccos \frac{1}{7} = \pi - \arccos \frac{13}{14} \text{ или } \arccos \frac{1}{7} - \arccos \frac{13}{14} = \frac{\pi}{3}.$$

Можно вывести формулу для разности арккосинусов, но для разнообразия просто вычислим косинус от обеих частей равенства: поскольку левая часть принадлежит интервалу $(0; \pi/2)$ (убывание арккосинуса означает, что $\alpha = \arccos \frac{1}{7} > \arccos \frac{13}{14} = \beta$), совпадение результатов будет доказательством. Имеем

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{14} + \sqrt{1 - \frac{1}{49}} \cdot \sqrt{1 - \frac{169}{196}} = \frac{13 + 36}{98} = \frac{1}{2}.$$

б) По формуле упражнения 7 г) (при $y = -1/4$),

$$\operatorname{arctg} \frac{32}{43} - \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{5}{12};$$

а по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{12}.$$

в) Перепишем в виде

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 7 - \frac{\pi}{4}$$

и найдем тангенс от обеих частей, каждая из которых заключена в интервале $(0; \pi/2)$.

г) И снова формула 7 г):

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{7}{9}, \quad \operatorname{arctg} \frac{7}{9} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Р 10. а) Перепишем в виде

$$\arccos \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3-3x^2} \right) = \frac{\pi}{3} - \arccos x.$$

Из условия следует, что правая часть этого равенства заключена в пределах $[0; \pi/3]$; что до левой, то она, во-первых, неотрицательна, а во-вторых, не больше 1 (соответствующее неравенство приводится к виду $x^2 - x + 1/4 \geq 0$), т. е. аркосинус определен и не превосходит $\pi/2$. Осталось взять косинус от обеих частей.

б) Перепишем доказываемое так:

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \pi - \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

При $0 < x < 1$ обе части этого равенства заключены в пределах $(\pi/2; \pi)$, поэтому возьмем синус от каждой, пользуясь формулой $\sin 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$; мы получим тождество

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Р 11. Беря тангенс от обеих частей равенства $\operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} c = \pi - \operatorname{arctg} a$, получаем

$$\frac{b+c}{1-bc} = -a,$$

откуда следует требуемое соотношение.

Р 12. а) Прежде всего, перепишем данное выражение в виде

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \alpha) + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha).$$

Так как $-\pi/2 < \alpha + 2\pi < 0$, $\pi/2 < \alpha + 3\pi < \pi$, то

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha + 2\pi, \quad \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha + 3\pi.$$

Собирая всё вместе, получаем $\pi - (\alpha + 3\pi) + \alpha + 2\pi = 0$.

б) При данных условиях $0 < \alpha - \pi < \pi/4$, $0 < 2\alpha - 2\pi < \pi/2$, поэтому вычисляемое выражение равно

$$2 \arccos(-\cos(\alpha - \pi)) + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2\alpha - 2\pi)) = 2(\pi - \alpha + \pi) + 2\alpha - 2\pi = \pi.$$

в) Несложные вычисления показывают, что $355/2 = 57\pi - \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$, т. е. $355/2 - 57\pi \in [-\pi/2; \pi/2]$. Таким образом,

$$\arcsin \left(\sin \frac{355}{2} \right) = \arcsin \left(-\sin \left(\frac{355}{2} - 57\pi \right) \right) = 57\pi - \frac{355}{2}.$$

г) Функция $f(x) = \arcsin(\sin x)$ имеет период 2π , кроме того, при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, очевидно, $f(x) = x$. Значит, если $x \in [-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$, то $x - 2\pi k \in [-\pi/2; \pi/2]$ и $f(x - 2\pi k) = x - 2\pi k$. Но

$$f(x - 2\pi k) = f(x), \quad \text{т. е.} \quad f(x) = x - 2\pi k.$$

Если $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$, то $f(x) = \pi - x$, поэтому при $x \in [\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$ аналогично получаем

$$f(x) = \pi - x + 2\pi k = (2k + 1)\pi - x.$$

$$\text{Р 13. а) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12} - 1\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{12} + 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + 1\right),$$

$$0 < \frac{\pi}{12} + 1 < \pi,$$

поэтому

$$\arcsin \cos\left(\frac{\pi}{12} + 1\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos \cos\left(\frac{\pi}{12} + 1\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{12} + 1\right) = \frac{5\pi}{12} - 1.$$

б) Поскольку

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{21\pi}{10} - 1\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{5} + 1\right) = \frac{2}{\cos(17\pi/10 - 2)},$$

вычисляемое выражение имеет вид

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1}{a}, \quad \text{где } a = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{17\pi}{20} - 2\right).$$

Определим знак этого числа. Поскольку

$$\frac{\pi}{2} < \frac{17\pi}{10} - 2 < \frac{3\pi}{2}, \quad a < 0.$$

Значит, согласно формуле упражнения 7 д), $\operatorname{arctg} a = -\pi + \operatorname{arctg}(1/a)$, поэтому окончательно

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Р 14. Поскольку $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} = \sin(\arccos x)$, доказываемое равенство не что иное, как следствие формулы $\arcsin a + \arccos a = \pi/2$.

Р 15. Область определения находится из системы

$$\begin{cases} -1 \leq \arcsin x \leq 1, \\ -1 \leq \arccos x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin 1 \leq x \leq \sin 1, \\ x \geq \cos 1. \end{cases}$$

Остается сравнить $\sin 1$ и $\cos 1$. И опять же: сравнить нужно 1 и $\pi/4$, поскольку $\sin x = \cos x$ при $x = \pi/4$. И так как $1 > \pi/4$, то и $\sin 1 > \sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) > \cos 1$ (возрастание синуса и убывание косинуса на интервале $0 < x < \pi/2$). Итак: $x \in [\cos 1; \sin 1]$.

Р 16. Поскольку

$$\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \text{а} \quad \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

доказываемое следует из неравенства

$$\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

(убывание косинуса при $0 < x < \pi/2$ обращает знак), равносильного не вызывающему сомнений $3 > \sqrt{5}$.

Р 17. Поскольку $1, 1 \in (0; \pi/2)$, из неравенства $\operatorname{arctg} x < x < \operatorname{tg} x$ (верного на данном интервале) следует, что первое число больше. Доказать данное двойное неравенство можно многими способами. Воспользуемся производной. Рассмотрим две функции:

$f(x) = \arctg x - x$ и $g(x) = \lg x - x$. Их производные

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{и} \quad g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tg^2 x$$

соответственно неположительна и неотрицательна. Значит, первая функция убывающая, а вторая — возрастающая (при $0 < x < \pi/2$). Поэтому $f(x) < f(0)$, $g(x) > g(0)$ (при $0 < x < \pi/2$). Первое неравенство дает $\arctg x - x < 0$, второе — $\lg x - x > 0$.

Р 18. См. рис. 28 а) и б).

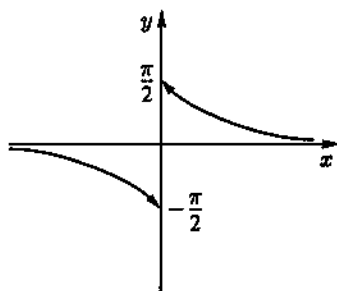


Рис. 28а

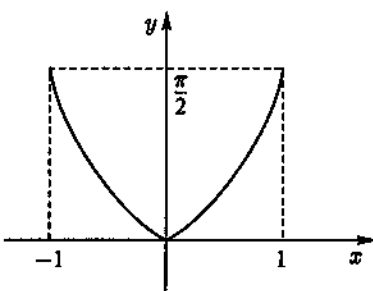


Рис. 28б

Ответы

1. а) $-\sqrt{3}/3$; б) $3\pi/4$; 2. Второе число больше; 3. а) $3/\sqrt{13}$; б) $2/\sqrt{5}$; в) $-968/15117$; 4. Второе число больше; 5. а) $-\pi/4$; б) π ; в) π ; г) $-\pi/4$; 6. 1. 8. $\pi/2$; 12. а) 0; б) π ; в) $57\pi - 355/2$; г) $(2k+1)\pi - x$; 13. а) $5\pi/12 - 1$; б) $-\pi/2$; 15. $[\cos 1; \sin 1]$; 17. Первое число больше.

§ 12. Тригонометрические уравнения

Пускаемся в плавание по необъятному морю. И не побрезгуем для начала разобрать несколько примеров тригонометрических уравнений, называемых *простейшими*, в которых ответ выписывается почти автоматически.

1. Решить уравнения:

а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = \frac{1}{2}$; в) $\tg x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\sin(2x+3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$;

г) $2x+3 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n - 3}{2}$.

Везде здесь $n \in \mathbb{Z}$ — магическое заклинание, которое так приятно (и принято) бездумно повторять от уравнения к уравнению. ►

А вот — тоже почти простейшие, в которых, однако, «надо задуматься».

2. Решить уравнения:

$$\text{а) } \cos x = \frac{\pi}{3}; \quad \text{б) } \cos x^2 = -1; \quad \text{в) } \cos(\cos x) = 1.$$

◀ а) Прежде всего: здесь π — не «угол», а «число», равное примерно 3,1415926. Поэтому $\pi/3 > 1$ и уравнение решений не имеет.

б) И в этом уравнении никакого противоречия не содержится: это не x^2 должен быть отрицателен, а всего лишь его косинус. Таким образом,

$$x^2 = \pi + 2\pi n,$$

причем не только $n \in \mathbb{Z}$, но еще и $n \geq 0$. Отсюда

$$x = \pm \sqrt{\pi(2n+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0.$$

в) Имеем $\cos x = 2\pi n$, но здесь от $n \in \mathbb{Z}$ остается только $n = 0$, поскольку иначе получается значение, модуль которого больше 1. Значит, $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ►

☛ **Ответ:** а) $\emptyset$; б) $\pm \sqrt{\pi(2n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$; в) $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В дальнейшем при записи ответа мы везде предполагаем, что входящие в него буквы n , k , t и т. п. — произвольные целые числа; если же на них наложены какие-то ограничения, то это специально указывается.

3. Решить уравнения:

$$\text{а) } 4 \sin^2 x + \cos x = 1; \quad \text{б) } \cos^2 2x - 3 \sin 2x - 3 = 0.$$

◀ В этих уравнениях еще мало тригонометрии — только основное тригонометрическое тождество нам понадобится. Его использование сводит уравнения к квадратным.

$$\text{а) } 4(1 - \cos^2 x) + \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0.$$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$$4t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, \quad t_2 = -\frac{3}{4}.$$

Отсюда $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \pm \arccos(-3/4) + 2\pi k$.

$$6) 1 - \sin^2 2x - 3 \sin 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x + 3 \sin 2x + 2 = 0.$$

Заменим $\sin 2x = t$; тогда

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1, \quad t_2 = -2.$$

Поскольку уравнение $\sin 2x = t$ имеет решение только если $|t| \leq 1$, имеем

$$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** а) $2\pi n; \pm \arccos(-3/4) + 2\pi k$; б) $-\pi/4 + \pi n$.

4. Решить уравнения:

а) $7 \cos x - 8 \sin x = 0$;

б) $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$;

в) $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 0$.

Эти уравнения называются однородными — по той причине, что они однородны относительно синуса и косинуса, как встречавшиеся нам ранее выражения $ax + by$ или $ax^2 + bxy + cy^2$ были однородны относительно x и y . И решаются они переходом к тангенсу.

◀ а) Поскольку те значения x , для которых $\cos x = 0$, не являются корнями уравнения (если $\cos x = 0$, то $8 \sin x = 0$ и $\sin x = 0$, но одновременно косинус и синус одного угла равняться нулю не могут), мы имеем право разделить уравнение на $\cos x \neq 0$ и получить $\operatorname{tg} x = 7/8$, откуда $x = \operatorname{arctg}(7/8) + \pi n$.

б) И в этом случае можно считать, что $\cos x \neq 0$ и после деления на $\cos^2 x$ (ведь степень уравнения вторая) получить уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, откуда

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -3, \end{cases}$$

что дает нам две серии решений:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k.$$

в) Раскладывая синус двойного угла, приходим к уравнению

$$\sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0,$$

которое, несомненно, является однородным, однако считать, что $\cos x \neq 0$ уже нельзя, но и делить на $\cos^2 x$ нет необходимости, поскольку уравнение раскладывается на множители и без этого. Имеем

$$\cos x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две серии:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** а) $\arctg 7/8 + \pi n$; б) $\pi/4 + \pi n$, $-\arctg 3 + \pi k$; в) $\pi/2 + \pi n$, $\pi/3 + \pi k$.

При попытке следовать какой-то системе в изложении темы «тригонометрические уравнения» нам приходится привязывать уравнения к каким-либо внешним признакам: например, — к последовательному применению тех или иных формул: преобразования суммы (разности) в произведение, понижения степени, двойным или тройным углам и т. д. Отдадим посильную дань этому стилистическому приему.

5. Решить уравнение $2 \cos x + 3 \cos 2x = 1$.

◀ Здесь нам потребуется только простейшая формула косинуса двойного угла

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

Обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $3t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -1$, $t_2 = 2/3$. Тогда

$$x_1 = \pi + 2\pi n, \quad x_2 = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $\pi + 2\pi n$, $\pm \arccos 2/3 + 2\pi k$.

6. Решить уравнение $12 \sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \sin 12x$.

◀ Начнем сворачивать левую часть по формуле синуса двойного угла:

$$6 \sin 2x \cos 2x \cos 8x = \sin 12x \quad \Leftrightarrow \quad 3 \sin 4x \cos 8x = \sin 12x.$$

Теперь преобразуем произведение в разность:

$$\frac{3}{2} \sin 12x - \frac{3}{2} \sin 4x = \sin 12x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 12x = 3 \sin 4x.$$

Теперь можно действовать двояко: использовать формулу синуса тройного угла или переписать уравнение так: $\sin 12x - \sin 4x = 2 \sin 4x$ и преобразовать разность в произведение:

$$2 \sin 4x \cos 8x = 2 \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin 4x = 0, \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = \pi n/4$. (Решения обоих уравнений совпадают.) $\blacktriangleright$

☛ **Ответ:** $\pi n/4$.

7. Решить уравнение $1 + \cos 2x + \cos 4x = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$.

◀ Сворачиваем в произведение каждую часть уравнения отдельно.

$$(1 + \cos 4x) + \cos 2x = 2 \cos^2 2x + \cos 2x;$$

$$(\sin 2x + \sin 6x) + \sin 4x = 2 \sin 4x \cos 2x + \sin 4x;$$

$$\cos 2x(2 \cos 2x + 1) = \sin 4x(2 \cos 2x + 1).$$

Успех полный. Уравнение распадается на два:

$$1) \quad 2 \cos 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

$$2) \quad \cos 2x = \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 2 \sin 2x = 1. \end{cases}$$

Решая эту совокупность, находим еще две серии:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad x = \frac{(-1)^m \pi}{12} + \frac{\pi m}{2}.$$



✎ **Ответ:** $\pm \pi/3 + \pi n$, $x = \pi/4 + \pi k/2$, $(-1)^m \pi/12 + \pi m/2$.

8. Решить уравнение

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = \sin 5x.$$

◀ Здесь сворачивание левой части малоэффективно. Вспомним, однако, что подобные выражения попадались нам при подсчете значений в § 10; мы помним, что действенным приемом было домножение на $\sin x$. Однако надо иметь в виду, что при таком преобразовании можно приобрести лишние корни вида $x = \pi n$.

После домножения и преобразования произведений в сумму имеем:

$$\begin{aligned} & \sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x + \\ & + \sin 9x - \sin 7x + \sin 11x - \sin 9x = 2 \sin x \sin 5x, \end{aligned}$$

или

$$\sin 11x - \sin x = 2 \sin x \sin 5x, \quad \text{т. е.} \quad 2 \sin 5x \cos 6x = 2 \sin x \sin 5x.$$

Отсюда 1) $\sin 5x = 0$; 2) $\sin x = \cos 6x$.

В первом случае получаем $x = \pi k/5$, где $k \neq 5t$.

Во втором случае имеем

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0 \Rightarrow 2\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi m}{7}, \\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi l}{5}. \end{cases}$$

☛ **Ответ:** $\pi k/5$, $k \neq 5t$; $\pi/14 + 2\pi m/7$; $3\pi/10 + 2\pi l/5$.

9. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos^2 5x + \cos 6x = 1$.

◀ Применяя формулу понижения степени для косинуса, имеем

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + \cos 6x = 1$$

$$\text{или } \cos 2x + \cos 10x + 2 \cos 6x = 0.$$

Теперь складываем косинусы:

$$2 \cos 6x \cos 4x + 2 \cos 6x = 0, \quad \cos 6x(\cos 4x + 1) = 0,$$

отсюда

$$1) \cos 6x = 0, \quad 6x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}.$$

$$2) \cos 4x + 1 = 0, \quad \cos 4x = -1, \quad 4x = \pi + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $\pi/12 + \pi n/6$, $\pi/4 + \pi k/2$.

10. Решить уравнение

$$\sin^2 2x - 2 \cos 2x = 1 + 4 \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

◀ И здесь необходимость в понижении степени достаточно очевидна. Однако надо действовать избирательно и не понижать всё, что понижается. Имеем:

$$1 - \cos^2 2x - 2 \cos 2x = 1 + 4 \left(\frac{1 - \cos(2x - \pi/2)}{2} \right)^2$$

или

$$-\cos^2 2x - 2 \cos 2x = (1 - \sin 2x)^2,$$

откуда

$$\sin 2x - \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x.$$

Мы приходим к совокупности: 1) $\cos x = 0$; 2) $\sin x = \cos x$, которую решаем. ►

☞ **Ответ:** $\pi/2 + \pi n, \pi/4 + \pi k$.

11. Решить уравнение

$$\cos x \sin^3 x - \sin x \cos^3 x = \frac{\cos 8x}{14}.$$

◀ Здесь делу понижения степени и дальнейшего упрощения служат формулы двойных углов. Имеем:

$$\begin{aligned} -14 \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) &= \cos 8x, \\ -7(2 \sin x \cos x) \cos 2x &= \cos 8x, \quad -7 \sin 2x \cos 2x = \cos 8x, \\ -7 \sin 4x &= 2 \cos 8x \Leftrightarrow -7 \sin 4x = 2(1 - 2 \sin^2 4x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \sin^2 4x - 7 \sin 4x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\sin 4x = -1/4$ (второй корень: 2 не подходит).

$$x = \frac{(-1)^{n+1}}{4} \arcsin \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{4}.$$

☞ **Ответ:** $(-1)^{n+1} \arcsin (1/4)/4 + \pi n/4$.

12. Решить уравнение

$$\cos x = \cos^2 \frac{3x}{4}.$$

◀ Понижая степень, получаем

$$2 \cos x = 1 + \cos \frac{3x}{2}.$$

Заметим, что если положить $x/2 = y$, то уравнение примет вид

$$2 \cos 2y = 1 + \cos 3y.$$

Применяя теперь формулы косинуса двойного и тройного углов, имеем

$$2(2 \cos^2 y - 1) = 1 + 4 \cos^3 y - 3 \cos y$$

или, обозначая $\cos y = t$, $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0$.

Это кубическое уравнение мы решаем разложением на множители:

$$4t^2(t-1) - 3(t-1) = 0 \Rightarrow (4t^2 - 3)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $t = \cos(x/2)$, получаем окончательно

$$x = 4\pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $4\pi n, \pm \pi/3 + 2\pi k$.

Вспомогательный угол необходимо вовлечь в процесс как можно раньше: мало что в тригонометрии делается без него.

13. Решить уравнение $2 \sin x + 3 \cos x = 1$.

◀ $2 \sin x + 3 \cos x = \sqrt{13} \sin(x + \alpha)$, где $\alpha = \arctg(3/2)$, поэтому

$$\sin(x + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

откуда

$$x = -\arctg \frac{3}{2} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{13}} + \pi n.$$

Ответ: $x = -\arctg 3/2 + (-1)^n \arcsin(1/\sqrt{13}) + \pi n$.

14. Решить уравнение

$$\sin 2x(2\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x) + \sqrt{8} = \cos 2x(2\sqrt{3} \cos x - 2 \sin x).$$

◀ Приведем уравнение к виду

$$2(\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x) + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3}(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x),$$

$$2 \sin 3x + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cos 3x, \quad \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = -\sqrt{2},$$

$$2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{2}.$$

Тогда

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$$

или

$$x = \frac{\pi}{9} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $x = \pi/9 + (-1)^{n+1} \pi/12 + \pi n/3$.

15. Решить уравнение $14 \sin 3x + 3 \cos 3x = 13 \sin 2x + 6 \cos 2x$.

◀ Поскольку $14 \sin 3x + 3 \cos 3x = \sqrt{205} \sin(3x + \alpha)$, где $\alpha = \operatorname{arctg}(3/14)$,

$$13 \sin 2x + 6 \cos 2x = \sqrt{205} \sin(2x + \beta),$$

где $\beta = \operatorname{arctg}(6/13)$, уравнение преобразуется к виду $\sin(3x + \alpha) = \sin(2x + \beta)$, откуда

$$2 \sin\left(\frac{x + \alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{5x + \alpha + \beta}{2}\right) = 0.$$

Окончательный ответ:

$$x_1 = \operatorname{arctg} \frac{6}{13} - \operatorname{arctg} \frac{3}{14} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{5} - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{3}{14} - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{6}{13} + \frac{2\pi k}{5}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x_1 = \operatorname{arctg}(6/13) - \operatorname{arctg}(3/14) + 2\pi n$,
 $x_2 = \pi/5 - (1/5) \operatorname{arctg}(3/14) - (1/5) \operatorname{arctg}(6/13) + 2\pi k/5$.

Тема вспомогательного угла получает любопытное развитие в следующем примере.

16. Решить уравнение

$$2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos x \cos 24x + 2 \cos 5x - 6.$$

◀ Перепишем уравнение так:

$$2(\sqrt{3} \sin 5x - \cos 5x) + 6 = \sqrt{3} \sin x + \cos 24x \cos x,$$

$$4 \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) + 6 = \sqrt{3 + \cos^2 24x} \sin(x + \alpha), \quad (*)$$

где вспомогательный угол α (зависящий от x) определяется условием

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos 24x}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку

$$4 \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) + 6 \geq 2, \quad \sqrt{3 + \cos^2 24x} \cos(x - \alpha) \leq 2,$$

(из формулы $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$, где $\operatorname{tg} \alpha = a/b$ следует оценка: $|a \cos x + b \sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$) равенство $(*)$ имеет место только в случае равенства 2 обеих частей. Таким образом, должны выполняться следующие

условия:

$$\begin{cases} \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -1, \\ \cos^2 24x = 1, \\ \sin(x + \alpha) = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение дает

$$x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

тогда $24x = (8\pi/5)(6n - 1)$. Приравняв это выражение к πk (как требует второе уравнение системы), получим после сокращения на π уравнение в целых числах

$$8(6n - 1) = 5k \quad \text{или} \quad 48n - 5k = 8.$$

Его частное решение подбирается без труда: $n_0 = 1$, $k_0 = 8$; тогда $n = 1 + 5t$, $t \in \mathbb{Z}$ и окончательно

$$x = \frac{8\pi}{24 \cdot 5}(6 + 30t - 1) = \frac{\pi}{3} + 2\pi t.$$

В этом случае $\cos 24x = 1$ и $\operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{3}$, т.е. можно положить $\alpha = \pi/6$. Тогда $x + \alpha = \pi/2 + 2\pi t$ и третье уравнение системы удовлетворяется. ►

Ответ: $\pi/3 + 2\pi n$.

Замена переменной по формуле $y = \operatorname{tg}(x/2)$ называется *универсальной тригонометрической подстановкой*, и ее всегда можно использовать для решения уравнений вида $f(\sin x, \cos x) = 0$. Однако следует иметь в виду, что она, во-первых, может приводить к потере корня $x = \pi + 2\pi n$ (ибо формулы

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

при этих значениях неприменимы), а во-вторых, почти всегда приводит к уравнению высокой степени.

17. Решить уравнение

$$2 + \sin x = \frac{3 + 3 \cos x}{\sin x}.$$

◀ Поскольку уравнение содержит функции только одного аргумента — тангенс половинного угла работает. Заметим, что $x = \pi + 2\pi n$ не только не является решением уравнения, но и вообще не входит в ОДЗ, так что при переходе к тангенсу потери корня не произойдет. Имеем:

$$2 + \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{6 \cos^2(x/2)}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}$$

или, заменяя

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = y, \quad 2 + \frac{2y}{1+y^2} = \frac{3}{y}.$$

После упрощений получаем кубическое уравнение

$$2y^3 - y^2 + 2y - 3 = 0,$$

которое, к счастью, решается благодаря наличию целого корня $y = 1$ (который оказывается вообще единственным). Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

►

☛ **Ответ:** $\pi/2 + 2\pi n$.

18. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

◀ Заменяя $\operatorname{tg}(x/2) = y$, имеем

$$\frac{2y}{1-y^2} = \left(\frac{1-y}{1+y} \right)^3$$

и после преобразований получаем $y^4 - 6y^3 + 2y^2 - 6y + 1 = 0$ — симметричное уравнение 4 степени. Вспоминаем, как они решаются.

Сперва группировка

$$\Rightarrow (y^4 + 1) - 6(y^3 + y) + 2y^2 = 0;$$

потом — деление на

$$y^2 \neq 0 \Rightarrow \left(y^2 + \frac{1}{y^2} \right) - 6 \left(y + \frac{1}{y} \right) + 2 = 0;$$

наконец замена

$$y + \frac{1}{y} = t \Rightarrow t^2 - 6t = 0.$$

Отсюда $t = 6$ (значение $t = 0$ не годится, так как $|y + 1/y| \geq 2$). Уравнение

$$y + \frac{1}{y} = 6$$

имеет корни $y = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x = 2 \operatorname{arctg}(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2\pi n.$$

►

☛ **Ответ:** $2 \operatorname{arctg}(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2\pi n$.

19. Решить уравнение

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)(1 + \sin x) = 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x.$$

◀ Здесь переход к $\operatorname{tg}(x/2)$ тоже кажется естественным, однако ведет к длительным преобразованиям (чисто алгебраического характера). Попробуем сделать так:

$$\begin{aligned} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)(1 + \sin x - 1) &= -\cos x, \\ \frac{(\cos(x/2) - \sin(x/2))2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos(x/2)} &= -\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right), \\ \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)2 \sin \frac{x}{2} &= -\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0, \\ 2 \sin \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_2 = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi k. \quad \blacktriangleright$$

✎ **Ответ:** $\pi/2 + 2\pi n, -2 \operatorname{arctg} 1/3 + 2\pi k$.

Не стоит, однако, сбрасывать со счета и другие замены — не только «универсальную подстановку». Прежде всего, еще раз вспомним однородные уравнения.

20. Решить уравнение $4 \sin^3 x = \sin x + \cos x$.

◀ Чтобы использовать однородность, домножим правую часть на равное 1 выражение $\sin^2 x + \cos^2 x$. Получим

$$\begin{aligned} 4 \sin^3 x &= \sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x + \cos^3 x \\ \text{или } 3 \sin^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x &= 0. \end{aligned}$$

После деления на $\cos^3 x \neq 0$ и замены $\operatorname{tg} x = y$ приходим к уравнению

$$3y^3 - y^2 - y - 1 = 0,$$

имеющему единственный корень $y = 1$. Тогда $x = \pi/4 + \pi n$. $\blacktriangleright$

✎ **Ответ:** $\pi/4 + \pi n$.

21. Решить уравнение $\sin x + 2 \sin 2x = 1 + \cos x$.

◀ Мы помним, что $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$ или $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$; поэтому, заменив $\sin x - \cos x = y$, получим уравнение

$$y + 2(1 - y^2) = 1 \quad \text{или} \quad 2y^2 - y - 1 = 0,$$

откуда $y_1 = -1/2$, $y_2 = 1$.

В первом случае

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n.$$

Соответственно во втором,

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n. \quad \blacktriangleright$$

🔍 **Ответ:** $\pi/2 + 2\pi n$, $\pi + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi m$.

Идея этого примера получает развитие в следующем.

22. Решить уравнение

$$2 \cos x - \sin 2x = 3 \sin x - \frac{5}{6} \sin^2 x.$$

◀ Переписываем уравнение так:

$$2 \cos x - 3 \sin x = \frac{12 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x}{6}$$

и обозначаем $2 \cos x - 3 \sin x = y$. Тогда

$$y^2 = 4 \cos^2 x - 12 \sin x \cos x + 9 \sin^2 x = 4 - 12 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x.$$

Уравнение принимает вид

$$y = \frac{4 - y^2}{6}.$$

Его корни: $y = -3 \pm \sqrt{13}$.

Так как $|a \cos x + b \sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$$|2 \cos x - 3 \sin x| \leq \sqrt{13}$$

и подходит только $y = -3 + \sqrt{13}$.

Итак,

$$2 \cos x - 3 \sin x = \sqrt{13} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{13} \cos(x + \phi) = \sqrt{13} - 3, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}.$$

И окончательный ответ:

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} \pm \arccos \frac{\sqrt{13} - 3}{3} + 2\pi n. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} (3/2) \pm \arccos ((\sqrt{13} - 3)/3) + 2\pi n$.

23. Решить уравнение

$$\sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10} \right) = 3 \sin \left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \right).$$

◀ А здесь замену подсказывает желание упростить аргументы входящих в уравнение функций. Пусть

$$\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = y,$$

тогда

$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{10} - y \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{9\pi}{10} - 3y, \quad \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10} = \pi - 3y.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - 3y) &= 3 \sin y \Rightarrow \sin 3y = 3 \sin y \Rightarrow 3 \sin y - 4 \sin^3 y = 3 \sin y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin y = 0, \quad y = \pi n, \quad x = \frac{3\pi}{5} - y = \frac{3\pi}{5} - \pi n. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Ответ: $3\pi/5 + \pi n$.

Ну и, разумеется, тригонометрические уравнения поставляют благодатный материал на тему «аватары квадратного уравнения» (в дополнение к очевидностям примера 3).

24. Решить уравнение $\cos^2 5x + \cos^2 x \cdot (1 - \sin^2 7x + \sin^4 7x) = 0$.

◀ Уравнение выглядит довольно угрюмо, однако трудности сразу исчезают, если положить $\sin^2 7x = t$ и решать уравнение как квадратное относительно этой переменной.

Имеем: $\cos^2 x \cdot t^2 - t \cos^2 x + \cos^2 5x + \cos^2 x = 0$. Дискриминант

$$\begin{aligned} D &= \cos^4 x - 4 \cos^2 x (\cos^2 5x + \cos^2 x) = \\ &= \cos^2 x (\cos^2 x - 4 \cos^2 5x - 4 \cos^2 x) = -\cos^2 x (4 \cos^2 5x + 3 \cos^2 x) \end{aligned}$$

неотрицателен только в двух случаях: 1) $\cos^2 x = 0$; 2) $\cos^2 5x = \cos^2 x = 0$.

В первом случае уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 5x = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = \pi/2 + \pi n$.

Второй случай не добавляет ничего нового. ►

Ответ: $\pi/2 + \pi n$.

25. Решить уравнение $x^2 - 2x \sin x - 2 \cos x + 2 = 0$.

◀ Выделим полный квадрат:

$$(x - \sin x)^2 - \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sin x)^2 + (\cos x - 1)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x - \sin x = 0, \\ \cos x - 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = 2\pi n$. Но равенство $\sin x = x$ не может выполняться при $|x| > 1$, поэтому $n = 0$ и $x = 0$. ►

Ответ: 0.

При решении тригонометрических уравнений надо готовить себя к тому, что придется выполнять сколь угодно длинные цепочки преобразований. Это одна из особенностей темы, в которой разложение на множители остается наиболее общим методом. Однако он почти всегда требует большей или меньшей изобретательности: надо решить, что с чем группировать, какие формулы применять и т. д.

26. Решить уравнение

$$2(\sin 3x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin 2x + \cos 2x)^2.$$

◀ Раскрываем скобки: $2 \sin 3x + 2 \cos x = 2 + \sin 2x + \sin 4x$ и переписываем в виде

$$(\sin 3x - \sin 2x) + (\sin 3x - \sin 4x) + 2(\cos x - 1) = 0.$$

Образовывая произведения, получаем

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{7x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2} = 0.$$

После отделения условия $\sin(x/2) = 0$, дающего серию $x = 2\pi n$, приходим к уравнению

$$\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Снова переходя к произведению, имеем

$$2 \sin 3x \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}.$$

☛ **Ответ:** $2\pi n, \pi/6 + 2\pi k/3$.

Длинными и сверхдлинными уравнениями сыздавна славился физтех. Вот пара экспонатов.

27. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2} \sin x \sin(x + (\pi/4))}.$$

◀ Сворачиваем в произведения числитель и знаменатель левой дроби, объединяя слагаемые через один; однако сворачиваем не до конца:

$$\frac{2 \sin x \cos 3x + 2 \sin x \cos 2x}{2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 3x \cos x} = \frac{2 \sin x (\cos 2x + \cos 3x)}{2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x)} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Пусть пока $\cos 2x \geq 0$, тогда, поскольку

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x + \cos x,$$

уравнение после избавления от знаменателя принимает вид

$$\sin^2 x (\sin x + \cos x) = \cos x \cos 2x$$

$$\text{или } \sin^2 x (\sin x + \cos x) = \cos x (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x),$$

откуда $\sin^2 x = \cos x (\cos x - \sin x)$, так как $\sin x + \cos x \neq 0$ (знаменатель дроби в правой части исходного равенства).

Тогда $\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ — однородное уравнение, решаемое переходом к тангенсу. Получаем

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

второе значение

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

не подходит как не удовлетворяющее условию $\cos 2x \geq 0$; проверяем при помощи формулы

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Значит,

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi n.$$

Если $\cos 2x < 0$, имеем уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$, которое решений не имеет. ►

🔍 **Ответ:** $\operatorname{arctg} ((\sqrt{5} - 1)/2) + \pi n$.

28. Решить уравнение

$$\frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos 3x} - \frac{\sin (x/2) \sin (5x/2)}{\cos 3x \cos 2x} = \frac{2 \sin (x/2) \sin (3x/2)}{\cos x \cos 2x} - \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2 \cos 2x}.$$

◀ Имеем:

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{2 \cos x \cos 3x} - \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2 \cos 3x \cos 2x} = \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos x \cos 2x} - \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2 \cos 2x}.$$

Почленное деление дает

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos 3x} + \frac{1}{\cos 2x} \right) = \frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2 \cos 2x},$$

откуда после упрощений

$$\frac{1}{2 \cos x} + \frac{\sqrt{2}}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2\sqrt{2} \cos x - 1 = 0,$$

$$x = \pm \arccos \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\pi n. \quad \blacktriangleright$$

🔍 **Ответ:** $\pm \arccos (1 - \sqrt{2}/2) + 2\pi n$.

29. Решить уравнение $\sin 2x + \sin 4x = \sin x + 2 \cos x \sin 4x$.

◀ Применим формулу синуса двойного угла к $\sin 2x$ (а $\sin 4x$ оставим без изменения):

$$2 \sin x \cos x - \sin x = \sin 4x(2 \cos x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = \sin 4x(2 \cos x - 1).$$

$$1) 2 \cos x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

$$2) \sin x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 4x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0, \\ \cos \frac{5x}{2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{3}, \quad x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $\pm \pi/3 + 2\pi n, 2\pi k/3, \pi/5 + 2\pi m/5$.

30. Решить уравнение $\sin 2x + \sin 4x = 1$.

◀ Это уравнение кажется сокращением предыдущего, однако простота опасна, хотя начало кажется вполне благоприятным:

$$\sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x = 1, \quad 2 \sin 2x \cos 2x = 1 - \sin 2x,$$

$$2 \sin 2x (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x) = (\cos x - \sin x)^2.$$

Таким образом,

$$1) \cos x - \sin x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

$$2) 2 \sin 2x (\cos x + \sin x) = \cos x - \sin x.$$

$$2 \sin 2x = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}, \quad \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Заменяя $t = \operatorname{tg} x$, приходим к уравнению

$$t^3 + 3t^2 + 5t - 1 = 0.$$

И всё. Да, при решении тригонометрических уравнений уравнения кубические возникают до головокружения часто. Так и хочется узнать о них побольше, но чего мы еще не знаем?.. И за неимением иного способа, вынуждены произнести магическое заклинание: «Komm hier, доктор Кардано!»

Заменив, $t + 1 = y$, получим уравнение $y^3 + 2y - 4 = 0$. Ищем его решение в виде $y = u + v$. Тогда

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 2(u+v) - 4 = 0 \quad \text{или} \quad u^3 + v^3 + (3uv + 2)(u+v) - 4 = 0.$$

Для нахождения u и v составляем систему

$$\begin{cases} 3uv + 2 = 0, \\ u^3 + v^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Ее решения

$$u^3 = 2 + 2\sqrt{\frac{29}{27}} \quad \text{и} \quad v^3 = 2 - 2\sqrt{\frac{29}{27}}$$

позволяют постепенно добраться и до ответа к исходному уравнению:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{\frac{29}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{\frac{29}{27}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x &= \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{\frac{29}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{\frac{29}{27}}} - 1, \\ x &= \operatorname{arctg} \left(\sqrt[3]{2 + 2\sqrt{\frac{29}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{\frac{29}{27}}} - 1 \right) + \pi k. \end{aligned}$$

Однако и добравшись до конца, всё равно остаешься с ощущением, что тебя обманули. Вроде бы и метод «работает», и ответ получен, но... Что-то не так с кубическими уравнениями!.. ►

❖ **Ответ:** $x = \pi/4 + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} \left(\sqrt[3]{2 + 2\sqrt{\frac{29}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{\frac{29}{27}}} - 1 \right) + \pi k$.

Ну, кажется, нет больше ни одной формулы, на которую мы не разобрали бы примера. Остается отметить, что бывают уравнения, в которых надо уметь не только преобразовывать тригонометрические выражения, но и анализировать то, что получилось.

Следующее уравнение относится к категории «Бди!»

31. Решить уравнение

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - \sin x - \cos x} + \sqrt{\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)} = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}.$$

◀ Конечно, поначалу каждый отметит: «Этот $\sqrt{x}$ здесь неспроста», но потом о нем как-то забывается... Зная, что

$$1 - \sin x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2,$$

а

$$\cos x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right),$$

имеем:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \left(-2 \sin \frac{x}{2} \right)} + \sqrt{\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)} = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}.$$

Остановимся и заметим, что подкоренные выражения (под вторым и третьим радикалом) могут сосуществовать только в двух случаях: 1) $\sin(x/2) = 0$; 2) $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0$ (и тогда $\operatorname{ctg}(x/4) = 0$). Иначе они имеют противоположные знаки, и один из радикалов не определен.

Рассмотрим по отдельности каждый случай.

Если $\sin(x/2) = 0$, т. е. $x = 2\pi n$, то из условия $\operatorname{ctg}(x/4) = 0$ получаем $x = 2\pi + 4\pi k$ — эта серия и будет решением. Но: не забудем про $\sqrt{x}$. Его присутствие означает, что мы должны записать ответ так:

$$x = 2\pi + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0.$$

Пусть теперь

$$\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0;$$

тогда $x = \pi/2 + 2\pi n$. Равенство $\operatorname{ctg}(x/4) = 0$ снова дает нам $x = 2\pi + 4\pi k$, однако в этом случае полученные серии не пересекаются, и новых решений не получается. ►

☛ **Ответ:** $2\pi + 4\pi k, \quad k \geq 0$.

Обманчива простота и следующего уравнения:

32. Решить уравнение $\sin 2x + \cos 3x = 2$.

◀ Поскольку, как говорится, и ребенку ясно, что уравнение удовлетворяется только в случае

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \cos 3x = 1, \end{cases}$$

немедленно выписываем:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \frac{2\pi k}{3}. \end{cases}$$

Но что дальше? Ответ ли это? Никоним образом. Чтобы получить ответ, необходимо выяснить, *существуют ли* такие целые числа n и k , что

$$\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{2\pi k}{3} \quad \text{или} \quad 3 + 12n = 8k.$$

Иными словами — надо решить *уравнение в целых числах*. Хотя в примере 16 мы и вспомнили, как это делается по всей форме, здесь сразу видно, что требуемых n и k быть не может, поскольку левая часть — нечетное число, а правая — четное. Значит, уравнение решений не имеет. ►

☛ **Ответ:** $\emptyset$.

33. Решить уравнение $\cos 10x - \cos 7x = 2$.

◀ Система

$$\begin{cases} \cos 10x = 1, \\ \cos 7x = -1, \end{cases}$$

дает две серии

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{5}, \\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}. \end{cases}$$

Приравнявая

$$\frac{\pi n}{5} = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$$

приходим к уравнению $7n - 10k = 5$. Частное решение $n_0 = 5$, $k_0 = 3$; тогда

$$n = 5 + 10t \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi n}{5} = \pi + 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleright$$

🔑 **Ответ:** $\pi + 2\pi n$.

Тригонометрические уравнения иногда бывают «необычными», т. е. выглядят как-то «не так».

34. Решить уравнение

$$\sin x + \sin \frac{1}{\pi} = \sin \left(x + \frac{1}{\pi} \right).$$

◀ Нет, бояться нечего; обозначим $a = 1/\pi$ и, переписав уравнение в виде

$$\sin x + \sin a = \sin(x + a),$$

проделаем обычные преобразования:

$$2 \sin \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2} = 2 \sin \frac{x+a}{2} \cos \frac{x+a}{2},$$

откуда

$$1) \sin \frac{x+a}{2} = 0 \Rightarrow x+a = 2\pi n, \quad x = 2\pi n - \frac{1}{\pi};$$

$$2) \cos \frac{x-a}{2} = \cos \frac{x+a}{2} \Rightarrow \frac{x-a}{2} = \pm \frac{x+a}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = 2\pi k. \quad \blacktriangleright$$

🔑 **Ответ:** $2\pi n - 1/\pi$; $2\pi k$.

И другой пример:

35. Решить уравнение $\cos x - \cos \sqrt{x} = 0$.

◀ Ничего не боимся:

$$\cos x - \cos \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{x - \sqrt{x}}{2} = 0,$$

отсюда вытекают два однотипных следствия: 1) $x + \sqrt{x} = 2\pi n$; 2) $x - \sqrt{x} = 2\pi k$.

Решая как квадратные каждое из этих уравнений, находим:

$$1) \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\pi n}}{2},$$

где целое число n должно удовлетворять условию $n \geq 0$ и кроме того $x \geq 0$.
В результате

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi n}}{2}.$$

$$2) \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\pi k}}{2}, \ k \geq 0.$$

Поскольку и тут $x \geq 0$, остается только

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\pi k}}{2}.$$

☛ **Ответ:** $(-1 + \sqrt{1 + 8\pi n})/2, (1 + \sqrt{1 + 8\pi k})/2, n, k \geq 0$.

И еще.

36. Решить уравнение $\cos(\pi \cos x) = \sin(\pi \sin x)$.

◀ Перепишем уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cos x\right) - \sin(\pi \sin x) = 0.$$

Преобразовывая разность синусов в произведение, приходим к двум уравнениям:

$$1) \ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x)\right) = 0;$$

$$2) \ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}(\cos x - \sin x)\right) = 0.$$

Тогда:

$$1) \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x) = \pi n, \quad \cos x + \sin x = \frac{1}{2} - 2n, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-4n}{2\sqrt{2}}.$$

Ясно, что n должно удовлетворять условию

$$\left| \frac{1-4n}{2\sqrt{2}} \right| \leq 1,$$

т. е. $n = 0$. Тогда

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k.$$

$$2) \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}(\cos x - \sin x) = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Аналогично предыдущему получаем

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi m. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $x = \pi/4 \pm \arccos(1/(2\sqrt{2})) + 2\pi k$,

$x = -\pi/4 \pm (\pi - \arccos(1/(2\sqrt{2}))) + 2\pi m$.

А бывает и так.

37. Решить уравнение $\cos x - 3 \sin x = 5 \cos(x + 2 \operatorname{arctg} 3)$

◀ Поскольку $\cos(x + 2 \operatorname{arctg} 3) = \cos x \cos 2 \operatorname{arctg} 3 - \sin x \sin 2 \operatorname{arctg} 3$, вычисляя предварительно

$$\cos 2 \operatorname{arctg} 3 = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}, \quad \sin 2 \operatorname{arctg} 3 = \frac{6}{1+9} = \frac{3}{5},$$

получаем

$$\cos x - 3 \sin x = -4 \cos x - 3 \sin x \quad \text{или} \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\pi/2 + \pi n$.

Особая тема — *отбор корней* при решении тригонометрических уравнений, которая уже существенно затронута в примерах 35 и 36. Вот несколько характерных уравнений, трактующих ту же тему.

38. Решить уравнение $2 \sin x = \sqrt{4 + \cos 3x}$.

◀ Как мы знаем, данное уравнение равносильно уравнению $4 \sin^2 x = 4 + \cos 3x$ при дополнительном условии $\sin x \geq 0$. Имеем:

$$4(1 - \cos^2 x) = 4 + 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 3 \cos x = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos x = 0$, что с учетом ограничения $\sin x \geq 0$ дает $x = \pi/2 + 2\pi n$.

2) $4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$, откуда $\cos x = 1/2$ (второй корень $-3/2$ не годится). Тогда $x = \pi/3 + 2\pi k$. ►

☞ **Ответ:** $\pi/2 + 2\pi n, \pi/3 + 2\pi k$.

39. Решить уравнение $\sqrt{-2 \sin 2x - 4 \cos 2x} + 2 \sin x = 0$.

◀ Решим прежде всего уравнение $-2 \sin 2x - 4 \cos 2x = 4 \sin^2 x$, которое вездесущий вспомогательный угол легко преобразует к виду

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для удобства анализа выпишем отдельно каждую серию:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Условие $\sin x \leq 0$ требует оставить в ответе только корни, расположенные на нижней полуокружности, таким образом,

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k. \quad \blacktriangleright$$

☞ **Ответ:** $-\pi/2 + 2\pi n, -\pi/4 + 2\pi k$.

40. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x + \sqrt{\sin x} = 1 - \cos x$.

◀ Имеем:

$$1 - \cos^2 x + \sin x + \sqrt{\sin x} = 1 - \cos x \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{\sin x} = \cos^2 x - \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = \cos x - \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = -\cos x + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности дает $x = 2\pi n$.

Второе уравнение $\sqrt{\sin x} = -\cos x$ заменяется равносильной системой

$$\begin{cases} \sin x = \cos^2 x, \\ \cos x \leq 0, \end{cases}$$

уравнение которой принимает вид $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; отсюда

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Условию $\cos x \leq 0$ отвечает серия

$$x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi k.$$

● **Ответ:** $2\pi n, \pi - \arcsin(\sqrt{5} - 1)/2 + 2\pi k$.

41. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \operatorname{tg} x + \sin^2 x} - \sqrt{\sin^2 x - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5} - \operatorname{tg} x}.$$

◀ Уравнение имеет характерный вид $\sqrt{u} - \sqrt{v} = \sqrt{u - v}$, а потому приводится к такому:

$$\frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} = \sqrt{u - v}.$$

Отсюда вытекают две возможности:

а) $u - v = 0$; б) $\sqrt{u - v} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$, что в сочетании с $\sqrt{u} - \sqrt{v} = \sqrt{u - v}$ дает $v = 0$.

Если $u - v = 0$, то $\operatorname{tg} x = 9/5$. Теперь осторожно: слишком легко добыт этот корень, чтобы можно было просто написать $x = \operatorname{arctg}(9/5) + \pi n$ и пойти дальше. Действительно, если $\operatorname{tg} x = 9/5$, то

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{25}{106} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{81}{106}.$$

Но

$$\frac{81}{106} - \frac{4}{5} = \frac{405 - 424}{530} < 0,$$

т. е. $\sin^2 x < 4/5$ и под вторым радикалом оказывается отрицательное число. Значит, найденное решение надо отбросить.

Если же $v = 0$, т. е.

$$\sin^2 x = \frac{4}{5}, \quad \text{то} \quad \cos^2 x = \frac{1}{5} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}^2 x = 4,$$

т. е. $\operatorname{tg} x = \pm 2$. Значение $\operatorname{tg} x = 2$, очевидно, не годится, так как отрицательным оказывается выражение под третьим радикалом. Значит,

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \text{и} \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n.$$

● **Ответ:** $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

42. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} = 0.$$

◀ Домножив уравнение на $\sin x \sin 4x$, мы получим

$$\sin 4x + 2 \sin x \cos 2x + \sin x = 0$$

(честное приведение к общему знаменателю, учитывающему, что первые два входят в третий, даст не слишком удобное уравнение $4 \cos x \cos 2x + 2 \cos 2x + 1 = 0$). Тогда, преобразовывая произведение $2 \sin x \cos 2x = \sin 3x - \sin x$, имеем

$$\sin 4x + \sin 3x = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi n}{7}$$

($\cos x/2$ нулю равняться не может, так как в знаменателе исходного уравнения стоит $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$). Дальше достаточно написать $n \in \mathbb{Z}$ и всё? Нет, конечно; надо побеспокоиться о том, чтобы при найденных значениях x ни один из знаменателей не обратился в 0. Мы достигнем желаемого, если потребуем выполнения неравенства $x \neq \pi m/4$ (т. е. $\sin 4x \neq 0$). Для этого надо исключить из ответа те n , для которых $2\pi n/7 = \pi m/4$ при каких-либо $m \in \mathbb{Z}$. Это равенство приводится к виду $8n = 7m$; ясно, что нужные n не должны делиться на 7, т. е. окончательно $x = 2\pi n/7$, $n \neq 7k$. ▶

☛ **Ответ:** $2\pi n/7$, $n \neq 7k$.

43. Найти сумму корней уравнения $24 \cos 5x + 7 \sin 5x = 25$, принадлежащих отрезку $[-7\pi/4; 5\pi]$.

◀ При помощи вспомогательного угла $\alpha = \arctg(7/24)$ уравнение приводит к виду $\cos(5x - \alpha) = 1$, откуда

$$x = \frac{2\pi n}{5} + \frac{1}{5} \arctg \frac{7}{24}.$$

Для того чтобы отобрать нужные корни, найдем целочисленные решения двойного неравенства

$$-\frac{7\pi}{4} \leq \frac{2\pi n}{5} + \frac{1}{5} \arctg \frac{7}{24} \leq 5\pi$$

или, после упрощений,

$$-\frac{35}{4} - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{7}{24} \leq 2n \leq 25 - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{7}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\frac{3}{8} - \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{7}{24} \leq n \leq 12\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{7}{24}.$$

Относительно угла $\alpha = \operatorname{arctg}(7/24)$ нам достаточно того, что $\alpha < \operatorname{arctg} 1 < 1$. Тогда n может принимать все целые значения из отрезка $[-4; 12]$.

Остается сложить числа вида

$$x = \frac{2\pi n}{5} + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{7}{24}$$

при $n = -4, -3, \dots, 11, 12$.

Это — сумма 17 членов арифметической прогрессии с первым членом

$$a_1 = -\frac{8\pi}{5} + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{7}{24}$$

и последним

$$a_{17} = \frac{24\pi}{5} + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{7}{24}.$$

Она находится по формуле

$$s_{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2} \cdot 17.$$

Таким образом, искомая сумма равна

$$\frac{17}{5} \left(8\pi + \operatorname{arctg} \frac{7}{24} \right).$$



Ответ: $(17/5)(8\pi + \operatorname{arctg}(7/24))$.

44. Найти корни уравнения $\cos 3x - \sin 6x - \cos 7x - 2 \sin 2x = 0$, удовлетворяющие условию $x \in [0; \pi]$.

◀ В этом примере условие $x \in [0; \pi]$ — не просто дополнительное задание, а обстоятельство, благодаря которому решение вообще оказывается возможным. Действительно:

$$\begin{aligned} \cos 3x - \cos 7x &= 2 \sin 2x + \sin 6x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin 5x \sin 2x &= 2 \sin 2x + 3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x. \end{aligned}$$

Отсюда

$$1) \sin 2x = 0, \text{ что с учетом } x \in [0; \pi] \text{ дает три корня: } 0, \pi/2, \pi.$$

$$2) 2 \sin 5x = 5 - 4 \sin^2 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 5x = 5 - 2(1 - \cos 4x) \Leftrightarrow \sin 5x - \cos 4x = 3/2.$$

Перепишем уравнение так: $\sin(4x + x) - \cos 4x = 3/2$ и применим формулу синуса суммы: мы получим $\cos x \sin 4x + (\sin x - 1) \cos 4x = 3/2$. И снова спасает нас вспомогательный угол: преобразовываем левую часть к виду

$$\sqrt{\cos^2 x + (\sin x - 1)^2} \cdot \sin(4x + \alpha) = \frac{3}{2}$$

или

$$\sqrt{2}\sqrt{1-\sin x} \cdot \sin(4x + \alpha) = \frac{3}{2}.$$

Поскольку при $x \in [0; \pi]$ выполнено $1 - \sin x \leq 1$, левая часть не больше $\sqrt{2}$, а правая — строго больше $\sqrt{2}$, поэтому решений, отличных от найденных выше, уравнение не имеет. ►

☛ **Ответ:** $0, \pi/2, \pi$.

45. Решить уравнение $\cos 2x + 1 = \sin(x + \pi/4)$ при условии $x \in [0; \pi/2]$.

◀ И здесь — без условия $x \in [0; \pi/2]$ задача оказалась бы много более трудной. Имеем очевидное

$$2 \cos^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x),$$

но дальше... Чтобы избавиться от иррациональности, возведем обе части в квадрат (это равносильное преобразования благодаря условию $x \in [0; \pi/2]$). Получим

$$8 \cos^4 x = (\sin x + \cos x)^2$$

и, как нам это уже приходилось делать, домножим правую часть на $\cos^2 x + \sin^2 x$, чтобы превратить уравнение в однородное (4 степени).

Получаем $8 \cos^4 x = (\sin x + \cos x)^2 (\cos^2 x + \sin^2 x)$, что после раскрытия, приведения и деления на $\cos^4 x \neq 0$ дает уравнение

$$\operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 7 = 0.$$

Оно имеет корень $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \pi/4$. После понижения степени получаем уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 7 = 0,$$

которое не имеет решений при $x \in (0; \pi/2)$ (отбрасываем не являющиеся корнями концы отрезка), поскольку $\operatorname{tg} x > 0$. ►

☛ **Ответ:** $\pi/4$.

46. Среди корней уравнения

$$\sin x \cos 2x + \sin x + \frac{10}{11} \sin 2x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{30}{44}$$

найти ближайший к числу $13\pi/4$.

◀ Вначале уравнение нужно каким-то образом решить; то, что ключом служит группировка и разложение на множители, подсказано равенством

$$\frac{30}{44} : \frac{3}{4} = \frac{10}{11},$$

связывающим весьма своеобразные коэффициенты уравнения.

Имеем:

$$\sin x(\cos 2x + 1) + \frac{10}{11} \sin 2x = \frac{3}{4} \left(\cos x + \frac{10}{11} \right),$$

$$2 \sin x \cos^2 x + \frac{10}{11} \sin 2x = \frac{3}{4} \left(\cos x + \frac{10}{11} \right),$$

$$\sin 2x \cos x + \frac{10}{11} \sin 2x = \frac{3}{4} \left(\cos x + \frac{10}{11} \right),$$

$$\sin 2x \left(\cos x + \frac{10}{11} \right) = \frac{3}{4} \left(\cos x + \frac{10}{11} \right).$$

Отсюда

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{10}{11}, \\ \sin 2x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Получаем 4 серии решений:

$$x_1 = \pi - \arccos \frac{10}{11} + 2\pi n, \quad x_2 = \arccos \frac{10}{11} - \pi + 2\pi m,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} + \pi k, \quad x_4 = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi t.$$

Достаточно близко к $13\pi/4$ расположены

$$x_2 = 3\pi + \arccos \frac{10}{11}, \quad x_3 = 3\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4}, \quad x_4 = 3\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4}$$

(обозначаем эти корни так же, как и всю серию, к которой они принадлежат).

Заметим, что

$$\frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{13\pi}{4},$$

т. е. корни x_3 и x_4 равноудалены от $13\pi/4$. Поэтому сравним

$$\arccos \frac{10}{11} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} \quad \text{или} \quad 2 \arccos \frac{10}{11} \quad \text{и} \quad \arcsin \frac{3}{4}.$$

Поскольку оба угла принадлежат интервалу $(0; \pi/2)$, сравним синусы этих углов.

Имеем:

$$\sin \left(2 \arccos \frac{10}{11} \right) = 2 \cdot \frac{10}{11} \cdot \sqrt{1 - \frac{100}{121}} = \frac{20\sqrt{21}}{121}; \quad \frac{20\sqrt{21}}{121} > \frac{3}{4}$$

(прямое возведение в квадрат).

Значит,

$$2 \arccos \frac{10}{11} > \arcsin \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \arccos \frac{10}{11} > \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4}.$$

Но оба эти корня

$$x_2 = 3\pi + \arccos \frac{10}{11} \quad \text{и} \quad x_3 = 3\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4}$$

меньше $13\pi/4$ (поскольку $10/11 > \sqrt{2}/2$ и $\arccos 10/11 < \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$). Поэтому x_2 расположен к $13\pi/4$ ближе.

Итак, требованию задачи удовлетворяет $3\pi + \arccos(10/11)$. ►

🔍 **Ответ:** $3\pi + \arccos 10/11$.

Оценки при решении тригонометрических уравнений приходится делать постоянно, поскольку основные функции — синус-косинус — обладают таким непосредственно к неравенствам относящимся свойством, как ограниченность.

47. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\operatorname{ctg} 3x + \sin^2 x - \frac{1}{4}} = \sin 3x - 1.$$

◀ Здесь оценка начинается (и, как выяснится, оканчивается) анализом ОДЗ. Требование неотрицательности первого из подкоренных выражений приводит нас к неравенству

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2 \geq 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \geq 2,$$

которое сводится к равенству $2 \cos(x - \pi/6) = 2$, откуда $x = \pi/6 + 2\pi n$.

Таким образом, если уравнение имеет корни, они неизбежно содержатся в найденной серии. Но при $x = \pi/6 + 2\pi n$ имеем:

$$\sin 3x = 1, \quad \operatorname{ctg} 3x = 0, \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

и уравнение обращается в тождество $0 + 0 = 0$. Значит, $x = \pi/6 + 2\pi n$. ►

🔍 **Ответ:** $\pi/6 + 2\pi n$.

48. Решить уравнение $\sqrt{3 - 4 \cos^2 x + 3 \sin x + \sin x + \sin^2 x} = 0$.

◀ Пусть $\sin x = y$; тогда уравнение переписывается в виде

$$\sqrt{4y^2 + 3y - 1} + y + y^2 = 0.$$

Условия существования решения определяются системой

$$\begin{cases} 4y^2 + 3y - 1 \geq 0, \\ y + y^2 \leq 0, \\ |y| \leq 1. \end{cases}$$

Но множества решений первых двух неравенств имеют единственную точку пересечения $y = -1$. Таким образом, нам остается только подставить это значение в уравнение

$$\sqrt{4y^2 + 3y - 1} + y + y^2 = 0$$

и убедиться, что оно подходит. ▶

🔍 **Ответ:** $-\pi/2 + 2\pi n$.

49. Решить уравнение $\sin^3 x + \cos^7 x = 1$.

◀ Очевидно, уравнение заведомо удовлетворяется в двух случаях: 1) $\sin x = 1$; 2) $\cos x = 1$. Докажем, что в остальных случаях решений нет. Пусть $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Поскольку $|\sin x| < 1$, $\sin^3 x < \sin^2 x$; аналогично $\cos^7 x < \cos^2 x$. Но тогда

$$\sin^3 x + \cos^7 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Итак: $x = \pi/2 + 2\pi n$, $x = 2\pi k$. ▶

🔍 **Ответ:** $2\pi n$, $\pi/2 + 2\pi n$.

50. Решить уравнение $\sin^6 x \cos^{10} x = 0,02$.

◀ Поскольку

$$\sin^6 x \cos^{10} x = (\sin^6 x \cos^6 x) \cos^4 x = \frac{1}{64} \sin^6 2x \cos^4 x,$$

уравнение имеет вид

$$\sin^6 2x \cos^4 x = \frac{64 \cdot 2}{100} > 1.$$

Но этого не может быть никогда, потому что $|\sin 2x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. ▶

🔍 **Ответ:** $\emptyset$.

51. Решить уравнение $2 \sin^3 x + 2 \cos x = 3$.

◀ На первый взгляд уравнение не содержит в себе ничего «такого», однако, порешав, поневоле начинаешь нервничать: не выходит. Исследовать функцию $\sin^3 x + \cos x$ как-то не тянет (ее производная равна 0, если $\sin x \cos x = 1/3$ и дальше нужно погрязнуть в вычислениях). Спасают неравенства: поскольку $2 \sin^3 x < 2 \sin^2 x$, имеем

$$\begin{aligned} 2 \sin^3 x + 2 \cos x &< 2(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x = \\ &= 2 - 2 \cos^2 x + 2 \cos x = 2(1 + \cos x - \cos^2 x). \end{aligned}$$

Но

$$1 + \cos x - \cos^2 x = \frac{5}{4} - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4},$$

т. е.

$$2 \sin^3 x + 2 \cos x \leq \frac{5}{2} < 3$$

и уравнение решений не имеет. ►

☞ **Ответ:** $\emptyset$.

Не исключается и непосредственное применение неравенств.

52. Решить уравнение $\sqrt{2 - \sin x} + \sqrt{\sin x} = (\sqrt{2} - 1) \cos^2 x + 2$.

◀ Поскольку

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)},$$

левая часть уравнения оценивается так:

$$\sqrt{2 - \sin x} + \sqrt{\sin x} \leq 2.$$

Значит, и

$$(\sqrt{2} - 1) \cos^2 x + 2 \leq 2.$$

Отсюда $\cos x = 0$. ОДЗ требует условия $\sin x \geq 0$; таким образом, ответом будет серия

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad \blacktriangleright$$

☞ **Ответ:** $\pi/2 + 2\pi n$.

53. Решить уравнение $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x} = 2 \cos x - \cos^2 x$.

◀ Велик соблазн снова использовать то же неравенство, что и в предыдущем примере, но здесь это ничего не даст. В самом деле: неравенство

$$\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x} \leq \sqrt{2}$$

влечет неравенство $2 \cos x - \cos^2 x \leq \sqrt{2}$ или $(\cos x - 1)^2 + \sqrt{2} - 1 \geq 0$, которое, разумеется, верно всегда.

Поступим иначе, а именно оценим левую часть не сверху, а снизу, т. е. докажем, что

$$\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x} \geq 1.$$

Это нетрудно, поскольку при возведении в квадрат (равносильном в данном случае преобразовании) получается верное неравенство

$$2\sqrt{(1 - \sin x) \sin x} \geq 0.$$

Теперь потребуем выполнения неравенства $2 \cos x - \cos^2 x \geq 1$, которое равносильно неравенству $(\cos x - 1)^2 \leq 0$; это последнее выполняется только при $x = 2\pi n$. Подстановка показывает, что вся эта серия является решением исходного уравнения. ▶

🔑 **Ответ:** $2\pi n$.

54. Решить уравнение

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin 2y.$$

◀ На необходимость оценок указывает наличие двух неизвестных, так что сразу начнем мыслить в этом направлении.

Пусть $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = b$, причем $a + b = 1$. Левая часть уравнения представляется в виде

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4 = (a^2 + b^2) \left(1 + \frac{1}{a^2 b^2}\right) + 4.$$

Оценим отдельно каждую скобку, учитывая, что $0 < a, b < 1$.

$$a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2 = 2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

(причем равенство возможно только при $a = 1/2$).

Произведение

$$ab = a(1 - a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

(и здесь равенство возможно только при $a = 1/2$). Значит,

$$\frac{1}{ab} \geq 4, \quad \frac{1}{a^2b^2} \geq 16 \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1}{a^2b^2} \geq 17.$$

Таким образом, левая часть исходного уравнения не меньше, чем

$$\frac{17}{2} + 4 = 12,5$$

(и равна 12,5 только при $a = 1/2$), тогда как правая не больше, чем 12,5. Отсюда

$$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2}, \\ \sin 2y = 1. \end{cases}$$

Окончательный ответ:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad y = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

❖ **Ответ:** $x = \pi/4 + \pi n/2$, $y = \pi/4 + \pi k$.

Довольно ядовитую смесь могут образовать задачи, в которых тригонометрия объединена с чем-то еще — с радикалами, модулями, логарифмами или со всем сразу. Вот некоторые образчики — в дополнение к тому, уже встречалось нам на пути.

55. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)} \cdot \cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2}.$$

◀ Спасает вспомогательный угол, позволяющий представить левую часть в виде

$$\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x} \cos(\pi x - \phi) = \sqrt{2},$$

откуда следует, что $\operatorname{ctg} 2\pi x = 0$. Тогда

$$2\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}.$$

Уравнение принимает вид $\cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2}$, что дает $x = 1/4 + 2k$. Вторая серия целиком содержится в первой. ▶

❖ **Ответ:** $x = 1/4 + 2k$.

56. Решить уравнение $|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x$.

◀ Заменяем уравнение на равносильную ей систему

$$\begin{cases} 1 - 2 \sin x + \cos x = \cos 2x - 1 - 2 \sin x, \\ 1 - 2 \sin x + \cos x = 1 + 2 \sin x - \cos 2x, \\ \cos 2x - 1 - 2 \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $\cos 2x - 1 - 2 \sin x \geq 0$ дает

$$-2 \sin^2 x - 2 \sin x \geq 0 \quad \text{или} \quad \sin x (\sin x + 1) \leq 0,$$

откуда $\sin x \leq 0$, поскольку выражение в скобке всегда неотрицательно.

Первое уравнение решается быстро:

$$\begin{aligned} 1 + \cos x &= 2 \cos^2 x - 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n. \end{aligned}$$

Второе приводится к виду

$$\cos 2x + \cos x = 4 \sin x \quad \text{или} \quad \cos \frac{3x}{2} = 4 \sin \frac{x}{2}$$

(после сокращения на $\cos(x/2) \neq 0$), но решаться как-то не хочет. Возникает предположение, что решений нет. Вернемся назад и посмотрим, не проглядели ли мы чего-то.

Действительно, если $\sin x \leq 0$, то выражение, стоящее под модулем неотрицательно и второй случай рассматривать не нужно! ▶

☛ **Ответ:** $\pi + 2\pi n$.

57. Найти все пары $(x; y)$, удовлетворяющие равенству

$$\cos x = y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}.$$

◀ Условие существования радикала $y - x^2 - 1 \geq 0$ дает $y \geq x^2 + 1$, т. е. $y \geq 1$. Но тогда и $y^2 \geq 1$, таким образом,

$$y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 1.$$

Поскольку это должно равняться $\cos x$, сразу получаем:

$$\begin{cases} y = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

При $y = 1$ подкоренное выражение превращается в $-x^2$ и может равняться только 0. Итак: $x = 0$, $y = 1$. ▶

☛ **Ответ:** $(0; 1)$.

Как говаривал Дон Кихот, «необходимость в исследовании может возникнуть в любую минуту». Давным-давно поступающим на мехмат МГУ была предложена такая задача:

58. Найти корни уравнения $\sin x - \cos 6x = \sin 3x - \cos 8x$, удовлетворяющие условиям $\sin x - \cos 6x + 2/3 > 0$, $-4 < x < -2,5$.

◀ Решая уравнение, без особого труда находим три серии:

$$x_1 = \pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{9}.$$

Неравенству $-4 < x < -2,5$ из первой серии удовлетворяет только $x = -\pi$, однако для этого значения

$$\sin x - \cos 6x + 2/3 = -1/3,$$

т. е. $x = -\pi$ не годится.

Из второй серии неравенству $-4 < x < -2,5$ удовлетворяет только $x = -9\pi/10$ (при $k = -2$). Для этого значения неравенство $\sin x - \cos 6x + 2/3 > 0$ выполнено, поскольку

$$\sin x - \cos 6x = -\sin \frac{9\pi}{10} - \cos \frac{54\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{6\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{10} - \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right) = 0.$$

Наконец, настает черед третьей серии — вот тут-то мы и познаем все радости творчества. Под неравенство $-4 < x < -2,5$ теперь попадают два значения: $x = -7\pi/6$ и $x = -17\pi/18$ (при $m = -6$ и $m = -5$ соответственно). С первым проблем нет: оно «табличное» и оно подходит:

$$-\sin \frac{7\pi}{6} - \cos 7\pi + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} > 0.$$

Зато второе... заставляет нас проверить справедливость неравенства

$$-\sin \frac{17\pi}{18} - \cos \frac{17\pi}{3} + \frac{2}{3} > 0 \quad \text{или} \quad -\sin \frac{\pi}{18} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} > 0,$$

т. е. сравнить $\sin(\pi/18)$ с $1/6$.

Как это сделать? Обозначим $\sin(\pi/18) = x$ и, поскольку $\sin(3\pi/18) = 1/2$, воспользуемся формулой $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$. Тогда

$$3x - 4x^3 = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad 8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Кубическое уравнение! Мы, конечно, знаем, как обращаться с такими вещами, но в данном случае нам не поможет даже доктор Кардано: неприводимый случай (три корня), и ответ можно получить только в тригонометрической форме, в которой он у нас уже имеется. Нет, на этот раз мы пойдем иным путем.

Заменим $2x = t$ и исследуем функцию $f(t) = t^3 - 3t + 1$. Нам нужно знать, где ее график пересекает ось t — левее или правее точки $t = 1/3$. Производная

$$f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$$

обращается в нуль при $t = -1$ (точка максимума) и при $t = 1$ (точка минимума); при этом $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$. На промежутке $(-1; 1)$ функция убывает, при этом $f(1/3) = 1/27 > 0$. Значит, функция обращается в нуль на промежутке $(1/3; 1)$, т. е. график пересекает ось правее точки $t = 1/3$ и, следовательно, $\sin(\pi/18) > (1/6)$ и значение $x = -17\pi/18$ не является корнем исходного уравнения. (Для полноты доказательства следует заметить, что два других корня уравнения $t^3 - 3t + 1 = 0$ не портят картины: один из них заведомо отрицателен и, значит, не может равняться $2 \sin(\pi/18)$, а второй больше 1, т. е. опять-таки больше $1/3$.)

Справедливости ради отметим, что в те мирные времена производная не входила (или только начинала) в программу, поэтому требовалось иное доказательство неравенства $\sin(\pi/18) > 1/6$. Нет, это не так уж трудно и дается цепочкой равносильностей:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{18} > \frac{1}{6} &\Leftrightarrow 3 \sin \frac{\pi}{18} > \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{18} > \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{18} &= 2 \sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} \Leftrightarrow 1 > \cos \frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

Мы провели исследование из спортивного интереса: учащемуся, который только что освоил производную, всегда хочется найти именно такое решение, подтверждающее силу нового метода. ►

☛ **Ответ:** $-7\pi/6$.

А вот пример монструозных образований нового тысячелетия:

59. Найти все пары $(x; y)$, удовлетворяющие равенству

$$\frac{3 \cos x + 2 \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \sqrt{3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2}.$$

◀ Начнем с анализа подкоренного выражения; его можно переписать в виде $3 + 2(x - y) - (x - y)^2 = 4 - (x - y - 1)^2$ и таким образом,

$$\sqrt{3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2} \leq 2,$$

причем равенство возможно только в случае $x - y - 1 = 0$. Конечно, это наблюдение придется использовать на всю катушку. Как? Увидим. Забудем на время

про корень, обозначив его для краткости через t , где $t \leq 2$. Преобразуем уравнение так:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{2(\cos x + \sin x)}{\cos x} &= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} t \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \left(2 - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} - t \right) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1 + (1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x - t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Полагая $1 + \operatorname{tg} x = u$, приходим к квадратному относительно u уравнению $u^2 - tu + 1 = 0$. Его дискриминант $D = t^2 - 4$ и, поскольку $t \leq 2$, уравнение имеет решения только в случае $t = 2$. Тогда $u = 1$ и $\operatorname{tg} x = 0$, т. е. $x = \pi n$. Из условия $x - y = 1$ находим $y = \pi n - 1$. ►

☛ **Ответ:** $(\pi n; \pi n - 1)$.

Бывают, наконец, тригонометрические уравнения, которые, так сказать, *возвращают нас к истокам* (тригонометрии), т. е. — к самой геометрии, которая используется при решении.

60. Найти корни уравнения $\sqrt{5 - 4 \cos x} + \sqrt{13 - 12 \sin x} = \sqrt{10}$, удовлетворяющие условию $0^\circ < x < 90^\circ$.

◀ Если представить подкоренные выражения в виде

$$5 - 4 \cos x = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos x + 2^2, \quad (*)$$

$$13 - 12 \sin x = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos(90^\circ - x) + 3^2$$

и вспомнить теорему косинусов $a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2 = c^2$, то можно построить два треугольника ABC и CBD с общей стороной $BC = 2$ и прилежащими к ней углами ABC и CBD , равными x и $90^\circ - x$ соответственно (рис. 29).

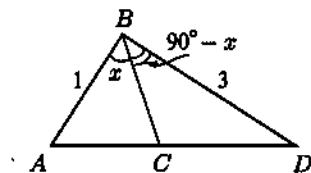


Рис. 29

При этом $AB = 1$, $BD = 3$. Тогда угол ABD — прямой и по теореме Пифагора $AB^2 + BD^2 = AD^2 = 10$, т. е. $AD = \sqrt{10}$.

Но из равенств (*) следует, что

$$AC = \sqrt{5 - 4 \cos x}, \quad CD = \sqrt{13 - 12 \sin x}$$

и поскольку $AD = \sqrt{10}$, исходное уравнение выражает собой тот факт, что $AC + CD = AD$.

Так как сумма площадей треугольников ABC и CBD равна площади треугольника ABD , то, воспользовавшись формулой

$$s = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

имеем

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC \sin x + \frac{1}{2}CB \cdot BD \sin(90^\circ - x) = \frac{1}{2}AB \cdot BD,$$

т.е. $\sin x + 3 \cos x = 3/2$, откуда $\sqrt{10} \sin(x + \phi) = 3/2$, где $\phi = \arctg 3$ и поскольку $0^\circ < x < 90^\circ$, окончательно находим

$$x = 180^\circ - \arcsin \frac{3}{2\sqrt{10}} - \arctg 3.$$

(Значение $x = \arcsin(3/(2\sqrt{10})) - \arctg 3$ отрицательно и должно быть отброшено. Действительно: $\arcsin(3/(2\sqrt{10})) = \arctg(3/\sqrt{31}) < \arctg 3$.) ►

❖ **Ответ:** $x = 180^\circ - \arcsin(3/(2\sqrt{10})) - \arctg 3$.

61. Решить уравнение

$$\sqrt{(1 + \sin x)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{(1 - \sin x)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

◀ Пусть $\sin x = a$, $\operatorname{tg}(x/2) = b$, тогда

$$\sqrt{(1+a)^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2} = 2\sqrt{1+b^2}.$$

Отметим на оси Ox точки с абсциссами $1-a$, 1 и $1+a$, а на оси Oy — точку с ординатой b . Тогда в треугольнике OEG (рис. 30) имеем:

$$OE = \sqrt{(1-a)^2 + b^2}, \quad OF = \sqrt{1+b^2},$$

$$OG = \sqrt{(1+a)^2 + b^2}.$$

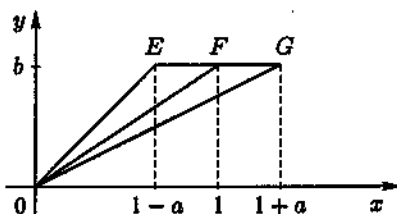


Рис. 30

Поскольку OF — медиана, а длина медианы не больше, чем полусумма заключающих ее сторон, т. е.

$$OF \leq \frac{1}{2}(OE + OG),$$

и равенство достигается при совпадении всех трех отрезков $OE = OF = OG$, в нашем случае должно быть

$$(1 - a)^2 + b^2 = 1 + b^2 = (1 + a)^2 + b^2.$$

Отсюда $a = 0$, т. е. $\sin x = 0$, $x = \pi n$. В ОДЗ входят только те значения x , для которых $x \neq \pi + 2\pi k$. Таким образом, $x = 2\pi n$. ►

☛ **Ответ:** $x = 2\pi n$.

62. Решить уравнение

$$\sin x + 2 \sin 3x + \sin 5x = \sqrt{6(\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x)}.$$

◀ Для решения этого уравнения нам снова понадобится понятие скалярного произведения векторов. Конечно, мы помним, — ведь «Память хорошего ученика подобна водоему, обложенному крепчайшим цементом: капли не вытечет» (Э. Ренан) — что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора, то их скалярным произведением называется число, обозначаемое $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi$, где ϕ — угол между данными векторами. Если векторы заданы своими координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Поскольку $\cos \phi \leq 1$, из определения сразу следует, что

$$\vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}| \quad \text{или} \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Равенство возможно только в случае $\cos \phi = 1$, т. е. когда векторы коллинеарны; тогда для их координат выполнено условие

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Переходим к решению нашего уравнения. Введем векторы

$$\vec{a} = (1; 2; 1) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (\sin x; \sin 3x; \sin 5x);$$

тогда

$$\vec{a}\vec{b} = a \sin x + 2 \sin 3x + \sin 5x, \quad |\vec{a}| = \sqrt{6}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x}$$

уравнение имеет вид $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$. Значит, в силу вышесказанного, должны выполняться соотношения

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

которые в данном случае выглядят так:

$$\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin 3x}{2} = \frac{\sin 5x}{1}.$$

Уравнение $\sin x = \sin 5x$ дает нам две серии:

$$x_1 = \frac{\pi n}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}.$$

Уравнение $2 \sin x = \sin 3x$ — серии

$$x = \pi l \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi m,$$

которые и являются решением, поскольку входят в первые две серии (но не наоборот). ►

☛ **Ответ:** $\pi l, \pm \pi/6 + \pi m$.

В заключение — несколько уравнений с параметром.

63. Найти все a , при которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

◀ Здесь используется нередкое в задачах с параметром соображение четности, а именно: если x_0 — корень уравнения, то и $-x_0$ — тоже корень; а поскольку он должен быть единственным, $x_0 = -x_0$, т. е. $x_0 = 0$. Но если $x = 0$, то уравнение принимает вид $-2a \sin 1 + a^2 = 0$, откуда $a_1 = 0$, $a_2 = 2 \sin 1$. Только эти два значения параметра и надо рассмотреть.

Пусть $a = 0$; тогда исходное уравнение принимает вид $x^2 = 0$, и $x = 0$ — его единственный корень.

Пусть $a = 2 \sin 1$. Перепишем уравнение так:

$$\frac{x^2 + a^2}{2a} = \sin(\cos x).$$

При $x = 0$ его левая и правая части совпадают, причем для левой части это значение является точкой минимума, а для правой — точкой максимума, т. е.

$$\frac{x^2 + a^2}{2a} \geq \frac{a}{2} = \sin 1; \quad \sin(\cos x) \leq \sin 1.$$

Значит, и в этом случае уравнение имеет единственный корень. ►

☛ **Ответ:** $a = 0, a = 2 \sin 1$.

64. Найти все a , при которых уравнение

$$\sin^2(x+6) - (a-1)\sin(x+6)\sin\pi x + (a-1)\sin^2\pi x = 0$$

имеет единственное решение.

◀ Поскольку данное уравнение — однородное, действуем соответственно. Первым делом рассмотрим случай $\sin\pi x = 0$. Тогда уравнение имеет решение при условии, что и $\sin(x+6) = 0$. Из первого равенства получаем $x = \pi$, из второго — $x = -6 + \pi k$; то и другое имеет место одновременно, только если $x = -6$. Итак, данное уравнение независимо от параметра всегда имеет решение $x = -6$.

Пусть теперь $\sin\pi x \neq 0$; тогда, деля уравнение на $\sin^2\pi x$, приводим его к виду

$$y^2 - (a-1)y + a-1 = 0 \quad (*),$$

где $y = \sin(x+6)/\sin\pi x$. Дискриминант $D = (a-1)(a-5)$. Если $D \geq 0$, мы оказываемся лицом к лицу с уравнением $\sin(x+6) = y_0 \sin\pi x$, где y_0 — какой-либо корень уравнения (*). Графики функций

$$y = \sin(x+6) \quad \text{и} \quad y = y_0 \sin\pi x$$

заведомо пересекаются хотя бы на промежутке $(-6; 0)$. Действительно: первая функция обращается в нуль при $x = -6 + \pi$; а вторая в точках $x = -3$ и $x = -2$. И поскольку обе функции непрерывны, пересечение графиков на отрезке $[-3; -2]$ неизбежно. Мы получаем как минимум еще один корень, и, таким образом, условие задачи выполнено, только если уравнение (*) не имеет корней, т. е. при $a \in (1; 5)$. ▶

☛ **Ответ:** $a \in (1; 5)$.

65. Найти все a , при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 4a \sin x - \cos x - 2a = 0$$

найдутся два, отличающиеся друг от друга на $3\pi/2$.

◀ Приведем уравнение к виду $2 \sin x(\cos x + 2a) = \cos x + 2a$, откуда

$$\begin{cases} \cos x = -2a, \\ \sin x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть x_1 — какое-либо решение первого уравнения, x_2 — второго, причем $x_1 = x_2 + 3\pi/2$. Тогда $\cos x_1 = \sin x_2 = 1/2$, откуда $a = -1/4$. Если же $x_1 = x_2 - 3\pi/2$, то $\cos x_1 = -\sin x_2 = -1/2$ и тогда $a = 1/4$.

Разность между корнями второго уравнения

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = 5\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

не может составлять $3\pi/2$, а разность между корнями первого

$$x = \pm \arccos(-2a) + 2\pi m$$

составит $3\pi/2$ только в случае, если эти корни суть $\arccos(-2a) = \pi/4$ или $\arccos(-2a) = 3\pi/4$, т. е. при $a = \pm\sqrt{2}/4$. ►

☛ **Ответ:** $a = \pm 1/4$, $a = \pm\sqrt{2}/4$.

66. Найти все a , при которых уравнение $\sin x \cos 2x \sin 3x = a$ имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/4; \pi/2]$.

◀ Обозначим $\cos 2x = t$ и упростим уравнение. Имеем

$$\sin x \cos 2x \sin 3x = a \Leftrightarrow (\cos 2x - \cos 4x) \cos 2x = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t - 2t^2 + 1)t = 2a \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - t = -2a.$$

Если $x \in [\pi/4; \pi/2]$, то $2x \in [\pi/2; \pi]$ и соответственно $t \in [-1; 0]$. Рассмотрим на отрезке $[-1; 0]$ функцию $y = 2t^3 - t^2 - t$. Ее производная

$$y' = 6t^2 - 2t - 1$$

обращается в нуль при $t = (1 \pm \sqrt{7})/6$. Отрезку $[-1; 0]$ принадлежит только $t_0 = (1 - \sqrt{7})/6$. Знак производной меняется в этой точке с плюса на минус, т. е. это — точка максимума. На промежутке $[-1; t_0]$ функция возрастает, на $[t_0; 0]$ убывает, при этом

$$y(-1) < 0, \quad y(0) = 0, \quad y(t_0) = \frac{7\sqrt{7} - 10}{54} > 0.$$

Значит, уравнение имеет два корня, т. е. график пересекается с прямой $y = -2a$ ровно в двух точках в том и только в том случае, когда

$$0 \leq -2a < \frac{7\sqrt{7} - 10}{54}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $a \in ((10 - 7\sqrt{7})/108; 0]$.

67. Найти все a , при которых уравнение

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x} + \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x} + \frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x} = a$$

не имеет решений.

◀ Поскольку все слагаемые в левой части неотрицательны, в силу неравенства Коши $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ мы имеем:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x} \geq 2 \left| \frac{\sin x}{\sin 3x} \right|, \quad \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x} + \frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x} \geq 2 \left| \frac{\sin 3x}{\sin x} \right|,$$

$$\left| \frac{\sin x}{\sin 3x} \right| + \left| \frac{\sin 3x}{\sin x} \right| \geq 2,$$

и тогда

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x} + \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x} + \frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x} \geq 4.$$

Таким образом, данное уравнение заведомо не имеет решений при $a < 4$.

Случай $a = 4$ требует отдельного рассмотрения. Поскольку неравенство Коши обращается в равенство при $a = b$, равенство левой части исходного уравнения 4 возможно при одновременном выполнении равенств

$$|\sin x| = |\sin 2x| = |\sin 3x| = |\sin 4x|$$

(причем равенство 0 этих выражений) исключается. Но $|\sin x| = |\sin 2x|$ при $\cos x = \pm 1/2$, и в этом случае $|\sin x| = |\sin 2x| = \sqrt{3}/2$; и отсюда следует, что $|\sin 3x| = 0$. Таким образом, $a = 4$ также следует включить в ответ. ▶

☛ **Ответ:** $a \leq 4$.

68. Найти все a , при которых уравнение $\cos 2x - 2a \sin x - |2a - 1| + 2 = 0$ имеет решения и все его положительные корни образуют арифметическую прогрессию.

◀ Приведем уравнение к виду $2 \sin^2 x + 2a \sin x + |2a - 1| - 3 = 0$ и, обозначив $\sin x = y$, исследуем уравнение

$$2y^2 + 2ay + |2a - 1| - 3 = 0 \quad (*)$$

при $y \in [-1; 1]$. Заметим сразу, что положительные корни уравнения $\sin x = y$ могут образовывать арифметическую прогрессию далеко не при всех допустимых значениях y , а только если одно из значений y равно $y = 0$, $y = \pm 1$, $y = \pm \sqrt{2}/2$ (чтобы убедиться в этом, достаточно нарисовать синусоиду и проследить за ее пересечениями с соответствующей горизонтальной прямой). Поэтому рассмотрим отдельные случаи, удовлетворяющие условию.

1) Пусть $y = 1$; тогда уравнение $(*)$ принимает вид

$$|2a - 1| = 1 - 2a.$$

Это равенство верно при $a \leq 1/2$. Корнями уравнения $(*)$ будут $y_1 = 1$ и $y_2 = -a - 1$. Если $-a - 1 < -1$, т. е. $a > 0$, то y_1 — единственный

корень и все $a \in (0; 1/2]$ удовлетворяют условию задачи. Если $a = 0$, то корни уравнения $y = \pm 1$ и условие задачи также выполнено. Если $-1 < -a - 1 < 1$, т.е. $-2 < a < 0$, то исходное уравнение сводится к совокупности

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -a - 1. \end{cases}$$

Положительные корни первого уравнения — это $\pi/2, 5\pi/2, \dots$. Если $-a - 1 > 0$, то положительные корни второго уравнения будут лежать на промежутках $(0; \pi), (2\pi; 3\pi), \dots$, на которых, таким образом, окажется по три корня, тогда как на промежутках $(\pi; 2\pi), \dots$ — ни одного, т.е. такие a не годятся. Если $-a - 1 < 0$, то нас устроит только $a = -1/2$ (делим отрезок $[\pi/2; 5\pi/2]$ на три равные части и получаем прогрессию $x_1 = \pi/2 = 3\pi/6, x_2 = 7\pi/6, x_3 = 11\pi/6, x_4 = 15\pi/6 = 5\pi/2, \dots$).

Если $-a - 1 = 1$, т.е. $a = -2$, то совокупность сводится к одному уравнению $\sin x = 1$, положительные корни которого образуют арифметическую прогрессию.

Если, наконец, $-a - 1 > 1$, т.е. $a < -2$, то единственный корень уравнения (*) — это $y = 1$ и всё выполнено.

2) Пусть $y = -1$; тогда уравнение (*) имеет вид $|2a - 1| = 2a + 1$, т.е. $a = 0$. Этот случай уже рассмотрен.

3) Пусть уравнение (*) имеет корни $y = \pm\sqrt{2}/2$. Тогда

$$\begin{cases} |2a - 1| = 1 - a\sqrt{2}, \\ |2a - 1| = 1 + a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Эта система имеет решение только при уже рассмотренном $a = 0$.

4) Пусть один из корней уравнения (*) принадлежит интервалу $(-1; 1)$, а другой — нет. Это имеет место, если

$$f(-1)f(1) < 0, \quad \text{где} \quad f(y) = 2y^2 + 2ay + |2a - 1| - 3.$$

Имеем неравенство

$$(2a + |2a - 1| - 1)(-2a + |2a - 1| - 1) < 0.$$

При $a \leq 1/2$ первая скобка равно 0, что не годится. При $a > 1/2$ неравенство верно. Корнем уравнения (*) будет в этом случае

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - 4a + 8} - a}{2}.$$

Учитывая сказанное выше, находим, что новым значением параметра, удовлетворяющим условию, будет $a = 2$ (в этом случае $y = 0$; значения $y = \pm 1$ и $y = \pm\sqrt{2}/2$ новых значений параметра не дают). ►

☞ **Ответ:** $a \leq -2, a = -1/2, 0 \leq a \leq 1/2, a = 2$.



Привал неразочаровавшихся

1. Решите в качестве разминки следующие тригонометрические уравнения:

а) $15(\sin 2x + \operatorname{tg} 2x) = 16 \operatorname{ctg} x$;

б) $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{5} + x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}\right)$;

г) $\sin x + \cos x = \frac{2 + \sqrt{6}}{4 \cos x}$.

2. Решите уравнения, длина которых неуклонно возрастает:

а) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}$;

б) $1 + 2 \sin x \sin 3x = 4 \sin x + 4 \sin 3x + \cos 2x$;

в) $\sin x + \sin 2x + 2 \sin x \sin 2x = 2 \cos x + \cos 2x$;

г) $2 \sin x \cos^2 x + \cos^4 x = 2 \sin x + \cos 2x + \cos^2 x$;

д) $5 \sin x + 5 \cos x + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$;

е) $\sin(x - 50^\circ) + \sin(x - 70^\circ) + \cos(x - 220^\circ) + \cos(x - 340^\circ) = 0$;

ж) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6} \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) =$
 $= 2 \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$.

3. Решите уравнения, в которых так или иначе необходимо понизить степень:

а) $\cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$;

б) $\sin^3 x + \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin 3x$;

в) $\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sqrt{8} \sin(x + \pi/4)} - \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sqrt{8} \sin(x - \pi/4)} = \frac{1 - 2 \cos^4 2x}{\sin 2x}$;

г) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;

$$д) 2(\cos^4 x + \sin x \sin 2x + \sin^4 x) = \cos x - \sin^2 2x + 4 \cos 2x;$$

$$е) 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 3(\cos^4 x + \sin^4 x);$$

$$ж) 2 + \cos 4x = 5 \cos 2x + 8 \sin^6 x;$$

$$з) 32 \cos^6 x - \cos 6x = 1;$$

$$и) \sin^9 x \cos x - \cos^9 x \sin x = \sin 4x.$$

4. Решите уравнения, в которых необходим отбор корней (или проверка):

$$а) 1 + 2 \cos x(1 + \sin 2x) = \sin 2x - \cos 2x, \quad x \in [-3\pi; 2\pi];$$

$$б) \sin 4x(2 + \sin 14x) = 2 \operatorname{ctg} 3x \cos 4x;$$

$$в) \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = 1;$$

$$г) 5 \sin 2x - 8 \operatorname{tg} x - 5 \cos^2 x + 4 = 0, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$д) \frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2 \sin x} = \operatorname{tg} x;$$

$$е) \frac{1}{\cos x + \cos 3x} + \frac{1}{\cos x + \cos 5x} + \frac{1}{\cos x + \cos 7x} = 0.$$

5. Решите иррационально-тригонометрические уравнения:

$$а) \sqrt{5 \operatorname{tg} x + 10} = \frac{5}{2} \sin x + \frac{1}{\cos x};$$

$$б) \sqrt{2 - 3 \sin 2x} = \cos x + \sin x, \quad \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$в) \sqrt{3 \sin 2x} = 2 \sin 2x + \sin x + \cos x - 1;$$

$$г) 1 + \sqrt{4 \cos^2 x - 3} + \sqrt{2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3} = 3 \operatorname{tg}^2 x;$$

$$д) \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \sin x} + \sqrt{15 - 12 \cos x} = 4, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$е) \sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{10 - 6 \cos x} = \sqrt{10 - 6 \cos 2x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

6. Решите уравнения, в которых надо вспомнить про целые числа:

$$а) \sin x \left(\cos \frac{x}{4} - 2 \sin x \right) + \cos x \left(1 + \sin \frac{x}{4} - 2 \cos x \right) = 0;$$

$$б) \sin \frac{1992\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos x};$$

$$в) \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi \sin^2 x + \pi}{4 \sin^6 x + 1} - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4 \sin^6 x + 1} \right).$$

7. Решите тригонометрические уравнения с модулем:

а) $|\sin x| = \sin |x|$;

б) $\frac{1 - 2 \sin x |\sin x|}{\sqrt{8x - x^2}} = 0$;

в) $|1 - 2 \sin x - \cos 2x| = \cos x - 2 \sin 2x - \cos 3x$;

г) $\frac{1}{|\cos x|} + \sqrt{6}(1 + \operatorname{tg} x) = 8\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

8. Решите уравнения, применяя оценки, исследования и другие стандартные нестандартные методы:

а) $\sin^{20}(\pi x) + \cos^{10}(\pi x) = 1$;

б) $\frac{1}{(32 \sin^8 x)^2} + 4 \sin^6 x = 1 - \sin^4 x$;

в) $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{3\pi x}{2} \right)} \cdot \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2, \quad x \in [-3; 2]$;

г) $5 \cos^5 x - 3 \sin^3 x = 5$;

д) $\sqrt{\frac{2 \cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2 - 2 \cos x}{3}} = \frac{2 \sin x}{3} + \frac{1}{2 \sin x}$;

е) $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x = 2$;

ж) $\sqrt{\cos^3 x} + \sqrt{\sin^5 x} = \sqrt{2}$;

з) $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2 \sin 4x \cos^4 x$;

и) $(\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + 1)(\sin^4 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4}$;

к) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y)$;

л) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \cos 3x + \operatorname{ctg} x - \sin 3x \sin 8x = 0$;

м) $\sin x + 2 \sin 2x - \sin 3x = 3$.

9. а) Решите при всех значениях параметра уравнение

$$\sin \left(a\sqrt{x-1} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}.$$

б) Для каждого a найдите число решений уравнения $a \operatorname{ctg} x - 1 = \cos 2x$, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

10. Найдите все значения параметра a , при которых:

- а) уравнение $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x = a$ имеет решение;
 б) уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение;
 в) уравнение

$$|\sin x - \sqrt{3} \cos x| = a$$

имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/3; 7\pi/3]$;

г) уравнение

$$2 \cos 2x + 2a \sin x + a - 1 = 0$$

имеет единственное решение на интервале $(-\pi/2; 0)$;

д) отрезок $[a; 0]$ содержит не менее трех корней уравнения

$$2 \cos 2x - |2 \cos x - 1| + 1 = 0;$$

е) уравнение

$$\begin{aligned} & 2(1 + \cos 2x)^2 |\sin(2x + a)| = \\ & = 2 \cos 2x - 2 \cos(4x + 2a) - \cos(6x + 2a) - \cos(2x + 2a) \end{aligned}$$

имеет решение;

ж) положительные корни уравнения

$$\sin\left(\frac{3x}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + a\right) = \cos \frac{x}{2},$$

упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

11. Для каждого a решите уравнение

$$\cos 2x + 2 \sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0$$

на отрезке $[\pi; 2\pi]$.

12. Найдите все $a \in [0; \pi]$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^5(3x + a) = \cos(\pi[x])$$

имеет нечетное число решений на отрезке $[1; \pi]$. (Через $[x]$ обозначена, как мы помним, целая часть числа x).

13. Найдите все $a \geq 1$, при которых уравнение

$$\sin \frac{4x}{13} \operatorname{tg} x = 0$$

имеет ровно шесть различных решений на отрезке $[2\pi a; (a^2 + 1)\pi]$.

14. Найдите все b , при которых для любого a уравнение

$$\cos(a + ab + ax) + 4 \cos(a^2 x) = 5b^2$$

имеет хотя бы одно решение.

15. Пусть X — сумма корней уравнения $a \cos x = \sqrt{2} + 2 \cos(x + \pi/3)$ на отрезке $[0; 2\pi]$, а Y — сумма корней уравнения

$$a \cos 2x - 2 \sin 2x = a - 3 \sin x$$

на отрезке $[0; 2\pi]$. Найдите все a , при которых

$$\operatorname{ctg} \frac{X - Y}{2} = \sqrt{3}.$$

Кунсткамера

Решите уравнения:

- $(24 \sin x + 7 \cos x)(75 + 28 \cos x - 25 \cos 2x) = 2598;$
- $\cos 2x(4\sqrt{2} \sin 2x - 3\sqrt{3}) + \sqrt{2} \cos 11x - 3 \sin 2x = 10 - \sqrt{2} \cos 3x;$
- $x^2 + 1 - 2x \sin \pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)(\cos 2\pi y + \cos \pi z)^2.$

Советы и решения

Р 1. а) При условиях $\sin x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ уравнение приводится к виду

$$15 \sin^2 x \cos^3 x = 4 \cos x \cos 2x,$$

т.е.

- $\cos x = 0;$
- $15 \sin^2 x \cos^2 x = 4 \cos 2x \Leftrightarrow 15 \sin^2 2x = 16 \cos 2x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 15(1 - \cos^2 2x) = 16 \cos 2x$

и т.д.

- б) При условии $\sin x \cos x \neq 0$ имеем

$$(\sin x + \cos x) \sin x \cos x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x).$$

Уравнение $\sin x \cos x = \sin x - \cos x$ решаем заменой

$$\sin x - \cos x = y \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - y^2}{2}.$$

- в) Замена $y = \pi/5 - x/2$ приводит к уравнению $\sin 2y = 2 \sin y$.

$$\begin{aligned} \text{г) } \dots \Leftrightarrow \sin x \cos x + \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Р 2. а) Замена $\operatorname{tg} x = y$ сводит уравнение к такому:

$$y^4 + 2y^3 - y - 2 = 0 \quad \text{или} \quad y^3(y + 2) = y + 2,$$

откуда $y_1 = -2$, $y_2 = 1$.

- б) $\dots \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 2 \sin x \cos 3x = 4 \sin x + 4 \sin x(3 - 4 \sin^2 x).$

Поскольку $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, после отделения случая $\sin x = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 3x &= 8 \cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x \cos x = 4 \cos^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x \cos^2 x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 0.\end{aligned}$$

в) Имеем

$$\begin{aligned}\sin x + 2 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x \cos x &= 2 \cos x + 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x(1 + 2 \cos x) + 2 \sin^2 x(2 \cos x + 1) = 2 \cos x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(2 \sin^2 x + \sin x - 1) = 0.\end{aligned}$$

г) Замена $\sin x = y$ сводит уравнение к

$$y^4 - 2y^3 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - y)^2 = 1.$$

д) Имеем

$$\begin{aligned}5\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 4 + 2 \sin 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 + \sin 2x,\end{aligned}$$

откуда $\sin(x + \pi/4) = 1$.

е) Перепишем так:

$$\sin(x - 50^\circ) + \cos(x - 220^\circ) + \sin(x - 70^\circ) + \cos(x - 340^\circ) = 0$$

или, по формулам приведения,

$$\sin(x - 50^\circ) + \sin(x + 50^\circ) + \sin(x - 70^\circ) + \sin(70^\circ - x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0.$$

ж) Заменив $x/5 - \pi/12 = y$ и используя вспомогательный угол, придем к уравнению

$$\sqrt{2} \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2y + \frac{7\pi}{12}\right).$$

Р 3. а) Понижение степени последнего слагаемого дает $\cos^3 x + \cos^2 x - 2 - 2 \cos x = 0$ или $\cos^2 x(1 + \cos x) = 2(1 + \cos x)$.

б) Раскладывая сумму кубов, преобразуем левую часть к виду

$$(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + \frac{1}{2} \sin 2x(\sin x + \cos x)$$

и после раскрытия скобок получим $\sin 3x - \sin x = 0$.

в) Поскольку

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right), \quad \text{а} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x),$$

первая дробь равна $1/2 - (1/4) \sin 2x$. Аналогично вторая дробь равна $1/2 + (1/4) \sin 2x$. Итак,

$$1 - 2 \cos^4 2x = -\frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Заменой $\sin^2 2x = y$ это уравнение приводится к виду $4y^2 - 9y + 2 = 0$.

г) Имеем

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = 1.$$

д) Поскольку

$$2(\cos^4 x + \sin^4 x) = 2\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) = 2 - \sin^2 2x = 1 + \cos^2 2x,$$

имеем

$$1 + \cos^2 2x + 4 \sin^2 x \cos x = \cos x - 1 + \cos^2 2x + 4 \cos 2x$$

или

$$2 + 4 \cos x \sin^2 x = \cos x + 4 \cos 2x.$$

Заменяя $\cos x = y$, получим уравнение $4y^3 + 8y^2 - 3y - 6 = 0$, откуда $y = \pm\sqrt{3}/2$ (плюс посторонний корень $y = -2$).

е) Поскольку

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x),$$

приходим к уравнению

$$4 - 3 \sin^2 2x = 3 - \frac{3}{2} \sin^2 2x.$$

ж) Поскольку

$$8 \sin^6 x = 8(\sin^2 x)^3 = (1 - \cos 2x)^3,$$

замена $\cos 2x = y$ дает уравнение $y^3 - y^2 - 2y = 0$.

$$\begin{aligned} \text{з) } \dots &\Leftrightarrow 32 \cos^6 x = 2 \cos^2 3x \Leftrightarrow 4 \cos^3 x = \pm \cos 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^3 x = \pm(4 \cos^3 x - 3 \cos x). \end{aligned}$$

и) Имеем $\sin x \cos x (\sin^8 x - \cos^8 x) = 4 \sin x \cos x \cos 2x$. После отделения случая $\sin x \cos x = 0$ приходим к уравнению $\cos 2x = 0$.

Р 4. а) Уравнение распадается на два: $\cos x = 0$ и $1 + \sin 2x = \sin x - \cos x$. Для второго используем замену $\sin x - \cos x = y$.

б) После домножения на $\sin 3x$ уравнение приводится к виду

$$\sin 4x \sin 3x \sin 14x = 2 \cos 7x \quad \text{или} \quad \sin 4x \sin 3x \sin 7x \cos 7x = \cos 7x,$$

откуда либо $\cos 7x = 0$ и $x = \pi/14 + \pi n/7$, либо $\sin 3x \sin 4x \sin 7x = 1$. Это равенство возможно только в случае

$$|\sin 3x| = |\sin 4x| = |\sin 7x| = 1,$$

и тогда $\cos 3x = \cos 4x = \cos 7x = 0$. Однако при этом

$$\sin 7x = \sin(3x + 4x) = \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x = \pm \cos 4x \pm \cos 3x \neq \pm 1.$$

Условие $\sin 3x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi k/3$ выполнено для найденных корней. В самом деле, если $\pi/14 + \pi n/7 = \pi k/3$, то $14k = 6n + 3$, что невозможно (левая часть четная, а правая — нечетная).

в) Из формулы тангенса разности получаем $\tan x = 1$ и $x = \pi/4 + \pi n$, однако при этих значениях x не определен $\tan 2x$.

г) Здесь все ориентировано на тангенс. Заменяя $\tan x = y$, приходим к уравнению

$$5(2y - 1) = 4(2y - 1)(1 + y^2).$$

д) Избавившись от знаменателя, после упрощений приходим к уравнению

$$2 \cos^2 2x = \cos 2x,$$

откуда 1) $\cos 2x = 0$, 2) $\cos 2x = 1/2$. В первом случае условия

$$\cos x \neq 0 \quad \text{и} \quad \sin 3x \neq 2 \sin x$$

выполнены, во втором — нет. Действительно, если $\cos 2x = 0$, то $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$, $\sin x = \pm 1/\sqrt{2}$ (знаки не согласованы), а $\sin 3x = 2 \sin x$ в случаях $\sin x = 0$ или же $\sin^2 x = 1/4$, как это следует из формулы синуса тройного угла. Но во втором случае как раз и получаем

$$1 - 2 \sin^2 x = \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

е) После приведения знаменателей к произведению и сложения получившихся дробей получаем

$$\frac{\cos x \cos 2x + \cos x \cos 4x + \cos 3x \cos 4x}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0,$$

откуда после упрощений и отбрасывания знаменателя, $\cos 6x + 2 \cos 2x = 0$ или $4 \cos^3 2x - \cos 2x = 0$, что равносильно $\cos^2 2x = 1/4$. Если

$$\cos 2x = \frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{4}$$

и тогда

$$\cos 3x = \cos x(4 \cos^2 x - 3) = 0,$$

что невозможно по ОДЗ. Если же $\cos 2x = -1/2$, то $\cos^2 x = 1/4 \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$, $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 \neq 0$.

Р 5. а) После возведения в квадрат и упрощений находим

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда $\sin x = \pm 2/\sqrt{5}$ (любое сочетание знаков), и проверку условия

$$\frac{5 \sin x}{2} + \frac{1}{\cos x} \geq 0$$

проводим непосредственной подстановкой.

б) Получаем две серии решений

$$2x = \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n \quad \text{и} \quad 2x = \pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k.$$

Надо выбрать значения, для которых $\pi/6 \leq 2x \leq \pi$. Поскольку

$$0 < \arcsin \frac{1}{4} < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

подходит только

$$2x = \pi - \arcsin \frac{1}{4}.$$

в) Замена $\sin x + \cos x = y$ после отделения корня $y = 1$ и возведения в квадрат приводит нас к уравнению

$$2y^3 + 4y^2 - 3y - 6 = 0$$

с корнями $y = -2$, $y = \pm\sqrt{3/2}$, из которых подходит только $y = \sqrt{3/2}$. Осталось решить уравнения $\sin x + \cos x = 1$ и $\sin x + \cos x = \sqrt{3/2}$.

г) Первый радикал определен при $|\cos x| \geq \sqrt{3/2}$, второй — при $\sin x \geq 1/2$. Это совместно только если оба неравенства превращаются в равенства.

д) Так же как в примере 60, надо рассмотреть треугольник ACB , в котором $AC = \sqrt{12}$, $CB = 2$, D — точка между A и B ,

$$\angle ACD = x, \quad \angle DCB = 90^\circ - x, \quad CD = \sqrt{3}$$

и применить теорему косинусов.

е) В данном случае рассматриваем треугольник ACB , в котором

$$AC = CD = 1, \quad CB = 3, \quad \angle ACD = \angle DCB = x, \quad AB = \sqrt{10 - 6 \cos 2x}.$$

Тогда CD — биссектриса, и по известной формуле для длины биссектрисы,

$$CD = \frac{2AC \cdot CB}{AC + CB} \cos \angle ACD,$$

что дает уравнение

$$1 = \frac{6 \cos x}{4}.$$

Уравнение можно решить и обычным способом последовательного возведения в квадрат. Если заменить $1 - \cos x = y^2$, то приходим к уравнению

$$9y^6 - 24y^4 + 13y^2 - 2 = 0,$$

из которого $y^2 = 1/3$.

Р 6. а) Приводим уравнение к виду $\sin(5x/4) + \cos x = 2$, откуда $\sin(5x/4) = \cos x = 1$ и тогда $x = 2\pi/5 + 8\pi k/5 = 2\pi m$. Уравнение

$$2m = \frac{2}{5} + \frac{8k}{5} \quad \text{или} \quad 5m - 4k = 1$$

имеет частное решение $m = k = 1$, поэтому $m = 4n + 1$.

б) Условие $\sin \alpha \cos \beta = 1$ равносильно $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2$, откуда $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = 1$. Это приводит нас к системе

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{x} - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \frac{\alpha}{x} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$$

где $\alpha = 1992\pi^2$. Решая ее, находим $x = (k - n)\pi$, $\alpha/x = \pi/2 + \pi(n + k)$. Исключая x , получаем уравнение в целых числах

$$2 \cdot 1992 = (k - n)(1 + 2k + 2n) \quad \text{или} \quad 3 \cdot 16 \cdot 83 = (k - n)(1 + 2k + 2n).$$

Поскольку множитель $1 + 2k + 2n$ заведомо нечетен, он может равняться либо 1, либо 3, либо 83, либо 249 (и то же со знаком минус). Соответственно для $k - n$ также имеем по 4 положительных и отрицательных вариантов.

в) Поскольку условие $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ означает

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

(при допустимых α, β), имеем после упрощений

$$\frac{2 \sin^2 x}{4 \sin^6 x + 1} = \frac{2}{3} + n.$$

Очевидно, подходят только неотрицательные целые n . Иными словами, должно выполняться неравенство

$$\frac{2 \sin^2 x}{4 \sin^6 x + 1} - \frac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow 8y^3 - 6y + 2 \leq 0,$$

где $y = \sin^2 x$. Отсюда $(y+1)(2y-1)^2 \leq 0$, т.е. $y = 1/2$.

Р 7. а) Постройте графики!

б) Надо отобрать принадлежащие интервалу $(0; 8)$ решения уравнения $\sin x = 1/\sqrt{2}$.

в) Раскрывая модуль с положительным знаком, приходим к уравнению

$$2 \sin^2 x - 2 \sin x + 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x \sin x.$$

Отсюда либо $\sin x = 0$, либо $\sin x - 1 = 2 \cos x(\sin x - 1)$, что дает три серии решений: $\pm\pi/3 + 2\pi n$, $\pi/2 + 2\pi k$, $2\pi m$. Условию $\cos x - 2 \sin 2x - \cos 3x \geq 0$ все найденные решения удовлетворяют. Раскрыв модуль со знаком минус, находим, еще одну серию, соответствующую уравнению $\cos x = -1/2$. Однако в этом случае

$$\cos 3x = 1 \quad \text{и} \quad \cos x - 2 \sin 2x - \cos 3x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

г) В случае $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ имеем

$$1 + \sqrt{6}(\sin x + \cos x) = 8\sqrt{\sin x \cos x};$$

заменив $\sin x + \cos x = y$, получим

$$26y^2 - 2\sqrt{6}y - 33 = 0$$

и найдем $y = \sqrt{6}/2$.

В случае $\cos x < 0$, $\sin x < 0$ имеем

$$1 - \sqrt{6}(\sin x + \cos x) = -8\sqrt{\sin x \cos x} \quad \text{и} \quad 26y^2 + 2\sqrt{6}y - 33 = 0,$$

тогда $y = -\sqrt{6}/2$.

Р 8. а) Если ни одно из слагаемых в левой части не равно 0 или 1, то

$$\sin^{20} \pi x + \cos^{10} \pi x < \sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 1$$

и корней нет. Значит,

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ \cos \pi x = 0. \end{cases}$$

б) Выделяя полные квадраты, имеем

$$\left(\frac{1}{32 \sin^3 x} - \sin^2 x \right)^2 + \left(2 \sin^3 x - \frac{1}{4 \sin^3 x} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} 32 \sin^{10} x = 1, \\ 8 \sin^6 x = 1, \end{cases}$$

и, значит, $\sin^2 x = 1/2$.

в) Используя вспомогательный угол, переписываем уравнение в виде

$$\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{3\pi x}{2} \right)} \sin(\pi x - \phi) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi x}{2} \right) = 0, \\ \sin(\pi x - \phi) = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение дает $x = 2n/3$. Угол ϕ определяется условием

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2(3\pi x/2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

т. е. $\phi = \pi/6$. Тогда

$$\pi x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = \frac{3k + 2}{3}.$$

Два найденных значения x совпадают только при $k = 0, n = 1; k = -2, n = -2$.

г) При $\cos x = 1, \sin x = 0$ уравнение удовлетворяется. Пусть $\cos x \neq 1$; тогда поскольку $5 \cos^3 x < 5 \cos^2 x$, должно выполняться и

$$3 \sin^3 x + 5 < 5 \cos^2 x \quad \text{или} \quad 3 \sin^3 x + 5 \sin^2 x < 0 \Leftrightarrow 3 \sin x + 5 < 0,$$

что невозможно.

д) Допустимы только такие x , при которых $\sin x > 0, \cos x \geq 0$. Для оценки левой части используем неравенство

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)},$$

в силу которого левая часть не превосходит $2/\sqrt{3}$. Правая часть, по неравенству Коши

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

не меньше $2/\sqrt{3}$. Равенство означает $a = b$ (в обоих случаях), т. е. одновременно $\cos x = 1/2$ и $\sin^2 x = 3/4$.

е) Поскольку $\sin^3 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, необходимо

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \sin^3 x + \cos^3 x = 1, \end{cases}$$

что равносильно $\sin x = 1$.

ж) Допустимыми являются только такие значения x , при которых $\sin x, \cos x \geq 0$. Если $\sin x = 0$, или $\cos x = 0$, уравнение не удовлетворяется. Если же $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$, то

$$\sqrt{\cos^3 x} < \sqrt{\cos x}, \quad \sqrt{\sin^5 x} < \sqrt{\sin x},$$

поэтому

$$\sqrt{\cos^3 x} + \sqrt{\sin^5 x} < \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} < \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}.$$

з) Имеем

$$(\sin 4x - \cos^4 x)^2 = \cos^2 x (\cos^6 x - 1).$$

Правая часть неотрицательна только в двух случаях: 1) $\cos x = 0$, 2) $\cos^2 x = 1$, дающих две системы, к которым сводится исходное уравнение:

$$1) \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin 4x = 0, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \sin 4x = 1. \end{cases}$$

и) Если переписать уравнение в виде

$$\left(\left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) = \frac{1}{4},$$

то станет ясно, что обе скобки не меньше $1/2$, а их произведение не меньше $1/4$, поэтому

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin 2x = \pm 1. \end{cases}$$

к) Имеем

$$(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y) = 3 + \sin^2(x+y).$$

Отсюда видно, что левая часть не меньше 4, поскольку выражение во второй скобке не меньше 2 как сумма двух положительных взаимно обратных чисел. А правая часть не больше 4. Значит,

$$\begin{cases} \sin^2(x+y) = 1, \\ \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y, \\ \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = \pm 1, \\ \operatorname{tg} x = \pm 1, \\ \operatorname{tg} y = \pm 1. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения дают нам

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad y = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

откуда

$$x+y = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(k+n)$$

и для того чтобы выполнялось первое уравнение, n и k надо связать условием $k+n = 2t$, $t \in \mathbb{Z}$, т.е. сумма должна быть четной.

л) Имеем

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sin 3x \sin 8x - \sqrt{3} \cos 3x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sqrt{3 + \sin^2 8x} \sin(3x - \phi).$$

Модуль левой части не меньше 2, модуль правой — не больше. Значит, как минимум, должны выполняться условия

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm 1, \\ \sin 8x = \pm 1, \end{cases}$$

(берем либо только верхние, либо только нижние знаки). Но это невозможно.

м) Уравнение выглядит более чем вегетарианским; так и кажется, что, преобразовав левую часть в произведение, как это делалось на заре изучения тригонометрии, всё получится, однако... Форма записи намекает, что левая часть не дотягивает до трех, и поэтому решений нет. Оценим модуль левой части, воспользовавшись неравенством

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Имеем цепочку

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin 3x + 2 \sin 2x| &= 2|-\sin x \cos 2x + \sin 2x| \leq 2(|\sin x \cos 2x| + |\sin 2x|) \leq \\ &\leq 2(|\cos 2x| + |\sin 2x|) \leq 2\sqrt{2} < 3, \end{aligned}$$

подтверждающую наше предположение.

Р 9. а) Уравнение сводится к совокупности

$$\begin{cases} a\sqrt{x-1} = 2\pi k, \\ a\sqrt{x-1} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{cases}$$

б) Имеем

$$a \cos x = 2 \cos^2 x \sin x, \quad \sin x \neq 0.$$

При любом a решением служит серия $x = \pi/2 + \pi k$, т.е. уравнение всегда имеет 2 корня. Если $a \neq 0$, $\cos x \neq 0$, то получаем уравнение $\sin 2x = a$. При $|a| > 1$ корней по-прежнему два. При $a = \pm 1$ добавляется по два корня: $\pi/4$ и $5\pi/4$ для 1 и $3\pi/4$, $7\pi/4$ для -1 . Если же $|a| < 1$, то добавляется 4 корня.

Р 10. а) Приводим уравнение к виду

$$\sin(2x - \phi) = \frac{2a - 3}{5},$$

где $\operatorname{tg} \phi = 3/4$. Значит, $|2a - 3| \leq 5$.

б) При любом a решением является $x = 0$. И, поскольку уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin ax = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

нас интересуют те a , при которых она не имеет решений, т.е. те a , при которых $\pi n/a \neq 2\pi k$ ни при каких целых n и k . Иными словами, $a \neq n/2k$. Если a — число рациональное, то его всегда можно представить в виде $a = n/2k$ (действительно: если $a = p/q$, где p и q — взаимно просты, то $a = 2p/2q$ и $n = 2p$, $k = q$). Значит, условия задачи удовлетворяют любые иррациональные значения a .

$$в) \dots \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{a}{2}, \quad a \geq 0, \quad \text{или}$$

$$\sin y = \pm \frac{a}{2}, \quad \text{где } y = x - \frac{\pi}{3}, \quad y \in [0; 2\pi].$$

Два решения будет только в случае $a = 2$ (при $a = 0$ — три решения, при $0 < a < 2$ — четыре).

г) Замена $\sin x = t$ сводит задачу к исследованию уравнения

$$4t^2 - 2at - a - 1 = 0$$

при $t \in (-1; 0)$. Если $D = 0$, то $a = -2$; тогда $t = -1/2$ и условие выполнено. Если $D > 0$, то надо потребовать: $t_1 \in (-1; 0)$, $t_2 \notin (-1; 0)$, что равносильно неравенству

$$f(0)f(-1) < 0, \quad \text{где } f(t) = 4t^2 - 2at - a - 1.$$

д) Решением уравнения

$$|2t - 1| = 4t^2 - 1,$$

где $t = \cos x$ являются $t = 1/2$ и $t = -1$. Выстраивая по убыванию отрицательные корни уравнений $\cos x = 1/2$ и $\cos x = -1$, получаем последовательность: $-\pi/3$, $-\pi$, $-5\pi/3, \dots$, откуда следует, что $a \leq -5\pi/3$.

е) Преобразуем уравнение:

$$8 \cos^4 x |\sin(2x + a)| = 2 \cos 2x - 2 \cos(4x + 2a) - 2 \cos 2x(4x + 2a) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8 \cos^4 x |\sin(2x + a)| = 2 \cos 2x - 4 \cos^2 x \cos(4x + 2a).$$

Если положить $|\sin(2x + a)| = t$, $t \in [0; 1]$, то получим уравнение

$$4t \cos^4 x - 4t^2 \cos^2 x + 1 = 0,$$

квадратное относительно $\cos^2 x$. Его дискриминант $16t(t^3 - 1)$ неотрицателен лишь при $t = 0$ и $t = 1$ (ибо $t \in [0; 1]$). Первое значение не годится. При $t = 1$ исходное уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2}, \\ \sin(2x + a) = \pm 1. \end{cases}$$

Решением первого уравнения служит серия $x = \pi/4 + \pi k/2$, второго — серия

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} - \frac{a}{2},$$

откуда $a = \pi(m - k)$ или $a = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, поскольку разность $m - k$ может равняться любому целому числу.

ж) Имеем:

$$2 \sin(x + a) \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin(x + a) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Получаются три серии:

$$x = \pi + 2\pi n, \quad x = -a + \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = -a + \frac{5\pi}{6} + 2\pi m.$$

Для ответа на вопрос задачи надо выяснить, сколько членов арифметической прогрессии можно вставить между π и 3π (которые также принадлежат этой прогрессии). Теоретически варианта два:

а) по одному из каждой серии

$$x = -a + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = -a + \frac{5\pi}{6} + 2\pi m;$$

б) только один, если один из корней совпадает с π или 3π ; оба совпадать не могут, поскольку разность между ними равна $2\pi/3 + 2\pi(n - k)$. В случае а) $d = 2\pi/3$, т. е. прогрессия такова: $\pi, 5\pi/3, 7\pi/3, 3\pi$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} -a + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{3}, \\ -a + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k = \frac{7\pi}{3}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} a = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \\ a = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

В случае б) условия противоречивы.

Р 11. Приводим уравнение к виду $2 \sin a \sin(2x + a) = \sin a - 3$, что при $a \neq \pi n$ равносильно

$$\sin(2x + a) = \frac{\sin a - 3}{2 \sin a}.$$

Обозначив $\sin a = t$ и решив двойное неравенство

$$-1 \leq \frac{t - 3}{2a} \leq 1$$

с учетом условия $|t| \leq 1$, убедимся, что годится только $t = 1$, откуда $a = \pi/2 + 2\pi k$; тогда

$$\sin(2x + a) = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + \pi(k + m).$$

Отрезку $[\pi; 2\pi]$ это решение принадлежит только если $k + m = 2$; тогда $x = 3\pi/2$. Если $a = \pi n$, исходное уравнение приводится к виду $\sin^2 x = 2$.

Р 12. Для раскрытия целой части надо рассмотреть три случая: 1) $x \in [1; 2)$; 2) $x \in [2; 3)$; 3) $x \in [3; \pi]$. В первом случае получаем уравнение $\sin^5(3x + a) = -1$, откуда

$$x = \frac{4\pi n - \pi - 2a}{6};$$

указанному промежутку этот корень может принадлежать только, если $n = 1$. Во втором случае имеем $\sin^5(3x + a) = 1$, откуда

$$x = \frac{4\pi k + \pi - 2a}{6};$$

годится только $k = 1$. В третьем случае снова имеем

$$\sin^5(3x + a) = -1 \quad \text{и} \quad x = \frac{4\pi m - \pi - 2a}{6},$$

но отрезку $[3; \pi]$ данный корень может принадлежать только при $m = 2$. Итак, возможными корнями могут быть только

$$x_1 = \frac{3\pi - 2a}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi - 2a}{6}, \quad x_3 = \frac{7\pi - 2a}{6}.$$

Уравнение имеет корень x_1 , если $x_1 \in [1; 2)$, откуда $a \in [0; 3\pi/2 - 3]$ (мы помним, что $a \in [0; \pi]$ по условию). Аналогично для второго и третьего корня получаем

$$a \in \left[0; \frac{5\pi}{2} - 6\right] \quad \text{и} \quad a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} - 9\right].$$

Теперь остается выстроить задействованные числа по порядку:

$$0 < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - 3 < \frac{5\pi}{2} - 6 < \frac{7\pi}{2} - 9,$$

закрасить каждый отрезок и посмотреть, при каких a они имеют одну или три общие точки. Одна точка будет при

$$a \in \left(\frac{5\pi}{2} - 6; \frac{7\pi}{2} - 9\right],$$

три — при

$$a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} - 3\right].$$

Р 13. Уравнение

$$\sin \frac{4x}{13} = 0$$

выполнено при $x = 13\pi n/4$, где целое $n > 0$, $n \neq 2, 6, 10, \dots$; уравнение $\operatorname{tg} x = 0$ выполнено при $x = \pi k$, где (с учетом условий) $k = 2, 3, \dots$. Таким образом, возможные корни исходного уравнения образуют последовательность $2\pi, 3\pi, 13\pi/4, 4\pi, \dots, 9\pi, 39\pi/4, \dots$. Нам нужно отрезком

$$[2\pi a; (a^2 + 1)\pi]$$

поймать ровно 6 корней. Если $a \geq 4$, то длина этого отрезка превышает 9π и внутри него содержится более 6 корней вида πk . Если же $a < 3$, то внутри отрезка будет меньше 6 корней. Итак, $3 \leq a < 4$. Если $a = 3$, то уравнение имеет ровно 6 корней: $6\pi, 7\pi, 8\pi, 9\pi, 39\pi/4, 10\pi$. Если $a > 3$, то уравнение будет иметь ровно 6 корней — а именно $7\pi, 8\pi, 9\pi, 39\pi/4, 10\pi, 11\pi$, — если

$$\begin{cases} 6\pi < 2\pi a \leq 7\pi, \\ 11\pi \leq (a^2 + 1)\pi < 12\pi, \end{cases}$$

откуда $a \in [\sqrt{10}; \sqrt{11})$. Корнями будут $8\pi, 9\pi, 39\pi/4, 10\pi, 11\pi, 12\pi$, если

$$\begin{cases} 7 < 2a \leq 8, \\ 12 \leq a^2 + 1 < 13. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

Р 14. Формулировка позволяет нам выбрать наиболее «удобное» a и посмотреть, что будет. Заметим, что если $a = 0$, то уравнение будет иметь решение только при $5b^2 = 5$, откуда $b = \pm 1$. При $b = 1$ имеем $\cos(2a + ax) + 4 \cos(a^2 x) = 5$, откуда

$$\begin{cases} \cos(ax + 2a) = 1, \\ \cos a^2 x = \pm 1. \end{cases}$$

Ясно, что если взять, например, $a = \sqrt{2}$, то система будет несовместна. Значит, $b = 1$ условию не удовлетворяет. Если же $b = -1$, то имеем уравнение $\cos ax + 4 \cos(a^2 x) = 5$, решением которого при любом a будет $x = 0$.

Р 15. Приведем первое уравнение к виду

$$\sin(x + \phi) = b, \quad \text{где} \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{a-1}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - 2a + 4}}.$$

Тогда $x = (-1)^n \arcsin b - \phi + \pi n$. Второе уравнение приведем к виду

$$2a \sin^2 y = 3 \sin y - 4 \sin y \cos y,$$

откуда $\sin y = 0$ или $4 \cos y + 2a \sin y = 3$. Уравнение $\sin y = 0$ имеет три корня на отрезке $[0; 2\pi]$ — это $0, \pi$ и 2π . Уравнение $4 \cos y + 2a \sin y = 3$ приводится к виду

$$\sin(y + \psi) = c, \quad \text{где} \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{2}{a}, \quad c = \frac{3}{4\sqrt{a^2 + 4}}.$$

Отсюда $y = (-1)^k \arcsin c - \psi + \pi k$. Принадлежность найденных корней отрезку $[0; 2\pi]$ зависит от значений параметра. Пусть сначала $a < 0$. Тогда получаются корни

$$x_1 = \arcsin b - \phi, \quad x_2 = \pi - \arcsin b - \phi$$

для первого уравнения; $y_1 = \arcsin c - \psi$, $y_2 = \pi - \arcsin c - \psi$ — для второго (плюс три найденных ранее). Итак,

$$X = \pi - 2\phi, \quad Y = 4\pi - 2\psi, \quad \frac{X - Y}{2} = \psi - \phi - \frac{3\pi}{2}.$$

Имеем уравнение $\operatorname{tg}(\psi - \phi) = -\sqrt{3}$, которое после раскрытия тангенса, приводит к уравнению

$$a^2 - 4a - 2a\sqrt{3} = 0,$$

откуда $a_1 = 0$, $a_2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Условию $a < 0$ эти корни не удовлетворяют (но в ответ войдут после рассмотрения других случаев). Пусть теперь $a = 0$; тогда оба уравнения решаются и дают: $x_1 = 5\pi/12$, $x_2 = 11\pi/12$, $y_1 = \arccos 3/4$, $y_2 = 2\pi - \arccos 3/4$ (плюс три указанных корня). Тогда

$$\frac{X - Y}{2} = -\frac{11\pi}{6}$$

и условие задачи выполнено. В случае $0 < a \leq 1$ мы имеем

$$x_1 = \arcsin b - \phi, \quad x_2 = \pi - \arcsin b - \phi,$$

$$y_1 = 2\pi + \arcsin c - \psi, \quad y_2 = \pi - \arcsin c - \psi, \quad \frac{X - Y}{2} = \psi - \phi - \frac{5\pi}{2}$$

и мы получаем те же значения параметра, что и выше (и они снова здесь не годятся). Пусть теперь $a > 1$. Тогда корень

$$x_1 = \arcsin b - \phi = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - 2a + 4}} - \arcsin \frac{a - 1}{\sqrt{a^2 - 2a + 4}}$$

принадлежит отрезку $[0; 2\pi]$, только если $\sqrt{2} \geq a - 1$. Проверка показывает, что здесь мы снова не получаем новых значений параметра. Если же $\sqrt{2} < a - 1$, т.е. $a > 1 + \sqrt{2}$, то мы имеем

$$x_1 = \arcsin b - \phi + 2\pi, \quad x_2 = \pi - \arcsin b - \phi, \quad X = 3\pi - 2\phi$$

а для второго уравнения все остается так же, как в случае $0 < a \leq 1$, т.е.

$$Y = 6\pi - 2\psi, \quad \frac{X - Y}{2} = \psi - \phi + \frac{3\pi}{2}$$

и мы получаем уже подходящее нам значение $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

Кунсткамера

$$\text{Р 1. } \dots \Leftrightarrow -25 \sin(x + \phi) \cdot \left(50 \left(\cos x - \frac{7}{25} \right)^2 - \frac{2598}{25} \right) = 2598, \quad \text{где } \phi = \operatorname{arctg} \frac{7}{24},$$

$$\text{или } \sin(x + \phi) \cdot (2598 - 1350t^2) = 2598,$$

где $t = \cos x - 7/25$. Отсюда

$$\begin{cases} t = 0, \\ \sin(x + \phi) = 1, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{7}{25}, \\ x + \operatorname{arctg} \frac{7}{24} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Р 2. Приведем уравнение к виду

$$2\sqrt{2} \sin 4x + 2\sqrt{2} \cos 7x \cos 4x = 10 + 6 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

или

$$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos^2 7x} \sin(4x + \phi) = 10 + 6 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Левая часть не больше 4, правая — не меньше. Значит,

$$\begin{cases} \cos 7x = \pm 1, \\ \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{7}, \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \end{cases}$$

откуда $12n + 35 = 42k$. Таким образом, $n = 7m$ и тогда $12m + 5 = 6k$. Но это уравнение решений в целых числах не имеет.

Р 3. В силу неравенства $yz \geq 2z^2 + 64 \geq 64$ первая скобка в правой части отрицательна, значит, вся правая часть ≤ 0 , причем равенство 0 возможно только при

$$\cos 2\pi y + \cos 2\pi z = 0.$$

Тогда надо потребовать

$$x^2 + 1 - 2x \sin \pi y \leq 0 \quad \text{или} \quad (x - \sin \pi y)^2 + \cos^2 \pi y \leq 0,$$

откуда

$$\begin{cases} x - \sin \pi y = 0, \\ \cos \pi y = 0, \end{cases}$$

т. е.

$$1) \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{2} + 2n;$$

$$2) \quad x = -1, \quad y = -\frac{1}{2} + 2n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Осталось согласовать найденное с условиями

$$\begin{cases} yz - 2z^2 - 64 = 0, \\ \cos 2\pi y + \cos \pi z = 0. \end{cases}$$

Но

$$\cos 2\pi y = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos \pi z = 1$$

и тогда $z = 2k$.

Сначала, если $y = 1/2 + 2n$, решаем в целых числах уравнение

$$4nk + k - 8k^2 = 64 \quad \text{или} \quad (4n + 1)k = 8(k^2 + 8).$$

Отсюда $k = 8m$; подставляя, получаем $(4n + 1)m = 64m^2 + 8$, откуда $m = 8t$ и тогда

$$(4n + 1)t = 512t + 1 \quad \text{или} \quad (4n - 511)t = 1.$$

Это равенство возможно в двух случаях: $m = \pm 1$, $4n - 511 = \pm 1$. Решая, находим $n = 128$, $t = 1$. Тогда

$$y = 256\frac{1}{2}, \quad z = 128.$$

Аналогично рассматриваем случай $y = -1/2 + 2n$.

 Ответы

1. а) $\pi/2 + \pi k$, $\pm(1/2) \arccos(3/5) + \pi n$; б) $-\pi/4 + \pi k$, $(-1)^n(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} + \pi/4 + \pi n$;
 в) $2\pi/5 + 2\pi n$; г) $-\pi/8 + (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}/2)/2 + \pi n/2$; 2. а) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$;
 $\pi/4 + \pi n$. б) πn , $\pi/2 + \pi k$. в) $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, $-\pi/2 + 2\pi k$, $(-1)^n \pi/6 + \pi m$.
 г) $(-1)^n \arcsin((1-\sqrt{5})/2) + \pi n$; д) $\pi/4 + 2\pi k$; е) $180^\circ \cdot n$; ж) $5\pi/4 + 5\pi n$,
 $-5\pi/12 + 5\pi k$, $-5\pi/3 + 5\pi m$; 3. а) $\pi + 2\pi n$. б) πn , $\pi/4 + \pi k/2$; в) $\pm \pi/12 + \pi n/2$;
 г) $-\pi/8 + \pi n$; д) $\pm \pi/6 + \pi n$; е) $\pm 1/2 \arcsin \sqrt{2/3} + \pi n/2$; ж) $\pi/2 + \pi n$, $\pi/4 + \pi k/2$;
 з) $\pm \arccos \sqrt{3/8} + \pi n$, $\pi/2 + \pi k$. и) $\pi n/4$; 4. а) -3π , $-5\pi/2$, $-3\pi/2$, $-\pi$, $-\pi/2$,
 $\pi/2$, π , $3\pi/2$. б) $\pi/14 + \pi n/7$. в) $\emptyset$. г) $\pm \operatorname{arctg} 1/2$; д) $\pi/4 + \pi n/2$; е) $\pm \pi/3 + \pi n$;
 5. а) $\arccos 1/\sqrt{5} + 2\pi n$, $\pi - \arccos 1/\sqrt{5} + 2\pi k$; б) $\pi/2 - (1/2) \arcsin(1/4)$;
 в) $-\pi/4 + (-1)^n \pi/4 + \pi n$, $-\pi/4 + (-1)^k \pi/3 + \pi k$; г) $(-1)^n \pi/6 + \pi n$; д) $\pi/3$.
 е) $\arccos 2/3$; 6. а) $2\pi + 8\pi n$; б) -1328π , -48π , 16π , 3984π ; в) $\pi/4 + \pi n/2$;
 7. а) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $[-\pi - 2\pi k; -2\pi k]$, $n, k \geq 0$. б) $\pi/4$, $3\pi/4$, $9\pi/4$. в) $\pm \pi/3 + 2\pi n$,
 $\pi/2 + 2\pi k$, $2\pi m$. г) $\pi/12 + \pi n$; 8. а) $n/2$. б) $\pi/4 + \pi n/2$; в) $-4/3$, $2/3$; г) $2\pi n$;
 д) $\pi/3 + 2\pi n$; е) $\pi/2 + 2\pi n$; ж) $\emptyset$; з) $\pi/2 + \pi n$; и) $(-1)^n \pi/4 + \pi n$;
 к) $(\pi/4 + \pi n; \pi/4 + \pi k)$, $k + n = 2t$, $t \in \mathbb{Z}$. л) $\emptyset$; м) $\emptyset$; 9. а) Если $a < 0$, то
 $x_1 = 1 + 4\pi^2 k^2/a^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq 0$; $x_2 = 1 + 4\pi^2(1 + 3n)^2/9a^2$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Если
 $a = 0$, то $x \geq 1$. Если $a > 0$, то $x_1 = 1 + 4\pi^2 k^2/a^2$, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$;
 $x_2 = 1 + 4\pi^2(1 + 3n)^2/9a^2$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. б) 2 решения при
 $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$; 4 решения при $a = \pm 1$; 6 решений при
 $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$; 10. а) $a \in [-1; 4]$; б) a иррационально; в) $a = 2$. г) $a \leq -3$,
 $a = -2$, $a \geq -1$; д) $a \leq -5\pi/3$. е) πn ; ж) $a = -3\pi/2 + 2\pi n$; 11. Если
 $a = \pi/2 + 2\pi k$, то $x = 3\pi/2$; при других a решений нет;
 12. $a \in [\pi/2; 3\pi/2 - 3] \cup (5\pi/2 - 6; 7\pi/2 - 9]$; 13. $a = 3$, $a \in [\sqrt{10}; \sqrt{11}]$;
 14. $b = -1$; 15. $a = 0$, $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

 Кунсткамера

1. $\operatorname{arctg}(24/7) + 2\pi k$; 2. $\emptyset$; 3. $(\pm 1; \pm 256\frac{1}{2}; \pm 128)$.

§ 13. Две дюжины уравнений с обратными тригонометрическими функциями

Чрезмерно длинное название раздела объясняется длиной написания имен главных действующих лиц: арксинусов, арккосинусов и т. д. А также тем, что данные персонажи еще меньше любимы нашими подопечными, чем «обычные» синусы-косинусы...

1. Решить уравнение $9 \arccos^2 2x - 3\pi \arccos 2x = 2\pi^2$.

◀ Здесь присутствие обратных тригонометрических еще чисто декоративное; это, однако, сразу превращает уравнение в нечто большее, чем просто квадратное.

Пусть $\arccos 2x = y$, тогда $y \in [0; \pi]$, и уравнение принимает вид

$$9y^2 - 3\pi y - 2\pi^2 = 0.$$

Его корни $y_1 = -\pi/3$, $y_2 = 2\pi/3$, условию $y \in [0; \pi]$ удовлетворяет только y_2 . Значит, $\arccos 2x = 2\pi/3$; тогда $2x = \cos 2\pi/3 = -1/2$, т. е. $x = -1/4$. ►

❧ **Ответ:** $-1/4$.

2. Решить уравнение

$$\arccos \left(\frac{1}{2} + \cos \left(\pi \frac{2x - x^2 + 11}{x^2 + 4x + 7} \right) \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

◀ И эта задача, в сущности, «не на то», поскольку главное действующее лицо — арккосинус — только открывает драму, как Пролог, и сразу уходит со сцены.

Имеем:

$$\frac{1}{2} + \cos \left(\frac{\pi(2x - x^2 + 11)}{x^2 + 4x + 7} \right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi(2x - x^2 + 11)}{x^2 + 4x + 7} \right) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(2x - x^2 + 11)}{x^2 + 4x + 7} = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)x^2 + (4n+1)x + 7n - 2 = 0. \quad (*)$$

Дискриминант этого уравнения $D = -6n^2 - 5n + 5$; условие $D \geq 0$ в сочетании с $n \in \mathbb{Z}$ дает две возможности: $n = 0$ и $n = -1$.

Если $n = 0$, уравнение $(*)$ принимает вид $x^2 + x - 2 = 0$; его корни $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

При $n = -1$ имеем $-3x - 9 = 0$, откуда $x = -3$. Проверка не нужна. ►

❧ **Ответ:** -3 ; -2 ; 1 .

3. Решить уравнение $\sqrt{2x-1} \cdot \arcsin(3x^2 - 10x + 3) = 0$.

◀ Здесь, как это часто случается в уравнениях такого типа, недостаточно просто по отдельности приравнять к нулю множители: надо, чтобы корень каждого уравнения принадлежал области определения другого. Таким образом:

а) корень уравнения $\sqrt{2x-1} = 0$, т. е. $x = 1/2$, является посторонним, так как при $x = \frac{1}{2}$

$$\arcsin(3x^2 - 10x + 3)$$

не определен ($3 \cdot (1/4) - 5 + 3 = -1\frac{1}{4}$);

б) если

$$\begin{aligned}\arcsin(3x^2 - 10x + 3) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 3.\end{aligned}$$

Но условию $2x - 1 \geq 0$ удовлетворяет только $x_2 = 3$. ►

🔍 **Ответ:** 3.

4. Решить уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = -1$.

◀ Теперь пришло время использовать основные формулы, относящиеся к связи обратных тригонометрических функций друг с другом, а именно

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Выразим $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$ и, положив $\arcsin x = y$, придем к уравнению

$$y^2 - \frac{\pi}{2}y - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Нас интересуют только те корни этого уравнения, которые удовлетворяет условию

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{т.е.} \quad y = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{\pi^2 + 8\pi}}{4}.$$

Отсюда

$$x = \sin \left(\frac{\pi - \sqrt{\pi^2 + 8\pi}}{4} \right). \quad \blacktriangleright$$

🔍 **Ответ:** $\sin((\pi - \sqrt{\pi^2 + 8\pi})/4)$.

5. Решить уравнение $\arccos 2x = \arcsin x$.

◀ Тут, чтобы избавиться от «аркусов», уже нет иного пути, кроме применения к обеим частям уравнения какой-либо функции, т.е. в переходе от равенства углов к равенству их синусов, косинусов или тангенсов (котангенсов). Имеем:

$$\begin{aligned}\arccos 2x = \arcsin x &\Rightarrow \sin(\arccos 2x) = \sin(\arcsin x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - 4x^2} = x.\end{aligned}$$

Решением последнего уравнения является $x = 1/\sqrt{5}$. ►

🔍 **Ответ:** $1/\sqrt{5}$.

6. Решить уравнение $2 \arcsin 2x = \arccos 7x$.

◀ Беря косинус от обеих частей равенства и используя формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

получаем

$$1 - 2(2x)^2 = 7x \quad \text{или} \quad 8x^2 + 7x - 1 = 0,$$

откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1/8$. Поскольку корни должны удовлетворять условиям $|2x| \leq 1$ (область определения $\arcsin 2x$), $|7x| \leq 1$ (область определения $\arccos 7x$) и $x \geq 0$ (неотрицательность арккосинуса влечет за собой неотрицательность арксинуса, а та — неотрицательность аргумента), подходит только $x = 1/8$. ▶

☛ **Ответ:** $1/8$.

7. Решить уравнение

$$\arcsin x \cdot \arccos \frac{1}{x^2} + \arcsin \frac{1}{x^2} \cdot \arccos x = 0.$$

◀ В этом уравнении уже нет нужды в каких-либо преобразованиях — оно относится к категории случаев, *когда помогает ОДЗ*. Действительно, одновременно должны выполняться условия

$$|x| \leq 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^2} \leq 1,$$

что сразу сужает ОДЗ до двух значений: $x = \pm 1$, которые можно просто подставить в уравнение и убедиться, что ему удовлетворяет $x = 1$. ▶

☛ **Ответ:** 1 .

8. Решить уравнение $\arcsin(1-x) = \arccos(1+x)$.

◀ И здесь ситуация сходная с предыдущей — одновременное выполнение неравенств

$$|1-x| \leq 1 \quad \text{и} \quad |1+x| \leq 1$$

возможно только при $x = 0$ (поскольку решением первого служит промежуток $[0; 2]$, а второго — $[-2; 0]$). Однако равенство $\arcsin 1 = \arccos 1$ неверно, поэтому решений данное уравнение не имеет. ▶

☛ **Ответ:** $\emptyset$.

9. Решить уравнение

$$\arcsin \frac{x^2 - 8}{8} = 2 \arcsin \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

◀ Казалось бы, совершенно законно вычислить синус от обеих частей равенства. Но что же получается? Получается уравнение

$$\frac{x^2 - 8}{8} = -\cos \left(2 \arcsin \frac{x}{4} \right) \quad \text{или} \quad \frac{x^2 - 8}{8} = 2 \left(\frac{x}{4} \right)^2 - 1,$$

т. е. тождество

$$\frac{x^2 - 8}{8} = \frac{x^2 - 8}{8}.$$

ОДЗ определяется условиями

$$\left| \frac{x^2 - 8}{8} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{x}{4} \right| \leq 1,$$

из которых следует ограничение $x \in [-4; 4]$. Кроме того, должно выполняться двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2 \arcsin \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2},$$

дающее $\arcsin(x/4) \geq 0$, т. е. $x \geq 0$. Значит, уравнению удовлетворяют все значения x , для которых $x \in [0; 4]$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [0; 4]$.

10. Решить уравнение $2 \arcsin x - \arcsin 2x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$.

◀ Чтобы не попасть впросак в этом уравнении, нужно обратиться к формуле

$$\arccos \sqrt{1 - x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ -\arcsin x, & \text{если } x \in [-1; 0]. \end{cases}$$

ОДЗ определяется условием $x \in [-1/2; 1/2]$. Таким образом, если $x \in [0; 1/2]$, то уравнение эквивалентно уравнению $\arcsin x = \arcsin 2x$, очевидный корень которого $x = 0$.

Если же $x \in [-1/2; 0)$, то уравнение принимает вид

$$3 \arcsin x = \arcsin 2x.$$

Беря синус от обеих частей и вспоминая формулу синуса тройного угла, получаем после сокращения на $x \neq 0$ уравнение $3 - 4x^2 = 2$, откуда $x = -1/2$. ▶

☛ **Ответ:** $-1/2; 0$.

$$11. \text{ Решить уравнение } 4 \operatorname{arctg}(x+2) = \pi(x^3 - x^5 - x).$$

◀ Поскольку левая и правая части представлены функциями разного типа, решение включает в себя подбор (корня) и оценку (обеих частей уравнения). Начнем со второй позиции. Левая часть — функция возрастающая. Для исследования правой рассмотрим функцию $y = x^3 - x^5 - x$; ее производная $y' = 3x^2 - 5x^4 - 1$ всегда отрицательна, поскольку отрицателен как дискриминант квадратного (относительно x^2) трехчлена, так и его старший коэффициент. Значит, правая часть уравнения — функция убывающая. Таким образом, корень уравнения может иметь только один. Исходя из таблицы значений арктангенса, возможные корни следует искать только среди чисел $x = -2$, $x = -1$. Проверка показывает, что второе значение — корень уравнения. ►

● **Ответ:** $x = -1$.

$$12. \text{ Решить уравнение } \cos(2 \arcsin x) = \arcsin(\cos 3x).$$

◀ Не впадем в соблазн, воображая, что можно сразу однозначно преобразовать обе части уравнения. То есть левая часть, конечно, всегда равна $1 - 2x^2$, а вот правая.... Переписав ее в виде $\pi/2 - \arccos(\cos 3x)$, рассмотрим два случая: а) $-1 \leq x < 0$; б) $0 \leq x \leq 1$ (поскольку в ОДЗ $x \in [-1; 1]$).

Если $-1 \leq x < 0$, то $-3 \leq 3x < 0$ и, вспоминая график функции $\arccos(\cos x)$, имеем $\arccos(\cos 3x) = -3x$.

Таким образом, мы получили уравнение

$$1 - 2x^2 = \frac{\pi}{2} + 3x \quad \text{или} \quad 2x^2 + 3x + \frac{\pi}{2} - 1 = 0.$$

Условию $-1 \leq x < 0$ удовлетворяет корень $x = \frac{(-3 + \sqrt{17 - 4\pi})}{4}$.

Пусть теперь $0 \leq x \leq 1$; тогда $\arccos(\cos 3x) = 3x$, и мы имеем

$$1 - 2x^2 = \frac{\pi}{2} - 3x \quad \text{или} \quad 2x^2 - 3x + \frac{\pi}{2} - 1 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{(3 \pm \sqrt{17 - 4\pi})}{4}.$$

Нам подходит только $x = \frac{(3 - \sqrt{17 - 4\pi})}{4}$. ►

● **Ответ:** $x = \frac{(-3 + \sqrt{17 - 4\pi})}{4}$, $x = \frac{(3 - \sqrt{17 - 4\pi})}{4}$.

13. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi(1+x)^2}{4}$$

◀ Воспользуемся формулой тангенса суммы и посчитаем тангенс от левой части равенства; мы получим

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{x + 1 - x/(1+x)}{1 - x(1-x)/(1+x)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi(1+x)^2}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

причем целое число n должно быть выбрано из условия выполнимости неравенства

$$\left| \frac{\pi}{4} + \pi n \right| < \pi$$

(поскольку в таком диапазоне изменяется сумма двух арктангенсов) и даже

$$0 < \frac{\pi}{4} + \pi n < \pi$$

(ведь правая часть уравнения положительна ввиду очевидного ограничения $x \neq -1$). Отсюда $n = 0$; тогда

$$\frac{\pi(1+x)^2}{4} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2.$$

Проверка (всегда необходимая при таком способе решения как переход от равенства $x = y$ к $f(x) = f(y)$) показывает, что второе значение не годится: левая часть исходного уравнения отрицательна: $\operatorname{arctg}(-2) + \operatorname{arctg}(-3) < 0$. Итак, $x = 0$. ▶

✎ **Ответ:** 0.

14. Решить уравнение

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \sin 2x.$$

◀ Это уравнение, в отличие от предыдущих, является периодическим — с периодом π , т. е. если x_0 — корень данного уравнения, то $x_0 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — тоже. Поэтому достаточно решить уравнение на любом отрезке (точнее — ин-

тервале, поскольку ОДЗ требует: $x \neq \pi/2 + \pi k$ длиной π , а потом продолжить по периодичности на всё множество действительных чисел. Выберем для этой цели интервал $(-\pi/2; \pi/2)$, который можно уменьшить до $[0; \pi/2)$, поскольку, в силу нечетности синуса, тангенса и арктангенса, если уравнению удовлетворяет число x_0 , то удовлетворяет и $-x_0$.

Заметим, что корнями уравнения являются $x = 0$ и $x = \pi/4$, а при $x \in (\pi/4; \pi/2)$ корней нет: действительно, на этом интервале

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{4x}{\pi} > 1,$$

тогда как $\sin 2x < 1$.

Докажем, что корней нет и на интервале $x \in (0; \pi/4)$. Для этого рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{4x}{\pi} - \sin 2x,$$

предположим, что $f(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in (0; \pi/4)$. Поскольку также $f(0) = 0$ и $f(\pi/4) = 0$, то на отрезке $[0; \pi/4]$ мы имеем три нуля функции. Функция $f(x)$ имеет производную во всех точках данного отрезка, значит, выполнены условия теоремы Ролля, согласно которой между нулями функции должен находиться нуль производной. В нашем случае это означает, что производная

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} - 2 \cos 2x$$

дважды обращается в ноль на отрезке $[0; \pi/4]$. Однако на данном отрезке уравнение $\cos 2x = 2/\pi$ имеет только одно решение. ►

☛ **Ответ:** $\pi n, \pm \pi/4 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

15. Решить уравнение $x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x$.

◀ Конечно, перед глазами решающего сразу возникает зубчатая стена функции $\arcsin(\sin x)$, в двух точках пробитая параболой $y = x^2 - 10x$.

Почему именно в двух? Вопрос, конечно, интересный и не вовсе праздный, но мы оставим его на рассмотрение читателя. Одна точка ясна: это $x = 0$. Вторая находится где-то вблизи 3π чуть правее. (Правее, потому что

$$(3\pi)^2 - 10 \cdot 3\pi = 3\pi(3\pi - 10) < 0,$$

а $\arcsin(\sin 3\pi) = 0$.)

Значит, нужно преобразовать выражение $\arcsin(\sin x)$ на участке $(3\pi; 7\pi/2)$. Как это делается, мы знаем:

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x - 3\pi)) = -(x - 3\pi) = 3\pi - x.$$

Итак, имеем уравнение $x^2 = 3\pi - x + 10x$ или $x^2 - 9x - 3\pi = 0$. Нужный нам корень

$$x = \frac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}$$

(второй не принадлежит интервалу $(3\pi; 7\pi/2)$). ►

☞ **Ответ:** 0, $(9 + \sqrt{81 + 12\pi})/2$.

16. Решить уравнение $\arccos(\sin x) + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = \arcsin(\cos x)$.

◀ И это устрашающее уравнение спасает периодичность — только теперь период равен 2π , да и само уравнение не столь симметрично, так что надо рассмотреть несколько большее число случаев, чем в примере 14.

Прежде всего, используем тождества

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$$

и перепишем уравнение в виде

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$$

$$\text{или} \quad \arccos(\cos x) + \frac{\pi}{2} = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) + \arcsin(\sin x).$$

Разобьем интервал $(0; 2\pi)$ на 4 естественные четверти и решим уравнение в каждой из них.

а) Пусть $x \in (0; \pi/2]$; тогда

$$\arccos(\cos x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = \arcsin(\sin x) = x,$$

и уравнение принимает вид $x + \pi/2 = 2x$, откуда $x = \pi/2$ — корень уравнения.

б) Если $x \in (\pi/2; \pi)$, то

$$\arccos(\cos x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad \arcsin(\sin x) = \pi - x.$$

Решением уравнения $x + \pi/2 = x + \pi - x$ снова является $x = \pi/2$.

в) Пусть $x \in (\pi; 3\pi/2]$; тогда

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x, \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi, \quad \arcsin(\sin x) = \pi - x.$$

Имеем уравнение

$$2\pi - x + \frac{\pi}{2} = x - \pi + \pi - x,$$

отсюда $x = 5\pi/2$ — не годится.

г) Если, наконец, $x \in (3\pi/2; 2\pi)$, то

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x, \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi, \quad \arcsin(\sin x) = x - 2\pi.$$

Уравнение

$$2\pi - x + \frac{\pi}{2} = x - \pi + x - 2\pi$$

имеет корень $x = 11\pi/6$, являющийся корнем исходного уравнения.

Теперь, используя периодичность, получаем окончательный ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

● **Ответ:** $x = \pi/2 + 2\pi n$, $x = 11\pi/6 + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

17. Решить уравнение $2 \arcsin x = \arcsin (2x + 1)$.

◀ Взяв, как положено синус (или косинус) от обеих частей, получим уравнение $x^4 + x + 1/4 = 0$, решить которое затруднительно. Неизбежное обращение к графикам (скажем, $y = x^4 + 1/4$ и $y = -x$), показывает, что корни есть и даже два. Поскольку найти их не представляется возможным, возникает предположение, что исходное уравнение корней не имеет, а два решения уравнения $x^4 + x + 1/4 = 0$ дают посторонние корни.

И действительно. ОДЗ уравнения $x \in [-1; 0]$. Разобьем этот отрезок на 3 части.

Если $x \in [-1/2; 0]$, то

$$\arcsin (2x + 1) \geq 0, \quad 2 \arcsin x \leq 0$$

и решений нет (поскольку $x = 0$ не корень).

Если $x \in [-1; -\sqrt{2}/2]$, то

$$2 \arcsin x \leq -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin (2x + 1) \geq -\frac{\pi}{2}$$

— решений нет.

Наконец, если $x \in (-\sqrt{2}/2; -1/2)$, то

$$-\frac{\pi}{2} < 2 \arcsin x < -\frac{\pi}{3}, \quad \arcsin (2x + 1) > \arcsin (-\sqrt{2} + 1) > -\frac{\pi}{3},$$

так как

$$1 - \sqrt{2} > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \sqrt{3} + 2 \Leftrightarrow 1 < 4\sqrt{3},$$

что верно.

Итак, уравнение решений не имеет. Интересно отметить, что в учебнике «Основной курс тригонометрии, развиваемый на целесообразных задачах» И. К. Андропова и А. К. Окунева, вышедшем в 1960 г., были нарисованы графики функций

$$y = 2 \arcsin x \quad \text{и} \quad y = \arcsin (2x + 1)$$

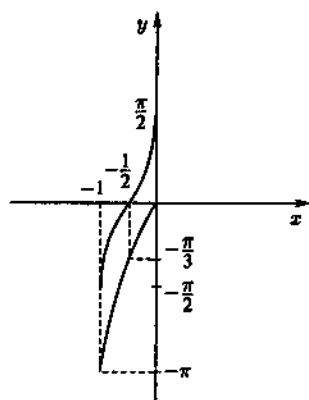


Рис. 31

и сказано, что «по ним видно» отсутствие корней. Не хотелось бы слышать, что могли ответить на это уже в 1970-е годы члены приемной комиссии мехмата МГУ. Однако вышеприведенное решение отправлялось именно от графиков, которые были нарисованы на черновике, а потом отброшены как нежелательная улика. Ведь именно из рисунка мы прежде всего устанавливаем, что на отрезке $[-1; -1/2]$ график функции

$$y = 2 \arcsin x$$

стартует из точки $(-1; -\pi)$, а график

$$y = \arcsin(2x + 1)$$

— из точки $(-1; -\pi/2)$; и заканчивается первый график в точке $(-1/2; -\pi/3)$, а второй — в точке $(-1/2; 0)$, и второй везде «нависает» над первым (рис. 31). ►

🔍 **Ответ:** $\emptyset$.

Хочется процитировать классика:

Мы не будем обсуждать здесь проблему, в какой мере допустимо и законно использование тех или иных графических соображений в условиях конкурсного экзамена. Общими словами здесь не отделаешься — истина конкретна. К сожалению, четких и согласованных критериев, которых бы придерживались комиссии разных вузов (и даже члены одной комиссии), нет. Нам все же кажется, что степень обоснованности решений, апеллирующих к графическому образу, зачастую гораздо выше, чем это считают некоторые чрезмерно педантичные экзаменаторы (И. Ф. Шарыгин).

Завершить цикл надо бы каким-нибудь монстром карманного формата — дабы мы помнили, что, сталкиваясь с аркусами, надо мобилизовывать все свои ресурсы. Услужливо вспоминается уравнение из запасников только что упомянутого, незабвенного И. Ф. Шарыгина:

18. Решить уравнение

$$2 \arcsin x + \arccos 2x = \frac{5\pi}{7}.$$

◀ Наличие в правой части равенства «плохого» числа $5\pi/7$ сразу отбивает охоту ступить на стандартный путь — взятие синуса или косинуса. Исследуем функцию

$$f(x) = 2 \arcsin x + \arccos 2x$$

на отрезке $[-1/2; 1/2]$ (такова ОДЗ).

Производная

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

обращается в нуль, если $1-x^2 = 1-4x^2$, т. е. при $x = 0$. Перемены знака в этой точке нет, поскольку первая дробь всегда меньше второй, так что производная везде отрицательна. Значит, функция $f(x)$ везде убывает и, стало быть, свое наибольшее значение принимает на левом конце отрезка, т. е. в точке $x = -1/2$. Но это значение равно

$$2 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3},$$

что меньше $5\pi/7$. Значит, левая часть уравнения всегда меньше правой, и уравнение решений не имеет. ►

☛ **Ответ:** $\emptyset$.

Уравнения с обратными тригонометрическими функциями при участии параметра — это, выражаясь торжественно, *raga avis in terris*: достаточно сказать, что на вступительных экзаменах в МГУ за 1965–2005 гг. таких задач наберется не более десятка. Начнем с задачи, которую можно считать прологом к этому подразделу.

19. При каких x числа

$$\arcsin \frac{1}{3x+3} \quad \text{и} \quad \operatorname{arctg} \sqrt{2x+1}$$

являются величинами углов некоторого прямоугольного треугольника?

◀ Если

$$\arcsin \frac{1}{3x+3} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{то} \quad \frac{1}{3x+3} = 1,$$

откуда $x = -2/3$, но это значение не входит в область определения $\operatorname{arctg} \sqrt{2x+1}$.

Если

$$\operatorname{arctg} \sqrt{2x+1} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{то} \quad \sqrt{2x+1} = 0 \quad \text{и} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Тогда второй угол равен $\arcsin 2/3$, и такой прямоугольный треугольник возможен.

Пусть теперь

$$\arcsin \frac{1}{3x+3} + \operatorname{arctg} \sqrt{2x+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\arcsin \frac{1}{3x+3} = \operatorname{arctg} \sqrt{2x+1};$$

беря синус, получаем уравнение

$$\frac{1}{3x+3} = \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+2}},$$

единственный корень которого $x = -1/3$. ►

✎ **Ответ:** $-1/2, -1/3$.

20. Решить при всех a уравнение $\arccos x - \arcsin 4x = \arcsin a$.

◀ Перепишем уравнение в виде $\arccos x = \arcsin 4x + \arcsin a$ и возьмем косинус от обеих частей. Мы получим

$$x = \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-16x^2} - 4ax \quad \text{или} \quad (4a+1)x = \sqrt{(1-a^2)(1-16x^2)}.$$

Решая это уравнение, находим

$$x = \pm \sqrt{\frac{1-a^2}{8a+17}}.$$

Заметим, что если $x < 0$, то $\arccos x > \pi/2$, $-\arcsin 4x > 0$ и левая часть исходного уравнения больше $\pi/2$, а правая меньше, т. е. решений нет. Таким образом, корнем уравнения может быть только

$$x = \sqrt{\frac{1-a^2}{8a+17}}.$$

Тогда получаем ограничения на параметр: во-первых, $|a| \leq 1$, а во-вторых, $4a+1 \geq 0$. Итак: ответ: если

$$a \in \left[-\frac{1}{4}; 1\right], \quad \text{то} \quad x = \sqrt{\frac{1-a^2}{8a+17}};$$

при других a решений нет. ►

✎ **Ответ:** Если $a \in [-1/4; 1]$, то $x = \sqrt{1-a^2/(8a+17)}$; при других a решений нет.

21. Определить количество корней уравнения $(x-a)\arccos(x+3) = 0$ в зависимости от a .

◀ При любом a корнем является $x = -2$; если $a = -2$ этот корень будет единственным. И он будет единственным, если

$$\begin{cases} a + 3 > 1, \\ a + 3 < -1, \end{cases}$$

поскольку второй корень $x = a$ не войдет в ОДЗ. Решение совокупности: $a \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$. ▶

❶ **Ответ:** При $a \in (-\infty; -4) \cup [-2; +\infty)$ один корень, при $a \in [-4; -2]$ два корня.

22. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin(\arccos 5x) = a + \arcsin \sin(7x - 3)$$

имеет единственное решение.

◀ ОДЗ определяется условием $|x| \leq 1/5$. В этом случае $7x - 3 \in [-3\pi/2; -\pi/2]$ и поскольку на данном отрезке $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$, наше уравнение переписывается в виде

$$\sqrt{1 - 25x^2} = a + (3 - 7x - \pi) \quad \text{или} \quad \sqrt{1 - 25x^2} = b - 7x,$$

где для краткости положено $b = a + 3 - \pi$.

Графиком левой части, т. е. графиком функции

$$y = \sqrt{1 - 25x^2}$$

(это равенство можно привести к виду $(5x)^2 + y^2 = 1$) является единичная окружность, сжатая в 5 раз по оси абсцисс, т. е. эллипс — а точнее, верхняя половина его, вытянутая вдоль оси ординат на 1 и по оси абсцисс на $1/5$ в обе стороны. Графиком правой части является прямая $y = b - 7x$. Эта прямая и эллипс имеют единственную общую точку в двух случаях: если прямая заключена между крайним левым положением — прямой $y = -7/5 - 7x$ (причем может с ней совпадать) и крайним правым положением — прямой $y = 7/5 - 7x$ (с ней не совпадая, иначе будут две точки пересечения); и если прямая $y = b - 7x$ является касательной к эллипсу.

Первое условие дает нам неравенство

$$-\frac{7}{5} \leq b < \frac{7}{5} \quad \text{или} \quad -\frac{7}{5} \leq a + 3 - \pi < \frac{7}{5},$$

откуда

$$\pi - \frac{22}{5} \leq a < \pi - \frac{8}{5}.$$

Прямая $y = b - 7x$ будет касательной к графику функции

$$y = \sqrt{1 - 25x^2},$$

если прежде всего выполнено условие $y' = -7$, т. е.

$$\frac{25x}{\sqrt{1 - 25x^2}} = 7.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = 7/5\sqrt{74}$, который является абсциссой точки касания. Значение параметра находится из условия равенства значений обеих функций в этой точке, т. е. из уравнения

$$b - \frac{49}{5\sqrt{74}} = \sqrt{1 - 25\left(\frac{7}{5\sqrt{74}}\right)^2}.$$

Произведя вычисления, находим $b = \sqrt{74}/5$, тогда

$$a = \pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}.$$

❧ **Ответ:** $\pi - 22/5 \leq a < \pi - 8/5$, $a = \pi - 3 + \sqrt{74}/5$.

23. Найти все a , при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y = -\frac{2}{3} - \arcsin x \quad \text{и} \quad y = -\frac{2}{3} - 2 \operatorname{arctg} ax$$

имеет положительную ординату.

❧ Сделаем замену $Y = y + 2/3$ (сдвиг оси ординат). Очевидно, что $a < 0$ не годится, поскольку тогда графики функций

$$Y = -\arcsin x \quad \text{и} \quad Y = -2 \operatorname{arctg} ax$$

пересекаются в начале координат и более нигде: первая функция убывающая, а вторая — возрастающая.

Пусть $a > 0$. Тогда требование задачи будет удовлетворено, если, во-первых, график функции $Y = -2 \operatorname{arctg} ax$ пересечет прямую $Y = \pi/2$ не правее точки $(-1; \pi/2)$, а во-вторых, не левее точки $(-\sin 2/3; 2/3)$.

Предельные значения параметра находятся, таким образом, из условий

$$2 \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 2 \operatorname{arctg} \left(a \sin \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Первое условие дает нам $a = 1$, второе равносильно условию

$$\operatorname{arctg} \left(a \sin \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

откуда

$$a \sin \frac{2}{3} = \operatorname{tg} \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad a = \frac{\sin(1/3)}{\cos(1/3) \sin(2/3)} = \frac{1}{2 \cos^2(1/3)}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2 \cos^2(1/3)} < a \leq 1.$$

• **Ответ:** $0,5 \cos^{-2}(1/3) < a \leq 1$.

24. Найти все целые значения параметров a и b , при которых уравнение

$$\arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} - b \cdot 2^{\sin \pi b x} - \left| \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} + b \cdot 2^{\sin \pi b x} \right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Думается, читатель наш уже достаточно подготовлен, чтобы отнестись снисходительно к этому Большому Змею. Нет сомнений, что подобные «длинные» задачи удручающе действуют на психику; однако не потому, что они как-то особенно трудны, а потому, что, повторяясь из года в год, предполагают, что отроков будет натаскивать на их решение какая-то уверенная, мускулистая рука; будет учить детей «не бояться» этих сороконожек, советовать им: решайте на листе А3 или по крайней мере А4 — только не в школьной тетрадке, где одно условие займет несколько строчек... Как бы мы ни относились к этому явлению равнодушной природы, задачи-монстры существуют «и ни в зуб ногой», как давным-давно говорил поэт.

◀ Уравнение равносильно системе (учитывая, что $b \neq 0$)

$$\begin{cases} 2^{\sin \pi b x} = -a, \\ \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} = ab, \\ \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} - b \cdot 2^{\sin \pi b x} - 2ab \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку второе уравнение не может иметь более двух решений, первое уравнение необходимо решить при всех обстоятельствах. Это возможно, если $1/2 \leq -a \leq 2$, поэтому либо $a = -1$, либо $a = -2$.

Пусть $a = -1$. Тогда $\sin \pi b x = 0$, $x = n/b$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решим второе уравнение.

$$\arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} = -b \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - x^2} = -b \sin b \Leftrightarrow x = \pm b \cos b,$$

если $b \sin b \leq 0$, $|b| \leq \pi/2$.

Неравенство из системы принимает вид

$$\arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} \geq -b$$

и заведомо выполнено при $b = 2, 3, \dots$ и заведомо не выполнено при $b \leq -2$. Рассмотрим сперва оставшиеся значения.

Если $b = 1$, то поскольку $|x| \leq b$, число решений не превышает 5 (не более трех решений вида $x = n/b$ и не более двух вида $x = \pm b \cos b$).

Если $b = -1$, то ситуация аналогичная.

Пусть теперь $b = 2$. Тогда серия $x = n/b$ дает нам 9 корней:

$$0; \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm \frac{3}{2}; \pm 2,$$

однако второе уравнение решений не имеет, поскольку $|b| > \pi/2$.

Если же $b \geq 3$, $b \in \mathbb{N}$, то число решений первого уравнения превысит 10, и такие значения параметра удовлетворяют условию.

Теперь исследуем случай $a = -2$.

Первое уравнение приводится к виду $\sin \pi b x = 1$, откуда

$$x = \frac{4n + 1}{2b}.$$

Что до второго уравнения, то его решения даются формулой $x = \pm b \cos 2b$ при условиях $b \sin 2b \leq 0$ и $|2b| \leq \pi/2$.

Неравенство принимает вид

$$\arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} \geq -2b$$

и заведомо выполнено при целых $b \geq 1$.

Если $b = 1$, мы снова видим, что число корней меньше 10. То же имеет место и при $b = 2$.

Если $b = 3$, то первое уравнение имеет 9 корней:

$$\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; \frac{13}{6}; \frac{17}{6}; -\frac{1}{2}; -\frac{7}{6}; -\frac{11}{6}; -\frac{5}{2},$$

однако второе уравнение их не имеет, поскольку $|2b| > \pi/2$.

Если целое $b \geq 4$, то первое уравнение имеет более 10 корней и такие значения параметра подходят. ►

❖ **Ответ:** $a = -1$, $b \geq 3$; $a = -2$, $b \geq 4$.

Исследование утомило вас, дорогой читатель? Не печальтесь, все пойдет впрок, ибо, как говорил учитель Ньютона Исаак Барроу,

Математика — это непреложная основа наук и плодотворный источник всяческой полезности в человеческих делах. Математика, можно сказать, дарует нам главные удовольствия в жизни, ей мы обязаны нашим здоровьем, большим достатком и выгодами труда.



Привал очарованных стражников

Решите следующие уравнения:

0. $x = \arcsin(\sin x)$.

1. а) $\frac{\arccos |x|}{x-1} = 0$;

б) $\arccos(2x^2 - x - 3) - \arcsin(x^2 + 5x + 4) = \frac{\pi}{2}$;

в) $4 \cos x \arccos(x-1) + 3\pi = 2 \arccos(x-1) + 6\pi \cos x$.

2. а) $\arcsin x = 2 \operatorname{arctg} x$;

б) $2 \arcsin |x| = \arcsin(x\sqrt{2})$;

в) $\arcsin(2x-1) + \pi = \arccos(1-4x)$.

г) $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{2x} + \arccos 2x = \frac{\pi}{2}$.

д) $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+x} + \arcsin \sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$.

е) $\arcsin(x-1) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} = \arccos(1-x)$

3. а) $2 \arccos x = 3 \arccos \frac{x}{2}$;

б) $x - \arcsin\left(\cos \frac{1}{2} - \sin x\right) = 1$;

в) $\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cos x\right) + \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \sin x\right) = \frac{\pi}{2}$;

г) $\arcsin \frac{3-5 \sin(x+\pi/3)-6 \cos 2x}{5} = x - \frac{\pi}{3}$.

4. а) $\arcsin(1+|\sin x|) = \arccos\left(1+\cos \frac{x}{10}\right)$.

б) $\arccos \frac{1}{x} = \frac{\pi}{8}(1-x)^3$;

в) $\arcsin x \cdot \arccos \frac{1}{x^2} + \arcsin \frac{1}{x^2} \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{2}$;

г) $2 \arcsin x \arccos x = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5. а) $\arctg(x-1) + \arctg x + \arctg(x+1) = \arctg 3x$.

б) $2 \arccos \frac{x}{2} + \arcsin \frac{x^2-2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

в) $\arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} + x + 1$;

г) $2 \arctg x + \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

6. а) $\sin(2 \arcsin \sqrt{x}) = \arccos(\cos 2\pi x)$;

б) $\sin(2 \arctg \sqrt{x}) = \arctg(\operatorname{tg} x)$, $x \in [0; \pi]$.

7. Решите уравнения:

а) $\arctg \frac{1}{4} + 2 \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$;

б) $x + \frac{1}{6} \arccos(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}$.

в) $\arctg x + \arctg 3x + \arctg x^3 = 0$.

г) $\arccos(x-2) = \pi(12 - 24x + 15x^2 - 2x^3)$.

8. Решите уравнения В. А. Славова:

а) $\pi + \arcsin(\operatorname{tg} x) - \arctg(\operatorname{ctg} x) = x$;

б) $\arccos(\operatorname{tg} x) + \arctg(\operatorname{tg} x) = \arctg(\operatorname{ctg} x)$.

9. Решите уравнения:

а) $\frac{3 \cos x + 4 \sin x + 5\pi + 5}{3 \sin y + 4 \cos y + 5} = \arcsin \frac{z}{3} + \arccos \frac{z}{3}$;

б) $\sqrt{2-|y|}(5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) =$
 $= \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5\pi^2}{4}$.

10. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$a^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{a+1} - \frac{2}{a+1}\right) - a\sqrt{4x^2 - 8x + 8} =$$

$$= 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

11. Решите уравнение при всех значениях параметра a :

а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = a$;

б) $\arccos x + \arcsin 2a = 0$;

в) $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x - \pi a = \frac{3\pi}{4}, \quad a \in \mathbb{Z}$;

г) $2 \arccos x - a = \frac{a^2}{\arccos x}$.

12. Решите уравнение $\arcsin(ax) = \arccos(bx)$ при всех a и b .

13. Найдите все значения параметра a , при которых:

а) уравнение $(x^2 - 2x - a^2 + 2a) \arcsin(x - 2) = 0$ имеет единственное решение;

б) уравнение $\arcsin^2 x + \arccos^2 x + a\pi^2 = 0$ не имеет решений;

в) все корни уравнения $x^2 - \arcsin x - a = 0$ отрицательны;

г) уравнение $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(x - \pi/6)) = 4x + a$ имеет ровно два решения.

14. Решите уравнение

$$\arccos(x^2 + 2x + a + 1) + \sqrt{x^6 + 6x^5 + 14x^4 + 16x^3 + 7x^2 - 2x - 2} = 0.$$

Советы и решения

Р 0. И без апелляции к графикам, ясно, что на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ уравнение выполнено, а вне его модуль левой части больше модуля правой, и решений нет.

Р 1. а) Имеем $|x| = \cos 0 = 1$ при условии $x - 1 \neq 0$.

$$\text{б) } \dots \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin(2x^2 - x - 3) - \arcsin(x^2 + 5x + 4) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin(2x^2 - x - 3) = -\arcsin(x^2 + 5x + 4),$$

откуда $2x^2 - x - 3 = -x^2 - 5x - 4$. Корень $x = -1/3$ не входит в ОДЗ.

в) Раскладываем на множители:

$$2 \cos x (2 \arccos(x - 1) - 3\pi) = 2 \arccos(x - 1) - 3\pi,$$

откуда либо $\cos x = 1/2$ (при условии $|x - 1| \leq 1$), либо $\arccos(x - 1) = 3\pi/2$ (решений нет).

Р 2. а) После взятия синуса получаем уравнение

$$x = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Из трех его корней $x = 0$, $x = \pm 1$ подходит только $x = 1$.

б) Корнем может быть только $x \geq 0$ (иначе левая и правая части уравнения имеют разные знаки). Беря синус, получаем

$$2x\sqrt{1 - x^2} = x\sqrt{2}.$$

в) ОДЗ определяется условиями $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$ и $-1 \leq 1 - 4x \leq 1$, откуда $0 \leq x \leq 1/2$. Беря синус, получаем уравнение

$$2x - 1 = \sqrt{1 - (4x - 1)^2}.$$

Корень $x = 1/10$ посторонний.

$$г) \dots \Leftrightarrow \arccos 2x = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{2x}.$$

Беря тангенс, получаем

$$\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x} = \frac{1-x}{2x} \quad \text{или} \quad 1-4x^2 = (1-x)^2, \quad x \neq 0.$$

д) Имеем

$$\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + x} = \arccos \sqrt{x^2 + x + 1};$$

тогда, беря косинус,

$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

е) Поскольку $\arccos(1-x) = \pi - \arccos(x-1)$, получаем $2 \operatorname{arctg} x/3 = \pi/2$.

Р 3. а) Взяв косинус, приходим к уравнению $x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда

$$x = -1, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Поскольку в ОДЗ $|x| \leq 1$, больший корень сразу отбрасываем. Но и

$$x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

— корень посторонний. В самом деле:

$$0 < \frac{5 - \sqrt{17}}{2} < \frac{1}{2},$$

значит,

$$\frac{\pi}{3} < \arccos x < \frac{\pi}{2}, \quad \arccos \frac{x}{2} > \frac{\pi}{3};$$

и тогда, с одной стороны, $2 \arccos x < \pi$, а с другой $3 \arccos(x/2) > \pi$.

б) Беря синус, получаем $\sin(x-1) + \sin x = \cos 1/2$, откуда $2 \sin(x-1/2) = 1$. Осталось из серий

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{2} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

отобрать корни, удовлетворяющие условию $-\pi/2 \leq x-1 \leq \pi/2$.

в) Имеем

$$\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cos x\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \sin x\right),$$

откуда $\sin x = \cos x$, т.е. $x = \pi/4 + \pi n$. Условия существования аркфункций:

$$|\pi \cos x| \leq 2, \quad |\pi \sin x| \leq 2$$

выполнены только в случае $\sin x = \cos x = -1/\sqrt{2}$.

г) Беря синус, приходим к уравнению $12 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$, из которого

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{3}, \\ \sin x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Корни должны удовлетворять условию

$$-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

Р 4. а) Так как ОДЗ требует $1 + |\sin x| \leq 1$, то $\sin x = 0$ и левая часть равна $\pi/2$; тогда $1 + \cos x/10 = 0$.

б) По смыслу задачи, с одной стороны $-1 \leq 1/x \leq 1$, т.е. $|x| \geq 1$. С другой, $0 \leq \pi(1-x)^3/8 \leq \pi$, откуда $|x| \leq 1$. Значит, $x = \pm 1$. Подстановка показывает, что оба значения удовлетворяют уравнению.

в) ОДЗ состоит из двух точек: $x = \pm 1$. Ответ устанавливаем подстановкой.

Р 5. а) Перепишем так:

$$\arctg(x-1) + \arctg(x+1) = \arctg 3x - \arctg x$$

и возьмем тангенс от обеих частей.

б) Переписав в виде

$$2 \arccos \frac{x}{2} = \arccos \frac{x^2 - 2}{2}$$

и взяв косинус, получим тождество

$$\frac{x^2 - 2}{2} = \frac{x^2 - 2}{2}.$$

ОДЗ определяется условием $x \in [-2; 2]$ и, кроме того, $2 \arccos x/2 \leq \pi$, откуда $x \geq 0$.

в) Вычисляя тангенс от обеих частей, получим

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x + 1 \right) = 1,$$

откуда $x = -1 + \pi n$. По смыслу задачи,

$$-\pi < \frac{\pi}{4} + x + 1 < \pi,$$

поэтому $n = 0$ или $n = -1$.

г) Имеем

$$2 \arctg x = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Беря косинус, получаем

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Остается найти ОДЗ и учесть, что $x \geq 0$, поскольку арккосинус неотрицателен.

Р 6. а) Поскольку в ОДЗ $x \in [0; 1]$, рассматриваем два случая. Если $x \in [0; 1/2]$, то имеем

$$2\sqrt{x}\sqrt{1-x} = 2\pi x,$$

откуда

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{\pi^2 + 1}.$$

Если $x \in [1/2; 1]$, то уравнение принимает вид

$$2\sqrt{x}\sqrt{1-x} = 2\pi - 2\pi x,$$

откуда

$$x = 1 \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi^2}{\pi^2 + 1}.$$

б) Если $x \in [0; \pi/2]$, то уравнение равносильно

$$\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = x.$$

Если $x \in [\pi/2; \pi]$, то

$$\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = x - \pi.$$

У этого уравнения корней нет, поскольку его правая часть неположительна, а $x = \pi$ — не корень.

Р 7. а) Поскольку

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{9}{19}, \quad \operatorname{arctg} \frac{9}{19} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{32}{43},$$

имеем

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{32}{43}.$$

Беря тангенс, получаем $1/x = 11/75$.

$$\text{б) } \dots \Leftrightarrow \arcsin(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = 6x$$

и тогда

$$\sin 6x = \cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x.$$

Это уравнение имеет две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{34} + \frac{2\pi n}{17} \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{26} + \frac{2\pi k}{13}.$$

Остается отобрать n и k , чтобы выполнялось условие

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - 6x \leq \pi \quad \text{или} \quad -\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12}.$$

в) Корень находим подбором. Он единственный, поскольку левая часть — возрастающая функция.

г) Функция $y = \arccos(x - 2)$ убывающая, своего наибольшего значения она достигает в точке $x = 1$. Это значение равно π . Функция

$$y = \pi(12 - 24x + 15x^2 - 2x^3)$$

возрастает на отрезке $[1; 3]$ (ОДЗ уравнения), так как

$$y' = -6\pi(x - 1)(x - 4) > 0,$$

причем в точке $x = 1$ она достигает своего наименьшего значения на отрезке $[1; 3]$. Это значение также равно π , т. е. $x = 1$ — единственный корень данного уравнения.

Р 8. а) Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = x.$$

Левая часть может изменяться в пределах $[0; 2\pi]$, поэтому и $x \in [0; 2\pi]$. Кроме того, $-1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$; значит, допустимыми являются следующие интервалы:

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right).$$

Если $x \in (0; \pi/4) \cup [3\pi/4; \pi)$, то $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ и мы получаем $\arcsin(\operatorname{tg} x) = -\pi/2$, откуда $x = 3\pi/4$. Если же $x \in (\pi; 5\pi/4) \cup [7\pi/4; 2\pi)$, то

$$\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi.$$

Тогда $\arcsin(\operatorname{tg} x) = \pi/2$ и $x = 5\pi/4$.

б) Уравнение переписывается в виде $\arccos(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. Уравнение имеет период π , поэтому решим его для $x \in (0; \pi)$. Если $x \in (0; \pi/2)$, то имеем

$$\arccos(\operatorname{tg} x) + x = x,$$

откуда $x = \pi/4$. Если $x \in (\pi/2; \pi)$, то получаем $\arccos(\operatorname{tg} x) + x = x - \pi$ и решений нет.

Р 9. а) Используя вспомогательный угол, приводим уравнение к виду

$$\sin(x + \alpha) + 1 = \frac{\pi}{2}(\sin(y + \beta) - 1),$$

где $\alpha = \arccos 4/5$, $\beta = \arccos 3/5$. Отсюда

$$\begin{cases} \sin(x + \alpha) = -1, \\ \sin(y + \beta) = 1. \end{cases}$$

б) Основной частью решения является доказательство того, что левая часть уравнения неотрицательна. Отложим это на потом, а пока перепишем правую часть в виде

$$\arcsin^2 x + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^2 - \frac{5\pi^2}{4}.$$

Первое слагаемое не больше $\pi^2/4$, второе — не больше π^2 . Таким образом,

$$\arcsin x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = -1.$$

Поскольку правая часть исходного уравнения равна 0, то и $2 - |y| = 0$. Теперь докажем, что неприятная скобка в левой части всегда положительна. Приведем ее к виду

$$-2 - \sqrt{58} \sin(2x + \phi) + 3\sqrt[3]{33}.$$

и проверим, что

$$3\sqrt[3]{33} > 2 + \sqrt{58}.$$

Чтобы не возводить в куб, воспользуемся тем, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{x}{3}$$

(частный случай неравенства Бернулли). Тогда

$$3\sqrt[3]{33} = 9\sqrt[3]{1 + \frac{2}{9}} > 9\left(1 + \frac{2}{27}\right) = 9 + \frac{2}{3}.$$

Но

$$2 + \sqrt{58} < 9 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{23}{3},$$

поскольку $58 < 529/9$.

Р 10. Пусть $x - 1 = t$, тогда уравнение переписывается в виде

$$a^2 \cos t + \sin^2 \left(\frac{2t}{a+1} \right) - 2a\sqrt{t^2 + 1} = 3 + \arcsin |t|$$

и из его четности следует, что единственным корнем может быть только $t = 0$ (поскольку если $t \neq 0$ — корень, то и $(-t)$ — тоже корень). При $t = 0$ получаем уравнение $a^2 - 2a = 3$, откуда $a = 3$ (второй корень $a = -1$ невозможен).

Р 11. а) Имеем:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} x) = a.$$

Если $x \in (0; \pi/2)$, то получаем $a = \pi/2$. Если $x \in (\pi/2; \pi)$, то $x - \pi + \pi/2 - x = a$ или $a = -\pi/2$. Осталось заметить, что уравнение имеет период π .

б) Беря косинус от равенства $\arccos x = -\arcsin 2a$, получаем $x = \sqrt{1 - 4a^2}$. При этом, во-первых, $a \leq 0$, во-вторых, $|2a| \leq 1$, т.е. $a \in [-1/2; 0]$. При других a решений нет.

в) Ясно, что a может принимать только два значения: 0 и -1 . При $a = 0$ имеем $\operatorname{arctg} 2x = 3\pi/4 - \operatorname{arctg} 3x$ и, беря тангенс, находим $x = 1$ (второй корень $x = -1/6$ в данном случае является посторонним). При $a = -1$ имеем

$$\operatorname{arctg} 2x = -\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 3x;$$

теперь, наоборот, подходит только $x = -1/6$.

г) Если $t = \arccos x$, где $t \in (0; \pi]$, то корни уравнения

$$2t^2 - at - a^2 = 0$$

таковы: $t_1 = a$, $t_2 = -a/2$. Значит, если $a \in [-2\pi; 0)$, то $x = \cos(a/2)$; если $a \in (0; \pi]$, то $x = \cos a$. При других a решений нет.

Р 12. Если $a > 0$, то

$$x > 0 \quad \text{и} \quad \arcsin(ax) = \arccos \sqrt{1 - a^2 x^2},$$

таким образом, $bx = \sqrt{1 - a^2 x^2}$, откуда $b > 0$ и тогда

$$x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если $a < 0$, то $x < 0$ и $b < 0$; в этом случае

$$x = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $\arccos(bx) = 0$, откуда $x = 1/b$. Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = 1/a$.

Р 13. а) Имеем: $(x - a)(x + a - 2) \arcsin(x - 2) = 0$. При любом a корнем будет $x = 2$; поэтому если $a = 2$ или $2 - a = 2$, то этот корень будет единственным.

б) Замена $\arcsin x = t$ дает уравнение

$$8t^2 - 4\pi t + \pi^2(4a + 1) = 0,$$

и условие задачи будет выполнено в двух случаях: а) $D < 0$; б) $D > 0$, $|t_1| > \pi/2$, $|t_2| > \pi/2$.

в) Исследуем функцию $y = x^2 - \arcsin x$; ее производная

$$y' = 2x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

отрицательна при $x \leq 0$; при $x > 0$ также отрицательна, кроме точки $x = 1/\sqrt{2}$, где $y' = 0$. Значит, данная функция везде (т.е. при $x \in [-1; 1]$) убывает, при $-1 \leq x < 0$ она положительна, при $0 < x \leq 1$ отрицательна; ее множество значений — отрезок $[-1-\pi/2; 1+\pi/2]$. Пересечение графика с прямой $y = a$ имеет отрицательную абсциссу, если $0 < a \leq 1 + \pi/2$.

г) Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{2} - a - 4x.$$

График функции $y = \operatorname{arccctg} (\operatorname{ctg} (x - \pi/6))$ (рассмотрим сначала его при $x \in (-\pi; \pi)$) пересекается в двух точках с прямыми вида

$$y = \frac{\pi}{2} - a - 4x,$$

если а заключено между значениями a_1 и a_2 , т.ч.

$$\frac{\pi}{2} - a_1 - 4 \cdot \frac{\pi}{6} = 0, \quad \frac{\pi}{2} - a_2 - 4 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi,$$

т.е. $-7\pi/6 < a < -\pi/6$. То же повторяется при $-25\pi/6 < a < -31\pi/6$ и т.д., т.е.

$$-\frac{7\pi}{6} + 4\pi n < a < -\frac{\pi}{6} + 4\pi n.$$

Р 14. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a = 0, \\ x^6 + 6x^5 + 14x^4 + 16x^3 + 7x^2 - 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x^2 + 2x = -a$. Преобразуем второе уравнение, выделяя в нем степени двучлена $x^2 + 2x$. Мы получим

$$(x^2 + 2x)^3 + 2(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) - 2 = 0 \quad \text{или} \quad -a^3 + 2a^2 + a - 2 = 0,$$

откуда $a = \pm 1$, $a = 2$. При $a = 1$ получаем $x = -1$. При $a = -1$ имеем $x = -1 \pm \sqrt{2}$. При $a = 2$ и всех остальных значениях a решений нет.

Ответы

0. $[-\pi/2; \pi/2]$; 1. а) -1 ; б) -1 ; в) $\pi/3$; 2. а) 1. б) 0, $1/\sqrt{2}$; в) $1/2$. г) $2/5$; д) $\emptyset$; е) $\emptyset$; 3. а) -1 ; б) $1/2 + \pi/6$; в) $5\pi/4 + 2\pi n$; г) $-\arcsin 1/3$, $\arcsin 3/4$, $\pi - \arcsin 3/4$; 4. а) $10\pi + 20\pi n$; б) ± 1 ; в) $\emptyset$. г) 1; 5. а) $\pm 1/\sqrt{2}$; б) $0 \leq x \leq 2$; в) $-1 - \pi$; г) $x \geq 0$; 6. а) 0; 1; $1/(\pi^2 + 1)$; $\pi^2/(\pi^2 + 1)$. б) 0; 1; 7. а) $75/11$; б) $-\pi/26$, $\pi/34$. в) 0. г) 1; 8. а) $3\pi/4$, $5\pi/4$. б) $\pi/4 + \pi n$; 9. а) $(\arcsin(4/5) - \pi + 2\pi n; \arcsin(3/5) + 2\pi k; a)$, $a \in [-3; 3]$. б) $(-1; 2)$, $(-1; -2)$; 10. $a = 3$; 11. а) Если $a = \pi/2$, то $x \in (\pi n; \pi n + \pi/2)$; если $a = -\pi/2$, то $x \in (\pi/2 + \pi k; \pi + \pi k)$. Если $a \neq \pm \pi/2$, то $\emptyset$. б) Если $a \in [-1/2; 0]$, то $x = \sqrt{1 - 4a^2}$; иначе — $\emptyset$. в) Если $a = 0$, то $x = 1$; если

$a = -1$, то $x = -1/6$; иначе — $\emptyset$. г) Если $a \in [-2\pi; 0]$, то $x = \cos(a/2)$; если $a \in (0; \pi]$, то $x = \cos a$; иначе — $\emptyset$; 12. Если $a > 0$, $b > 0$, то $x = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$; если $a < 0$, $b < 0$, то $x = -1/\sqrt{a^2 + b^2}$. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $x = 1/b$; если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = 1/a$; 13. а) $a < -1$, $a = 0$, $a = 2$, $a > 3$. б) $a < -5/4$, $a > -1/8$. в) $0 < a \leq 1 + \pi/2$; г) $-7\pi/6 + 4\pi n < a < -\pi/6 + 4\pi n$; 14. $x = -1$ при $a = 1$; $x = -1 \pm \sqrt{2}$; иначе — $\emptyset$.

§ 14. Тригонометрические неравенства

Хотя жизнь абитуриента сложна, начнем с *простейших* тригонометрических неравенств.

1. Решить неравенства:

$$\text{а) } \sin x > \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \cos x < \frac{1}{2}.$$

◀ Есть две школы: одна решает тригонометрические неравенства на графике, другая — на круге. Не останавливаясь на преимуществах и слабых местах той и другой, сделаем это при помощи тригонометрического круга.

а) Отмечаем на единичном круге точки А и В, для которых $\sin x = 1/2$, т. е. $x = \pi/6$ и $x = 5\pi/6$. Точки, лежащие на дуге АВ (движение от А к В против часовой стрелки), удовлетворяют данному неравенству, поэтому с учетом периодичности, ответ можно записать так:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right).$$

б) Отмечаем точки А и В, для которых $\cos x = 1/2$, т. е. $x = -\pi/3$ и $x = \pi/3$. Однако, в отличие от предыдущего случая, неравенство выполняется для точек, лежащих на дуге ВА, что не позволяет записать ответ в виде

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right),$$

поскольку $\pi/3 > -\pi/3$. Это затруднение можно устранить, взяв вместо точки $-\pi/3$ точку

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$$

☛ **Ответ:** а) $x \in (\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k)$; б) $x \in (\pi/3 + 2\pi k; 5\pi/3 + 2\pi k)$.

2. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

◀ А в этом случае для компенсации воспользуемся графиком. Рассматривая главную ветвь функции $y = \operatorname{tg} x$, т. е. ту, что соответствует $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, отмечаем точку, для которой $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ — это $x = \pi/3$. Неравенству удовлетворяют все точки, заключенные между $x = \pi/3$ и $x = \pi/2$. Таким образом, с учетом периодичности, получаем ответ: $x \in (\pi/3 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$. ▶

• **Ответ:** $x \in (\pi/3 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$.

3. Решить неравенство

$$\sin 2x + \sin x - 1 \geq \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

◀ Перенесем единицу вправо и преобразуем:

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x + \sin x &\geq \cos x - \sin x + 1, & 2 \sin x(\cos x + 1) &\geq \cos x + 1, \\ (2 \sin x - 1)(\cos x + 1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \sin x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

• **Ответ:** $x = \pi + 2\pi n, \pi/6 + 2\pi k \leq x \leq 5\pi/6 + 2\pi k$.

4. Решить неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x < \frac{5}{8}.$$

◀ Произведем полное понижение степени:

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \\ &= 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

Таким образом, $\cos 4x < 0$. Тогда

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 4x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

и окончательный ответ: $\pi/8 + \pi n/2 < x < 3\pi/8 + \pi n/2$. ▶

• **Ответ:** $\pi/8 + \pi n/2 < x < 3\pi/8 + \pi n/2$.

5. Решить неравенство $4 \sin^3 x < 2 \sin x + \cos 2x$.

◀ Пусть $\sin x = t$; тогда, поскольку $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, данное неравенство сводится к алгебраическому неравенству

$$4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 < 0,$$

которое преобразуется к виду

$$2t(2t^2 - 1) + (2t^2 - 1) < 0 \quad \text{или} \quad (2t + 1)(2t^2 - 1) < 0.$$

Решением, с учетом ограничения $|t| \leq 1$, будет

$$\begin{cases} -1 \leq t < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ -\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Рисуем круг и получаем ответ:

$$\begin{aligned} -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi m < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi m. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $-3\pi/4 + 2\pi n < x < -\pi/4 + 2\pi n$, $-\pi/6 + 2\pi k < x < \pi/4 + 2\pi k$, $3\pi/4 + 2\pi m < x < 7\pi/6 + 2\pi m$.

Классик (И. Ф. Шарыгин) не считал тригонометрические неравенства отдельной темой. И в своем учебнике предлагал даже превратить все уравнения в неравенства при прохождении соответствующего раздела. На это трудно что-либо возразить. Всем ясно, что в неравенстве основные проблемы возникают уже после того, как уравнение решено: надо, во-первых, упорядочить корни по возрастанию, а потом перейти к расстановке знаков во всех интервалах, которых может оказаться изрядное количество. Кроме того, бывают случаи (мы встречались с ними в § 7), когда при решении неравенства $f(x) > g(x)$ уравнение $f(x) = g(x)$ вообще не имеет корней; и на одних интервалах $f(x) > g(x)$, а на других — наоборот $f(x) < g(x)$. И для того, чтобы всё выяснить, лучше всего воспользоваться исследованием функций на непрерывность и графиками.

Не желая дублировать и без того объемный раздел, посвященный тригонометрическим уравнениям, постараемся ограничиться примерами, где налицо более или менее существенная разница между уравнениями и неравенствами.

6. Решить неравенство $3 \sin x + 4 \cos x > 0$.

◀ Это неравенство нельзя решать, как соответствующее уравнение, переходом к $\operatorname{tg} x$, поскольку для этого нужно разделить на $\cos x$, который может быть как положительным, так и отрицательным, не говоря уже о равенстве 0.

Чтобы не рассматривать разные случаи, лучше обратимся к вспомогательному углу — и дело в шляпе.

Имеем: $5 \sin(x + \phi) > 0$, где $\phi = \operatorname{arctg}(4/3)$. Отсюда

$$2\pi n < x + \phi < \pi + 2\pi n$$

и окончательный ответ: $x \in (2\pi n - \operatorname{arctg}(4/3); \pi - \operatorname{arctg}(4/3) + 2\pi n)$. ►

☛ **Ответ:** $x \in (2\pi n - \operatorname{arctg}(4/3); \pi - \operatorname{arctg}(4/3) + 2\pi n)$.

7. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x + 1 < 0$.

◀ Переходя к синусам-косинусам, имеем

$$\frac{\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x}{\cos x \cos 3x} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{\cos 2x}{\cos x \cos 3x} < 0.$$

При решении уравнения здесь можно было бы остановиться, однако в неравенстве желательно идти дальше и свести дело к функциям одного аргумента:

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2x}{(1/2)(\cos 4x + \cos 2x)} < 0 &\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{(\cos 2x + 1)(2 \cos 2x - 1)} < 0, \end{aligned}$$

что, при условии $\cos 2x \neq -1$, равносильно неравенству

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2x - 1/2} < 0.$$

Включаем метод интервалов и получаем $0 < \cos 2x < 1/2$, откуда

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Тогда ответ: $-\pi/4 + \pi k < x < -\pi/6 + \pi k$, $\pi/6 + \pi n < x < \pi/4 + \pi n$. ►

☛ **Ответ:** $-\pi/4 + \pi k < x < -\pi/6 + \pi k$, $\pi/6 + \pi n < x < \pi/4 + \pi n$.

8. Решить неравенство $\operatorname{tg} 2x < \sin x + \operatorname{tg} x$.

◀ Имеем здесь

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x - \sin x < 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} - \sin x < 0,$$

т. е.

$$\frac{\sin x(1 - \cos x \cos 2x)}{\cos x \cos 2x} < 0.$$

И снова нам нужно идти дальше, хотя с равенством нулю всё более или менее ясно.

Поскольку $1 - \cos x \cos 2x \geq 0$, а в данном случае просто $1 - \cos x \cos 2x > 0$, имеем неравенство

$$\frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} < 0$$

или, после домножения на $2 \cos x$,

$$\frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x \cos 2x} < 0,$$

откуда, отбросив $2 \cos^2 x > 0$, $\operatorname{tg} 2x < 0$. Тогда

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x < \pi n.$$

🔍 **Ответ:** $-\pi/4 + \pi n/2 < x < \pi n/2$.

9. Решить неравенство $\sin 4x + \sin 3x \leq \sin 2x - 2 \sin x$ при $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$.

◀ Тряхнем стариной — предадимся разложению на множители.

$$\sin 4x + (\sin 3x + \sin x) \leq \sin 2x - \sin x,$$

$$2 \sin 2x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos x \leq 2 \sin x \cos x - \sin x,$$

$$2 \sin 2x(\cos 2x + \cos x) \leq \sin x(2 \cos x - 1),$$

$$2 \sin 2x(2 \cos^2 x + \cos x - 1) \leq \sin x(2 \cos x - 1),$$

$$4 \sin x \cos x(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) \leq \sin x(2 \cos x - 1),$$

$$\sin x \cdot (2 \cos x - 1)(4 \cos^2 x + 4 \cos x - 1) \leq 0.$$

В силу условия $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$ имеем $2 \cos x - 1 < 0$, и неравенство сводится к $\sin x(4 \cos^2 x + 4 \cos x - 1) \leq 0$.

Пусть $x \in [\pi/2; \pi)$. Тогда неравенство равносильно такому:

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x - 1 < 0,$$

откуда

$$\frac{-1 - \sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{-1 + \sqrt{2}}{2},$$

т.е. $\cos x \leq 0$. Итак, $x \in [\pi/2; \pi]$ (добавляем $x = \pi$ как значение, заведомо являющееся решением).

Пусть теперь $x \in (\pi; 3\pi/2]$. Тогда имеем

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x - 1 \geq 0,$$

откуда

$$\cos x \geq \frac{-1 + \sqrt{2}}{2},$$

что невозможно на данном промежутке. ►

☛ **Ответ:** $x \in [\pi/2; \pi]$.

10. Найти решения неравенства

$$\frac{9 - 3 \cos 2x}{3 \sin 2x - 2} < \operatorname{tg} x,$$

удовлетворяющие условию $\pi/8 \leq x < \pi/2$.

◀ Заменяем $\operatorname{tg} x = t$ и, выражая косинус и синус через тангенс половинного, т.е. через t , преобразуем неравенство к виду

$$\frac{t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^2 - 3t + 1} > 0.$$

Поскольку по условию $\pi/8 \leq x < \pi/2$, $t > 0$ (нам пока этого достаточно) и числитель всегда положителен, решаем неравенство $t^2 - 3t + 1 > 0$. Получаем:

$$1) 0 < t < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad 2) t > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Пришло время вспомнить про дополнительное условие. При посредничестве формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

находим

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}/2}{1 + \sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

Сравним $\sqrt{2} - 1$ и $(3 - \sqrt{5})/2$.

Имеем

$$2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{5} - \sqrt{5} \Leftrightarrow 8\sqrt{30} - 10\sqrt{5} \Leftrightarrow 5\sqrt{5}\sqrt{11}.$$

Здесь знак «>». Значит,

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$$

и решением неравенства будет только $t > (3 + \sqrt{5})/2$. Отсюда окончательный ответ: $\operatorname{arctg}(3 + \sqrt{5})/2 < x < \pi/2$. ►

☞ **Ответ:** $\operatorname{arctg}(3 + \sqrt{5}/2) < x < \pi/2$.

Тригонометрические неравенства часто даются в смешанном виде, т. е. в сочетании с иррациональностями, модулями, логарифмами и прочей нечистой нетригонометрической природы: они используются для усиления, усложнения задачи.

11. Решить неравенство

$$\sqrt{4x - x^2} - 3(\sqrt{2} \cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geq 0.$$

◀ ОДЗ определяется неравенством $4x - x^2 - 3 \geq 0$, откуда $x \in [1; 3]$.

Заметим, что $x = 1$ и $x = 3$ являются решениями и перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{2} \cdot \cos x - \sqrt{1 + \cos 2x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos x \geq \sqrt{2} |\cos x| \Leftrightarrow \cos x \geq |\cos x|.$$

Но, кажется, мы много модулей повидали и в состоянии понять, что такое неравенство равносильно неравенству $\cos x \geq 0$. Тогда с учетом условия $x \in [1; 3]$ получаем $1 \leq x \leq \pi/2$. ►

☞ **Ответ:** $1 \leq x \leq \pi/2$, $x = 3$.

12. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{-6 \sin^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

◀ Задача равносильна решению неравенства

$$-6 \sin^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x + 8 - \sqrt{3} > 0,$$

которое после понижения степени и введения вспомогательного угла принимает вид

$$\cos(4x + \phi) > \frac{\sqrt{3} - 5}{\sqrt{10}}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Сравним $|\sqrt{3} - 5|$ и $\sqrt{10}$. Имеем:

$$|\sqrt{3} - 5| \vee \sqrt{10} \Leftrightarrow 28 - 10\sqrt{3} \vee 10 \Leftrightarrow 9 \vee 5\sqrt{3} \Leftrightarrow 81 > 75.$$

Значит, $(\sqrt{3} - 5)/\sqrt{10} < -1$, и неравенство

$$\cos(4x + \phi) > \frac{\sqrt{3} - 5}{\sqrt{10}}$$

выполнено при всех значениях x . ►

⦿ **Ответ:** $x \in (-\infty; +\infty)$.

13. Решить неравенство

$$\sin x \cdot \sin |x| \geq -\frac{1}{2}.$$

- ◄ Если $x \geq 0$, имеем верное неравенство $\sin^2 x \geq -1/2$.
Если $x < 0$, то

$$-\sin^2 x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow \cos 2x \geq 0.$$

Отсюда

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

где $n = -1, -2, -3, \dots$ и $-\pi/4 \leq x < 0$. ►

⦿ **Ответ:** $-\pi/4 + \pi n \leq x \leq \pi/4 + \pi n$, где целое $n = -1, -2, -3, \dots$; $-\pi/4 \leq x < +\infty$.

14. Решить неравенство $\cos(1/x^2) < 0$.

◄ Имеем

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \frac{1}{x^2} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ Отсюда

$$\begin{cases} x^2 < \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \\ x^2 > \frac{1}{3\pi/2 + 2\pi n}. \end{cases}$$

Включая метод интервалов, получаем ответ:

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi/2 + 2\pi n}} < x < -\frac{1}{\sqrt{3\pi/2 + 2\pi n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3\pi/2 + 2\pi n}} < x < \frac{1}{\sqrt{\pi/2 + 2\pi n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ответ: $-1/(\sqrt{\pi/2 + 2\pi n}) < x < -1/(\sqrt{3\pi/2 + 2\pi n})$,
 $1/(\sqrt{3\pi/2 + 2\pi n}) < x < 1/(\sqrt{\pi/2 + 2\pi n})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

15. Решить неравенство

$$\sin \frac{\pi x}{12} \geq x^2 - 12x + 37.$$

◀ Перепишем неравенство в равносильном виде

$$\sin \frac{\pi x}{12} \geq (x - 6)^2 + 1.$$

Отсюда следует, что одновременно $x - 6 = 0$ и $\sin(\pi x/12) = 1$. Это совместимо только при $x = 6$. ▶

Ответ: $x = 6$.

16. Решить неравенство

$$2 \sin x - 1 \leq \sqrt{6 \sin^2 x - 6 \sin x - 12}.$$

◀ В этом уравнении всё решает ОДЗ. Действительно, неравенство

$$6 \sin^2 x - 6 \sin x - 12 \geq 0$$

равносильно неравенству

$$(\sin x + 1)(\sin x - 2) \geq 0,$$

откуда $\sin x = -1$. При этом значении синуса неравенство, очевидно, выполнено. Тогда $x = -\pi/2 + 2\pi n$. ▶

Ответ: $x = -\pi/2 + 2\pi n$.

17. Решить неравенство

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos((2x - 7)/4) - \cos((x - 5)/4)} \geq 0.$$

◀ А в этом неравенстве нам не просто *помогает* ОДЗ, а, собственно, спасает от катастрофы. Худо бы нам пришлось, если бы надо было честно решать неравенство

$$\cos \frac{2x-7}{4} - \cos \frac{x-5}{4} > 0$$

(или $<$). К счастью, этого не нужно. Поскольку условие существования радикала $5 - x^2 \geq 0$ или $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$, аргументы обоих косинусов заключены в интервале $(-\pi; 0)$, на котором косинус возрастает. Значит, знаменатель положителен, если $2x - 7 > x - 5$, т.е. при $x \in (2; \sqrt{5}]$ и отрицателен при $x \in [-\sqrt{5}; 2)$. Знаки числителя устанавливаются без труда: числитель неотрицателен на промежутках $[-\sqrt{5}; 1] \cup [2; \sqrt{5}]$, отрицателен при $x \in (1; 2)$. Нужно сочетание знаков мы получим при $x \in [1; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$. Да здравствует метод интервалов! ►

🔍 **Ответ:** $x \in [1; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$.

Но и чистая тригонометрия может дать прикурить.

18. Решить неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x \geq 0$.

◀ Складывая первые два тангенса, получим

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \geq 0$$

и после приведения к общему знаменателю

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x + \cos x \cos 2x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} \geq 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x \cos 2x &= \frac{1}{2}(3 \cos 3x + \cos x) = \\ &= \frac{1}{2}(12 \cos^3 x - 8 \cos x) = 2 \cos x(3 \cos^2 x - 2), \end{aligned}$$

неравенство переписывается так:

$$\frac{\sin 3x(3 \cos^2 x - 2)}{\cos 2x \cos 3x} \geq 0.$$

Решение уравнения на этом этапе можно было бы считать фактически законченным, а вот в неравенстве до остановки еще далеко: желательно поработать над тем, что получилось. Переходя к косинусу двойного угла, преобразуем неравенство к виду

$$\frac{\operatorname{tg} 3x(\cos 2x - 1/3)}{\cos 2x} \geq 0.$$

Поскольку период $\operatorname{tg} 3x$ равен $\pi/3$, а $\cos 2x$ равен π , достаточно решить неравенство на промежутке $[0; \pi]$. Выписанные в порядке возрастания нули числителя и знаменателя образуют следующую последовательность:

$$0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \pi.$$

(Неприятный арккосинус оцениваем так: $\pi/3 < \arccos(1/3) < \pi/2$, поскольку $1/3 < 1/2$. Значит, $\pi/6 < (1/2) \arccos(1/3) < \pi/4$).

К нашему утешению, в каждой точке меняет знак ровно один из входящих в неравенство множителей, поэтому достаточно установить знак в любом из интервалов. Выбор велик — возьмем $(\pi/4; \pi/3)$. Здесь $\operatorname{tg} 3x < 0$, $\cos 2x < 0$; значит, дробь отрицательна.

Теперь, призывая метод интервалов, выписываем ответ:

$$\begin{aligned} \pi n \leq x < \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \frac{2\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{5\pi}{6} + \pi n < x \leq \pi + \pi n. \end{aligned}$$

❖ **Ответ:** $\pi n \leq x < \pi/6 + \pi n$, $(1/2) \arccos(1/3) + \pi n \leq x < \pi/4 + \pi n$, $\pi/3 + \pi n \leq x < \pi/2 + \pi n$, $2\pi/3 + \pi n \leq x < 3\pi/4 + \pi n$, $5\pi/6 + \pi n < x \leq \pi + \pi n$.

19. Решить неравенство

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 5x + \frac{1}{10} \sin 7x \geq 0.$$

◀ Избавимся от дробей:

$$20 \sin x + 10 \sin 3x + 5 \sin 5x + 2 \sin 7x \geq 0$$

и перегруппируем так:

$$3 \sin x + 10(\sin x + \sin 3x) + 5(\sin x + \sin 5x) + 2(\sin x + \sin 7x) \geq 0.$$

Преобразуем скобки в произведения:

$$3 \sin x + 20 \sin 2x \cos x + 10 \sin 3x \cos 2x + 4 \sin 4x \cos 3x \geq 0.$$

Раскладывая синусы кратных углов, вынесем за скобки общий множитель:

$$\sin x(3 + 40 \cos^2 x + 10 \cos 2x(3 - 4 \sin^2 x) + 16 \cos x \cos 2x \cos 3x) \geq 0.$$

Если положить $\cos 2x = t$, то выражение в скобках можно преобразовать к виду

$$f(t) = 16t^3 + 28t^2 - 8t + 23.$$

Поскольку решить уравнение $f(t) = 0$ не удастся, возникает предположение, что при $t \in [-1; 1]$ $f(t) \neq 0$. И действительно, если $t \in [0; 1]$, то

$$f(t) = 16t^3 + (28t^2 - 8t + 23) > 0,$$

поскольку трехчлен в скобках всегда положителен. Если же $t \in [-1; 0)$, то

$$f(t) = 16t^3 + 16t^2 + (12t^2 - 8t + 23) = 16t^2(t + 1) + (12t^2 - 8t + 23) > 0,$$

поскольку трехчлен снова положителен, а $16t^2(t + 1) \geq 0$.

Итак, исходное неравенство сводится к простейшему неравенству $\sin x \geq 0$, решая которое, получаем ответ: $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$. ►

● **Ответ:** $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$.

20. Решить неравенство

$$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geq 2^{2006}.$$

◀ В таких задачах не обойтись без подбора. Чтобы облегчить его, заменим $\operatorname{tg} x = t$. Видно, что неравенство

$$4(1 - t)^{2004} + (1 + t)^{2006} \geq 2^{2006}$$

выполнено при $t = \pm 1$ (те значения, которые подставляются первым делом), а также при $t > 1$ (поскольку оба слагаемых положительны, а второе уже больше, чем 2^{2006}) и при $t < -1$ (по аналогичной причине).

Кроме того, видно, что неравенство не выполнено при $t = 0$. Вероятно, оно не выполнено на всем интервале $t \in (-1; 1)$.

Попробуем это доказать. Поскольку

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tg} x &= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2} \cos(x + \pi/4)}{\cos x}, \\ 1 + \operatorname{tg} x &= \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin(x + \pi/4)}{\cos x}, \end{aligned}$$

левая часть исходного неравенства преобразуется к виду

$$\frac{4 \cdot 2^{1002} \cos^{2004}(x + \pi/4)}{\cos^{2004} x} + \frac{2^{1003} \sin^{2006}(x + \pi/4)}{\cos^{2006} x}.$$

Заметим, что мы рассматриваем участок $t \in (-1; 1)$ или $x \in (-\pi/4; \pi/4)$, на котором $\cos x > 1/\sqrt{2}$, поэтому написанная дробь строго меньше, чем

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^{1002} (\sqrt{2})^{2004} \cos^{2004} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2^{1003} (\sqrt{2})^{2006} \sin^{2006} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \\ = 2^{2006} \left(\cos^{2004} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^{2006} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) < 2^{2006}, \end{aligned}$$

поскольку

$$0 < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \cos^n \alpha + \sin^m \alpha < \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

при $n, m > 2$, если $0 < \alpha < \pi/2$.

Итак, остается решить неравенство $|\lg x| \geq 1$. Это не должно быть трудно. ►

☞ **Ответ:** $x \in (-\pi/2 + \pi n; -\pi/4 + \pi n] \cup [\pi/4 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$.

Кажется, назрел логический момент для перехода к обратным тригонометрическим функциям.

21. Решить неравенство $\arcsin x < \sqrt{x^2 - 1}$.

◀ ОДЗ состоит всего из двух точек $x = \pm 1$. Подстановкой убеждаемся, что неравенство верно при $x = -1$, поскольку

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} < 0 = \sqrt{1 - (-1)^2}. \quad \blacktriangleright$$

☞ **Ответ:** $x = -1$.

22. Решить неравенство $\arcsin x < \arccos x$.

◀ Из графиков, что называется, «сразу виден» ответ: $x \in [-1; \sqrt{2}/2)$. Если же приемная комиссия будет недовольна, можно «просто решить» неравенство. Пусть $\arcsin x = t$, тогда неравенство имеет вид $t < \pi/2 - t$, откуда $t < \pi/4$. С учетом области определения, $t \in [-\pi/2; \pi/2]$, получаем $-\pi/2 \leq t < \pi/4$, откуда $-1 \leq x < \sqrt{2}/2$. ►

☞ **Ответ:** $x \in [-1; \sqrt{2}/2)$.

23. Решить неравенство

$$\arcsin \frac{x+2}{5} \leq \arccos \frac{3x+1}{5}.$$

◀ ОДЗ определяется из системы

$$\begin{cases} |x+2| \leq 5, \\ |3x+1| \leq 5, \end{cases}$$

и состоит из тех x , для которых $x \in [-2; 4/3]$. В этом случае неравенство можно переписать в виде

$$\arccos \sqrt{1 - \left(\frac{x+2}{5}\right)^2} \leq \arccos \frac{3x+1}{5},$$

откуда, в силу монотонного убывания арккосинуса,

$$\sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{25}} \geq \frac{3x+1}{5}.$$

Решая это неравенство, получаем ответ: $x \in [-2; 1]$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [-2; 1]$.

24. Решить неравенство $2 \cos(\arcsin x) - \sin((1/2) \arccos x) \leq 0$.

◀ Неравенство равносильно иррациональному неравенству

$$2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x}{2}} \leq 0$$

или

$$2\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{\frac{1-x}{2}} \Leftrightarrow 8(1-x)(1+x) \leq 1-x,$$

при условии $|x| \leq 1$. Решив его, получаем ответ: $-1 \leq x \leq -7/8$, $x = 1$. ▶

☛ **Ответ:** $-1 \leq x \leq -7/8$, $x = 1$.

25. Решить неравенство $\arcsin(\sin x) < \arccos(\cos x)$.

◀ В силу периодичности синуса и косинуса достаточно решить неравенство на отрезке $[0; 2\pi]$. Поскольку на отрезке $[0; \pi/2]$ левая и правая часть равны

между собой, этот отрезок в ответ не входит. На промежутке $[\pi; 2\pi]$ неравенство, очевидно, выполнено, поскольку левая часть отрицательна, а правая положительна. Остается интервал $(\pi/2; \pi]$. Здесь $\cos x < 0$ и, значит, $\arccos(\cos x) > \pi/2$, тогда как $\arcsin(\sin x) < \pi/2$. ►

☞ **Ответ:** $x \in (\pi/2 + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$.

26. Найти область определения функции

$$y = \arcsin(\arcsin x) + \arccos\left(\frac{2 \arccos x}{\pi - 2}\right).$$

◀ Дело сводится к решению системы неравенств

$$-1 \leq \arcsin x \leq 1, \quad -1 \leq \frac{2 \arccos x}{\pi - 2} \leq 1.$$

Решение первого из них: $-\sin 1 \leq x \leq \sin 1$. Второе переписывается в виде $\arccos x \leq (\pi - 2)/2$ в силу неотрицательности любого арккосинуса. Отсюда

$$x \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \sin 1.$$

Значит, область определения состоит из одной точки $x = \sin 1$. ►

☞ **Ответ:** $D[y] = \{\sin 1\}$.

27. Решить неравенство

$$\arccos 3x + \arcsin(x + 1) \leq \frac{7\pi}{6}.$$

◀ Начнем с ОДЗ, поскольку, когда вопрос касается обратных тригонометрических функций, это — первое дело. ОДЗ определяется условием $x \in [-1/3; 0]$. И на столь малом отрезке разворачиваются значительные события!

Перепишем неравенство:

$$\arccos 3x \leq \frac{7\pi}{6} - \arcsin(x + 1).$$

Оценим обе части. Левая заведомо заключена в пределах $[\pi/2; \pi]$, правая — в пределах $[2\pi/3; 7\pi/6 - \arcsin(2/3)]$. Поскольку $\arcsin(2/3) > \arcsin 1/2 = \pi/6$, этот второй интервал также лежит в пределах $[\pi/2; \pi]$ — зоне монотонности

косинуса. Не забудем, что косинус убывает в данном промежутке, и перейдем от неравенства

$$\arccos 3x \leq \frac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1)$$

к неравенству

$$3x \geq \cos\left(\frac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1)\right).$$

После упрощений получим

$$\sqrt{-3x^2 - 6x} > -7x - 1.$$

Если $-7x - 1 < 0$, т.е. $x > -1/7$, неравенство выполнено. Если $x \leq -1/7$, то возводим в квадрат и приходим к неравенству $52x^2 + 20x + 1 \leq 0$, откуда

$$\frac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} \leq x \leq \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{26}.$$

Эта правая граница правее точки $x = -1/7$, а левая — правее точки $x = -1/3$, поэтому с учетом ОДЗ получаем ответ: $(-5 - 2\sqrt{3})/26 \leq x \leq 0$. ►

✎ **Ответ:** $(-5 - 2\sqrt{3})/26 \leq x \leq 0$.

28. Решить неравенство $\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) \leq x - 5$.

◀ И здесь мыслящему взору сразу представляется зубчатый график левой части, навывлет проткнутый прямой $y = x - 5$.

Поскольку левая часть — периодическая функция с периодом 2π , рассмотрим 4 случая.

Если $x \in [0; \pi/2]$, то

$$\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) = x + 2x = 3x.$$

Если $x \in [\pi/2; \pi]$, то

$$\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) = \pi - x + 2x = x + \pi.$$

Если $x \in [\pi; 3\pi/2]$, то

$$\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) = \pi - x + 2(2\pi - x) = 5\pi - 3x.$$

Если $x \in [3\pi/2; 2\pi]$, то

$$\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) = x - 2\pi + 2(2\pi - x) = 2\pi - x.$$

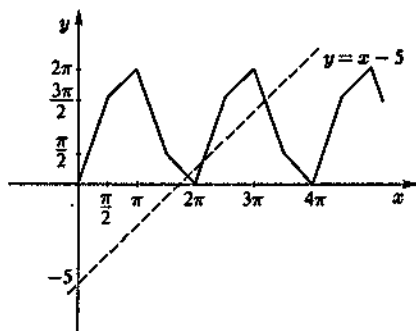


Рис. 32

Нарисовав график (рис. 32) на отрезке $x \in [0; 2\pi]$ и повторив его вправо, видим, что пересечение с прямой $y = x - 5$ нужно искать на отрезках $[3\pi/2; 2\pi]$, $[2\pi; 5\pi/2]$ и $[3\pi; 7\pi/2]$.

На отрезке $[3\pi/2; 2\pi]$ имеем неравенство

$$2\pi - x \leq x - 5, \quad \text{т.е.} \quad x \in \left[\pi + \frac{5}{2}; 2\pi\right].$$

На отрезке $[2\pi; 5\pi/2]$ имеем

$$x - 2\pi + 2(x - 2\pi) \leq x - 5,$$

$$\text{т.е.} \quad x \in [2\pi; 3\pi - 5/2].$$

На отрезке $[3\pi; 7\pi/2]$ неравенство имеет вид

$$3\pi - x + 2(4\pi - x) \leq x - 5 \quad \text{или} \quad x \in \left[\frac{11\pi + 5}{4}; \frac{7\pi}{2}\right].$$

При $x > 7\pi/2$ неравенство выполнено. Итак, ответ:

$$x \in \left[\pi + \frac{5}{2}; 3\pi - \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi + 5}{4}; +\infty\right).$$

Ответ: $x \in [\pi + 5/2; 3\pi - 5/2] \cup [11\pi + 5/4; +\infty)$.

Завершаем раздел, как всегда, параметрами.

29. Решить при всех a неравенство

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} \geq a.$$

Пусть $\sin x = t$; тогда имеем

$$\frac{t^2 - at - 1}{t} \geq 0.$$

У числителя корни есть при любом a , причем они разных знаков;

$$t_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} < 0, \quad t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} > 0.$$

Метод интервалов дает: $t_1 \leq t < 0$, $t \geq t_2$. Разберем возможные случаи изменения t_1 и t_2 .

1) Если $t_2 > 1$, $t_1 \geq -1$, то решением будет только $t_1 \leq t < 0$. Имеем:

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 4} > 2, \\ a - \sqrt{a^2 + 4} \geq -2, \end{cases}$$

откуда $a > 0$. Тогда

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \leq \sin x < 0$$

и, значит,

$$2\pi n + \pi \leq x < \pi - \arcsin \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} + 2\pi n,$$

$$\arcsin \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} + 2\pi k \leq x < 2\pi k.$$

2) Если $t_1 \geq -1$, $t_2 \leq 1$, то

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 4} \leq 2, \\ a - \sqrt{a^2 + 4} \geq -2. \end{cases}$$

Система решений не имеет.

3) Если $t_1 < -1$, $t_2 \leq 1$, то

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 4} \leq 2, \\ a - \sqrt{a^2 + 4} < -2. \end{cases}$$

Решением будут все $a < 0$. Решением неравенства $t_1 \leq t < 0$, т. е. $\sin x < 0$ будут промежутки вида $(\pi + 2\pi m; 2\pi m)$. Неравенство $t \geq t_2$ или

$$\sin x \geq \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

выполнено при

$$2\pi t + \pi - \arcsin \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \leq x \leq 2\pi t + \arcsin \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Ответ: Если $a \leq 0$, то $x \in (\pi + 2\pi m; 2\pi m)$,

$x \in (2\pi t + \pi - \arcsin(a + \sqrt{a^2 + 4})/2; 2\pi t + \arcsin(a + \sqrt{a^2 + 4})/2)$;

если $a > 0$, то $x \in [2\pi n + \pi; \pi + 2\pi n - \arcsin(a - \sqrt{a^2 + 4})/2)$,

$x \in [2\pi k + \arcsin(a - \sqrt{a^2 + 4})/2; 2\pi k)$.

30. Найти все a , при которых решением неравенства

$$|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$$

является любое действительное число x .

◀ Здесь всё понятно без комментариев: торжествует вспомогательный угол.

$$-3 \leq 3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2 \sin^2 x + a \sin 2x + a + 1 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \sin 2x - \cos 2x + a - 1 \leq 0, \\ a \sin 2x - \cos 2x + a + 5 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a+5}{\sqrt{a^2+1}} \leq \sin(2x-\phi) \leq \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}, \quad \text{где } \operatorname{tg} \phi = \frac{1}{a}.$$

Это двойное неравенство будет выполнено при всех x в том и только в том случае, когда одновременно

$$-\frac{a+5}{\sqrt{a^2+1}} \leq -1 \quad \text{и} \quad \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \geq 1.$$

Эти неравенства равносильны соответственно неравенствам

$$\sqrt{a^2+1} \leq a+5 \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2+1} \leq 1-a.$$

Решая их как систему, получаем ответ: $-12/5 \leq a \leq 0$. ▶

☛ **Ответ:** $-12/5 \leq a \leq 0$.

31. Какие из чисел $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$ обладают тем свойством, что неравенство $2 \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \cos z \leq a$ выполнено при всех x, y и z ?

◀ Ясно, что $a = 1$ требуемым свойством не обладает, поскольку, взяв значения неизвестных такими, что $\sin x = 1$, $\cos y = 1$, $\sin z = 1$, мы получим слева 2, а справа 1.

Пусть теперь $a \neq 1$. Рассмотрим векторы $\vec{p} = (2 \sin x \cos y; \cos x \sin y)$ и $\vec{q} = (\sin z; -\cos z)$. Их длины легко оцениваются:

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= \sqrt{4 \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y} \leq \sqrt{4 \sin^2 x + \cos^2 x} = \\ &= \sqrt{3 \sin^2 x + 1} \leq 2, \quad |\vec{q}| \leq 1, \end{aligned}$$

поэтому $|\vec{p}\vec{q}| \leq |\vec{p}||\vec{q}| \leq 2$, т. е. левая часть не превосходит 2, и оба значения $a = 2$, $a = 3$ удовлетворяют условию задачи. ▶

☛ **Ответ:** $a = 2$, $a = 3$.

Жанр следующей задачи определить трудно, но помещаем ее здесь ввиду того, что раздел тригонометрических уравнений и без того перегружен. Формулировка тянет на кунсткамеру.

32. Найти все a , при которых функция

$$y = \frac{4 \sin x + a}{4a - 2 \sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

◀ В переводе: надо найти все a , при которых для любого $y \in [0; 1]$ найдется x , т. ч.

$$\frac{4 \sin x + a}{4a - 2 \sin x} = y. \quad (*)$$

Заметим прежде всего, что при $a = 0$ данная функция сводится к константе $y = -2$ и условие задачи не выполнено. Итак, $a \neq 0$.

Равенство $(*)$ можно переписать в виде

$$\sin x = \frac{a(4y - 1)}{2y + 4}.$$

Это уравнение (относительно x) имеет решение при выполнении условий

$$-1 \leq \frac{a(4y - 1)}{2y + 4} \leq 1.$$

Если $4y - 1 > 0$, то это двойное неравенство равносильно такому:

$$-\frac{2y + 4}{4y - 1} \leq a \leq \frac{2y + 4}{4y - 1} \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{4y - 1} \right) \leq a \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{4y - 1} \right).$$

Поскольку $1/4 < y \leq 1$, а граничные выражения монотонно убывают с увеличением y , подставив $y = 1$, для параметра получаем ограничения $-2 \leq a \leq 2$ (и помним, что $a \neq 0$).

Аналогично в случае $4y - 1 < 0$ приходим к неравенству

$$\frac{2y + 4}{4y - 1} \leq a \leq -\frac{2y + 4}{4y - 1}$$

и поскольку в данном случае $0 \leq y < 1/4$, получаем, подставив $y = 0$, условия $-4 \leq a \leq 4$. Оба эти неравенства удовлетворяются при $-2 \leq a \leq 2$.

Случай $4y - 1 = 0$ дает нам равенство $\sin x = 0$, т. е. уравнение имеет решение независимо от параметра a . ►

☛ **Ответ:** $a \in [-2; 0) \cup (0; 2]$.

А теперь еще парочка монстров для завершения темы.
Baby-monster:

33. Найти все значения $x \in [-3; 1]$, для которых неравенство

$$x(\pi(x+1) - 4 \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11)) > 0$$

выполнено при любых целых m .

◀ Рассмотрим два случая.

1) $x \in [0; 1]$. Тогда $\pi(x+1) - 4 \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) > 0$ или

$$\operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) < \frac{\pi(x+1)}{4}.$$

Поскольку $3m^2 + 12m + 11 = 3(m+2)^2 - 1$, а

$$\frac{\pi(x+1)}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right],$$

значение $x = 1$ заведомо удовлетворяет условию. Если же $0 \leq x < 1$, то неравенство

$$\operatorname{arctg}(3n^2 - 1) < \frac{\pi(x+1)}{4}$$

не может быть верно при любых целых n (мы обозначили $n = m + 2$) ввиду того, что при любом конкретном $0 \leq x < 1$ всегда будет

$$\frac{\pi(x+1)}{4} < \frac{\pi}{2},$$

тогда как при возрастании n $\operatorname{arctg}(3n^2 - 1)$ может сколь угодно мало отличаться от $\pi/2$. (Математики выражают это факт сухо: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(3x^2 - 1) = \pi/2$.)

2) $x \in [-3; 0]$. Тогда имеем неравенство

$$\operatorname{arctg}(3n^2 - 1) > \frac{\pi(x+1)}{4},$$

причем

$$\frac{\pi(x+1)}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right).$$

Это неравенство заведомо выполнено, если

$$\frac{\pi(x+1)}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right), \quad \text{т.е.} \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{4} < -\frac{1}{4}$$

или $-3 \leq x < -2$. ▶

❖ **Ответ:** $-3 \leq x < -2$, $x = 1$.

И Big-monster:

34. Найти все значения параметра a , для которых имеет решения система

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leq 5, \\ \sqrt{a^2 + (6/\pi) \arccos \sqrt{1-x^2} - 16 - (2/\pi^2) \arcsin x (\pi + 2 \arcsin x)} \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

◀ Первое неравенство в переводе на русский язык означает совокупность

$$\begin{cases} 2-3y \leq y+2 \leq 5, \\ y+2 \leq 2-3y \leq 5, \end{cases}$$

решением которой является промежуток $y \in [-1; 3]$.

Прежде чем нырнуть под знак радикала, напомним себе, что

$$\arccos \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ -\arcsin x, & \text{если } x \in [-1; 0] \end{cases}$$

Ну а теперь вперед. Ясно, что надо рассмотреть два случая:

1) $x \in [0; 1]$; тогда

$$\arccos \sqrt{1-x^2} = \arcsin x$$

и второе неравенство исходной системы имеет вид

$$\sqrt{a^2 - \frac{4}{\pi^2} \arcsin^2 x + \frac{4}{\pi} \arcsin x - 16} \geq y^2 + 2ay + 7$$

или

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{\pi} \arcsin x - 1\right)^2} - 15 \geq y^2 + 2ay + 7, \quad \sqrt{a^2 - t^2 - 15} \geq y^2 + 2ay + 7,$$

где

$$t = \frac{2}{\pi} \arcsin x - 1 \Rightarrow t \in [-1; 0].$$

2) $x \in [-1; 0]$; тогда

$$\arccos \sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$$

и неравенство имеет вид

$$\sqrt{a^2 - \frac{6}{\pi} \arcsin x - \frac{4}{\pi^2} \arcsin^2 x - 16} \geq y^2 + 2ay + 7,$$

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{\pi} \arcsin x + 2\right)^2} - 12 \geq y^2 + 2ay + 7, \quad \sqrt{a^2 - z^2 - 12} \geq y^2 + 2ay + 7,$$

где

$$z = \frac{2}{\pi} \arcsin x + 2 \Rightarrow z \in [1; 2].$$

Но какова же идея? Чтобы к ней подобраться, воспользуемся евклидовым методом от противного, ибо в данном случае легче понять, когда неравенство *не будет иметь решений*. Действительно, для этого достаточно, чтобы наибольшее значение A левой части неравенства было меньше наименьшего значения B правой части. Значит, решения будут, если $A \geq B$. Оценим обе величины.

Наибольшее значение выражения $\sqrt{a^2 - t^2} - 15$ при $t \in [-1; 0]$ равно $\sqrt{a^2 - 15}$, а величины

$$\sqrt{a^2 - z^2} - 12 \quad \text{при } t \in [1; 2]$$

равно $\sqrt{a^2 - 13}$. Второе из них больше, поэтому

$$A = \sqrt{a^2 - 13}.$$

Наименьшее значение функции $f(y) = y^2 + 2ay + 7$ достигается либо в вершине параболы, т.е. при $y = -a$ (если вершина лежит на отрезке $[1; 3]$), либо на концах данного отрезка. Рассматриваем три случая.

а) $-a \in [1; 3] \Rightarrow a \in [-3; 1]$; в этом случае $B = 7 - a^2$ и остается решить неравенство $A \geq B$, т.е.

$$\sqrt{a^2 - 13} \geq 7 - a^2.$$

Подробности оставляем за кадром. Решений в этом случае нет.

б) $-a < -1$, т.е. $a > 1$; тогда наименьшее значение достигается при $y = -1$ и равно $8 - 2a$, значит, $B = 8 - 2a$. Решением неравенства

$$\sqrt{a^2 - 13} \geq 8 - 2a$$

будут $a \geq 11/3$.

в) $-a > 3$, т.е. $a < -3$; наименьшее значение $f(y)$ достигается при $y = 3$ и равно $16 + 6a$. Имеем неравенство

$$\sqrt{a^2 - 13} \geq 16 + 6a.$$

Оно выполнено при $a \leq -\sqrt{13}$. ►

☛ **Ответ:** $a \leq -\sqrt{13}$, $a \geq 11/3$.

Согласен с вами, дорогой читатель: непонятно, зачем нормальному человеку решать такие задачи. Но...

Человеческий фактор, как известно, редко принимается во внимание в математических задачах. (Э. Лу, «Грузовики „Вольво“»)



Привал очаровательных бражников

Решите неравенства:

- $\cos 2x + \sin 2x + \cos x - \sin x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$
- $\frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} < \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi.$
- $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 5x > 0, \quad 0 < x < \pi.$
- $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x, \quad |x| < \pi.$
- $\frac{(\sqrt{2}/2) \cos x - \cos^2 x}{4 \sin^2 x - 3} < 0.$
- $\sin^2 2x(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) > 2 \cos 2x.$
- $\frac{1 + \sin(x/2) - \sqrt{3} \cos(x/2)}{4 + 4 \sin x + 2 \cos x + \sin 2x} > 0.$
- $\cos x + \sqrt{2 + \cos x} \leq 0.$
- $\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} + \sin x > 0.$
- $\operatorname{ctg}(3x + 5)(\operatorname{ctg} 5 + \operatorname{ctg} 3x) \geq \sqrt{\operatorname{ctg} 3x} - 1.$
- $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) > 0.$
- a) $\cos(\sin x) > 0$; б) $\sin(\cos x) > 0.$
- $\sin 5x > 16 \sin^5 x.$
- $|\sin x| < |\cos x|.$
- $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq \frac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}.$
- $(\cos x - \cos 5x)(2 \sin x + 3 \cos x + 4) > 0.$
- $\cos \frac{\pi x}{4} \geq x^2 + 4x + 5.$
- $2 \operatorname{arctg} x \geq 3 \operatorname{arctg} x.$

19. $\arccos(2x^2 - x - 3) - \arcsin(x^2 + 5x + 4) \leq \frac{\pi}{2}.$

20. $\arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3} \leq \frac{3\pi}{4}.$

21.
$$\frac{\arccos x \cdot \operatorname{arctg} x + (\pi/6) \arccos x - (5\pi/6) \operatorname{arctg} x - (5\pi^2/36)}{\sin x + \cos x - (\sqrt{3}/2) \operatorname{tg} x - (\sqrt{3}/2)} < 0.$$

22. Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

23. В каких пределах изменяется величина $3 \arccos x + \arccos y$ при условии $\arcsin^2 x + \arccos^2 y = 9\pi^2/16$?

24. Найдите все значения x , при которых выражение

$$\sqrt{3x^4 - 2 - x^8} \sin \pi(2x + 16x^2)$$

имеет смысл и не обращается в 0.

25. Решите при всех $a > 0$ неравенство $\cos x - 1/\cos x \leq a$.

26. Найдите все a , при которых:

- а) неравенство $|\sin x - 1/3| - 1/3 \leq a$ выполнено при всех $x \in [0; 2\pi/3]$;
б) неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} + a + \frac{x^2 + 9}{a + \cos x} \leq 0$$

имеет единственное решение;

- в) неравенство $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ верно при всех x ;
г) сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2 + (1 - 2a)x + a - 4 = 0$$

больше $\pi/4$.

27. Найдите все пары $(a; b)$, при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \leq 1, \\ x^2 + ax + 1 \leq 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

28. Найдите все a , при которых:

а) функция

$$y = 8ax - a \sin 6x - 7x - \sin 5x$$

возрастает и не имеет экстремумов на всей числовой прямой;

б) область значений функции

$$y = \frac{a - \cos x}{2a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1/5; 1/3]$.

29. Докажите, что при всех x и y имеет место неравенство

$$2(2x - 1)^4 + 1 + (1 - 2(2x - 1)^4) \sin 2y \geq 0$$

и найдите все пары $(x; y)$, для которых неравенство обращается в равенство.

30. Докажите, что при всех $x > 0$ верно неравенство

$$x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x > 0.$$

31. Для каждого натурального значения k найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin y \leq 0, \end{cases} \\ -\pi k \leq x \leq \pi k, -\pi k \leq y \leq \pi k. \end{cases}$$

32.* Решите систему

$$\begin{cases} \frac{1}{20} \left(\frac{x^2}{\sin x} \right)^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0, \\ \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 \geq \frac{\pi}{24} \left(\frac{5\pi}{6} - x \right), \\ x^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} < 0. \end{cases}$$

Замечание. От читателя не ускользнет тот факт, что мы больше не посещаем Кунсткамеру; дело в том, что уже не за горами разделы «Хитрые, трудные задачи», которые суть одна большая кунсткамера, в которую может в любой момент заглянуть любитель-мазохист.

* «Переусложненная или слишком муторная».

Советы и решения

Р 1. Неравенство приводится к виду $(\cos x - \sin x)(2 \sin x + 1) \leq 0$, после чего применяется метод интервалов.

Р 2. Если $x = \pi/2$, то неравенство не выполняется, поэтому считаем $x \neq \pi/2$ и переписываем его в виде

$$\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

после замены $\operatorname{tg}(x/2) = t$ приходим к неравенству

$$\frac{t^3 - 1}{t^2 - t - 1} > 0,$$

решение которого

$$t \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 1 \right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right),$$

однако с учетом ограничения $0 < x < \pi$ получаем

$$t \in (0; 1) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right).$$

Р 3. Имеем

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 5x} < 0,$$

после чего применяем метод интервалов. Знаки чередуются, поскольку во всех точках, кроме $x = \pi/2$, меняет знак только один из множителей, а в указанной точке все три, т. е. опять же происходит перемена знака.

Р 4. Неравенство заменяется системой

$$\begin{cases} \sin 2x < 1 - \sin 2x, \\ \sin 2x \geq 0, \\ \cos x - \sin x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin 2x < \frac{1}{2}, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi n \leq x < \frac{\pi}{12} + \pi n, \\ \frac{5\pi}{12} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \end{cases}$$

что с учетом условия $|x| < \pi$ превращается в

$$\begin{cases} x \in \left[-\pi; -\frac{11\pi}{12} \right) \cup \left[0; \frac{\pi}{12} \right), \\ x \in \left(-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left(\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2} \right], \\ -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Остается нарисовать интервалы друг под другом и найти пересечение.

Р 5. Переписываем неравенство в виде

$$\frac{\cos x(\sqrt{2}/2 - \cos x)}{(\sin x - \sqrt{3}/2)(\sin x + \sqrt{3}/2)} < 0,$$

находим нули, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$, и применяем метод интервалов. Знаки чередуются, поскольку совпадающих нулей нет.

Р 6. Имеем

$$\sin^2 2x \cdot 2 \operatorname{ctg} 2x > 2 \cos 2x \quad \text{или} \quad \cos 2x(1 - \sin 2x) < 0,$$

откуда $\cos 2x < 0$ при условиях $\sin 2x \neq 1$, $x \neq \pi/2 + \pi k$, $x \neq \pi k$.

Р 7. Приводим неравенство к виду

$$\frac{2 \sin (x/2 - \pi/3) + 1}{(1 + \sin x)(\cos x + 2)} > 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) > -\frac{1}{2}, \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

Р 8.

$$\dots \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \cos x \leq \cos^2 x, \\ \cos x \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -1.$$

Р 9. Заменяем неравенство совокупностью двух систем:

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ 5 + 3 \cos 4x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x \leq 0, \\ 5 + 3 \cos 4x > 8 \sin^4 x. \end{cases}$$

Решение первой $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$. Второе неравенство второй системы приводится к виду $\cos^2 2x + \cos 2x > 0$.

Р 10. Раскладывая котангенс суммы, получаем

$$\operatorname{ctg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 5 \geq \sqrt{\operatorname{ctg} 3x}.$$

Так как $3\pi/2 < 5 < 2\pi$, то $\operatorname{ctg} 5 < 0$, поэтому и $\operatorname{ctg} 3x \leq 0$ (иначе левая часть неравенства отрицательна). Но, с другой стороны, $\operatorname{ctg} 3x \geq 0$. Значит, $\operatorname{ctg} 3x = 0$.

Р 11.

$$\dots \Leftrightarrow 2\pi n < \frac{1}{x^2} < \pi + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если $n = 0$, то это двойное неравенство сводится к неравенству $x^2 > 1/\pi$, т. е.

$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{\pi}} \right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}; +\infty \right).$$

Если $n \neq 0$, то

$$\frac{1}{\pi + 2\pi n} < x^2 < \frac{1}{2\pi n}$$

и либо

$$1) \quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} < x < -\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad \text{либо} \quad 2) \quad \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Р 12. а) Поскольку $\sin x \in [-1; 1] \subset [-\pi/2; \pi/2]$, где $\cos x > 0$, неравенство выполняется при всех x .

б) Имеем $2\pi k < \cos x < \pi + 2\pi k$. При $k = 0$ получаем $\cos x > 0$. Другие k не годятся.

Р 13. Поскольку

$$\begin{aligned} 16 \sin^5 x &= 16 \sin^2 x \sin^3 x = 2(1 - \cos 2x)(3 \sin x - \sin 3x) = \\ &= 6 \sin x - 3(\sin 3x - \sin x) - 2 \sin 3x + \sin x + \sin 5x = 10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x, \end{aligned}$$

неравенство принимает вид

$$10 \sin x - 5 \sin 3x < 0 \Leftrightarrow \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) < 0.$$

Р 14. ... $\Leftrightarrow \sin^2 x < \cos^2 x \Leftrightarrow \cos 2x > 0$.

Р 15. Если $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$, то неравенство приводится к виду

$$\operatorname{tg}^2 x \geq \operatorname{tg}^2 x,$$

откуда $x \in [\pi/3 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$. Если же $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$, то получаем

$$\operatorname{tg}^2 x \geq -\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \geq 0,$$

что в данном случае равносильно $\operatorname{tg} x < 0$ (равенство 0 не допускается ОДЗ).

Р 16. Прежде всего установим, что $2 \sin x + 3 \cos x + 4 > 0$; это так, поскольку

$$\sqrt{13} \sin(x + \phi) > -4$$

ввиду неравенства $\sqrt{13} < 4$. Значит, $\cos x - \cos 5x > 0$ или $\sin 3x \sin 2x > 0$. Раскладывая синусы кратных углов, перепишем это неравенство в виде

$$(4 \cos^2 x - 1) \sin^2 x \cos x > 0 \quad \text{или} \quad \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) \cos x > 0$$

при условии $\sin x \neq 0$.

Р 17.

$$\dots \Leftrightarrow \cos \frac{\pi x}{4} \geq (x+2)^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0, \\ \cos \frac{\pi x}{4} = 1. \end{cases}$$

Р 18. Имеем $2 \operatorname{arctg} x \geq 3(\pi/2 - \operatorname{arctg} x)$, откуда

$$\operatorname{arctg} x \geq \frac{3\pi}{10} \quad \text{и} \quad x \geq \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10}.$$

Это значение мы можем вычислить, вспомнив свои достижения в начале § 10.

Р 19. ... $\Leftrightarrow \arcsin(-2x^2 + x + 3) \leq \arcsin(x^2 + 5x + 4)$, откуда

$$-2x^2 + x + 3 \leq x^2 + 5x + 4.$$

В дополнение должны выполняться условия

$$x^2 + 5x + 4 \leq 1 \quad \text{и} \quad -2x^2 + x + 3 \geq -1.$$

Р 20. ОДЗ:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Левая часть — убывающая функция, поэтому если x_0 — корень соответствующего уравнения, то решением неравенства будет промежуток $[x_0; 1/\sqrt{3}]$. Подбором находим $x_0 = 1/2$.

Р 21. Приводим неравенство к виду

$$\frac{(\arccos x - 5\pi/6)(\operatorname{arctg} x + \pi/6) \cos x}{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sqrt{3}/2)} < 0$$

и при условии $|x| \leq 1$ применяем метод интервалов.

Р 22. Имеем

$$-1 \leq \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \leq 1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \geq 0, \\ \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \geq 0. \end{cases}$$

Решаем каждое неравенство на промежутке $[0; 2\pi]$. Получаем для первого

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right],$$

для второго $x \in [0; 3\pi/4) \cup [\pi; 7\pi/4)$ и находим пересечение.

Р 23. Дело можно свести к нахождению максимума и минимума функции

$$f(x) = 3 \arccos x + \sqrt{\frac{9\pi^2}{16} - \arcsin^2 x},$$

определенной и непрерывной при $x \in [-1; 1]$. Поскольку производная

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{9\pi^2/16 - \arcsin^2 x}}$$

нигде не обращается в 0 (уравнение $f'(x) = 0$ дает

$$\arcsin^2 x = \frac{81\pi^2}{160}, \quad \text{но} \quad \frac{81\pi^2}{160} > \frac{\pi^2}{4}$$

и, значит, предыдущее равенство невозможно), причем $f'(x) < 0$, т. е. функция убывает на отрезке $x \in [-1; 1]$, множеством значений является отрезок $[f(1); f(-1)]$.

Р 24. Неравенство $3x^4 - 2 - x^8 > 0$ выполнено при $1 < |x| < \sqrt[4]{2}$. Найдем и исключим из ответа те значения x , при которых

$$\sin \pi(2x + 16x^2) = 0.$$

Имеем $2x + 16x^2 = n$, откуда

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{16n+1}}{16}.$$

Рассмотрим сначала меньший (отрицательный) корень

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{16n+1}}{16}$$

и выясним, при каких n он принадлежит интервалу $(-\sqrt[4]{2}; -1)$. Неравенство

$$-\sqrt[4]{2} < x_1 < -1$$

приводится к виду

$$224 < 16n < 256\sqrt{2} - 32\sqrt[4]{2},$$

откуда

$$15 \leq n < 16\sqrt{2} - 2\sqrt[4]{2}.$$

Правая часть заключена между 20 и 21. Таким образом,

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{16n+1}}{16}, \quad n \neq 15, 16, 17, 18, 19, 20.$$

Аналогично для второго корня

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{16n+1}}{16}$$

и интервала $(1; \sqrt[4]{2})$ имеем неравенство

$$18 < n < 16\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2},$$

где правая часть заключена между 25 и 26, т. е.

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{16n+1}}{16}, \quad n \neq 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.$$

Для оценки правой части не обязательно иметь калькулятор. Проверим, например, что $16\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} > 25$ (чего на глаз не видно). В равносильном виде

$$\begin{aligned} 2\sqrt[4]{2} > 25 - 16\sqrt{2} &\Leftrightarrow (\text{правая часть положительна}) \quad 804\sqrt{2} > 1137 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} > \frac{1137}{804} = 1,3 \end{aligned}$$

(деление столбиком), что верно.

Р 25. Если $\cos x > 0$, то левая часть неположительна и неравенство верно. Если $\cos x < 0$ имеем $\cos^2 x - a \cos x - 1 \geq 0$, откуда

$$\cos x \leq \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

при выполнении условия $a - \sqrt{a^2 + 4} \geq -2$, которое равносильно $a \geq 0$.

Р 26. а) Неравенство $||t - 1/3| - 1/3| \leq a$ имеет решения только при $a \geq 0$ и после раскрытия модулей равносильно системе

$$\begin{cases} -a \leq t \leq a + \frac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} t \geq -a + \frac{2}{3}, \\ t \leq a. \end{array} \right. \end{cases}$$

Если $-a + 2/3 \leq a$, т. е. $a \geq 1/3$, то решением системы будут $t \in [-a; a + 2/3]$. Неравенство $-a \leq \sin x \leq a + 2/3$ при $a \geq 1/3$ выполнено для всех x , т. е. такие значения параметра удовлетворяют условию. Если $-a + 2/3 > a$, т. е. $0 \leq a < 1/3$, то решением системы будет объединение

$$t \in [-a; a] \cup \left[-a + \frac{2}{3}; a + \frac{2}{3}\right].$$

Неравенство $\sin x \leq a$ не выполнено при $x = \pi/2$; то же относится и к неравенству $\sin x \leq a + 2/3$.

б) Неравенство приводится к виду

$$\frac{(\sqrt{x^2+9}-a-\cos x)^2}{a+\cos x} \leq 0$$

и равносильно совокупности

$$\begin{cases} a + \cos x < 0, \\ \sqrt{x^2+9} - a - \cos x = 0. \end{cases}$$

Неравенство $\cos x < -a$ не может иметь только одно решение, поэтому в нашем случае оно вообще не должно иметь решений, т. е. $a \geq 1$. Поскольку уравнение совокупности имеет единственное решение, из симметрии следует, что это решение — $x = 0$. Но тогда $a = 2$. В этом случае

$$a + \cos x = 2 + \cos x \leq 3, \quad \sqrt{x^2+9} \geq 3$$

и равенство действительно возможно только при $x = 0$.

в) Неравенство равносильно такому:

$$a > \frac{2 + \sin^2 x}{1 + (4 - \sin x)^4}.$$

Оно будет выполнено при условии

$$a > f_{\text{наиб}}, \quad \text{где} \quad f(x) = \frac{2 + \sin^2 x}{1 + (4 - \sin x)^4}.$$

Для нахождения $f_{\text{наиб}}$ обойдемся без производной, поскольку если $\sin x = 1$, то числитель дроби максимален, а знаменатель минимален, т. е. достигается максимум. Итак, $f_{\text{наиб}} = 3/82$.

г) Заметим (вычислив дискриминант), что данное уравнение всегда имеет ровно два корня x_1 и x_2 . Если

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 < \frac{\pi}{2},$$

то, беря тангенс от левой части двойного неравенства, получаем

$$1 < \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2},$$

что благодаря теореме Виета дает неравенство

$$\frac{2a-1}{5-a} > 1,$$

откуда $2 < a < 5$. Если $a \geq 5$, то

$$\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 \geq \frac{\pi}{2}$$

и условие задачи выполнено. (При $a \geq 5$ оба корня уравнения положительны и больший из них

$$x_2 = \frac{2a-1 + \sqrt{4(a-1)^2 + 13}}{2} > 1,$$

т. е. уже $\operatorname{arctg} x_2 > \pi/4$).

Р 27. Неравенство $\sin bx \leq 1 - a$ имеет решения, только если $1 - a \geq -1$, т.е. $a \leq 2$. Второе неравенство системы имеет решения, только если $D \geq 0$, откуда $|a| \geq 2$. Таким образом, либо $a = 2$, либо $a \leq -2$. Если $a = 2$, то $x = -1$, значит, $\sin b \geq 1$, т.е.

$$b = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Если $a \leq -2$, то неравенство $\sin bx \leq 1 - a$ верно при всех x и, таким образом, единственное решение должно иметь второе неравенство: это означает, что $a = -2$. Параметр b при этом может быть любым.

Р 28. а) Требуется установить, при каких значениях параметра производная

$$y' = 8a - 6a \cos 6x - 7 - 5 \cos 5x \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$a \geq \frac{7 + 5 \cos 5x}{8 - 6 \cos 6x}.$$

Найдем наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{7 + 5 \cos 5x}{8 - 6 \cos 6x}.$$

Проверим, возможно ли одновременное выполнение равенств $\cos 5x = 1$, $\cos 6x = 1$ (тогда числитель максимален, а знаменатель минимален). Очевидно, $x = 2\pi n$.

Тогда $\max f(x) = 12/2 = 6$ и требование задачи выполнено при $a \geq 6$. Заметим, что хотя при $a = 6$ производная и обращается в нуль в точках $x = 2\pi n$, эти точки не являются точками экстремума, поскольку производная не может быть отрицательной, т.е. не может менять знак.

Р 29. Перепишем неравенство так:

$$2a(1 - \sin 2y) + \sin 2y + 1 \geq 0, \quad \text{где } a = (2x - 1)^4.$$

Поскольку $a \geq 0$, $1 - \sin 2y \geq 0$, $\sin 2y + 1 \geq 0$, неравенство верно всегда, а равенством становится в двух случаях:

$$\text{а) } a = 0, \quad \sin 2y + 1 = 0; \quad \text{б) } 1 - \sin 2y = 0, \quad \sin 2y + 1 = 0.$$

Первая возможность дает $x = 1/2$, $y = -\pi/4 + \pi n$, вторая не дает ничего. Первая скобка всегда положительна, вторая неотрицательна, поскольку $\sin 2b \geq -1$. Неравенство доказано. Равенство возможно только при $\sin 2b = -1$. Всё.

Р 30. При $x \in (0; \pi]$ все выполнено, поскольку первые два слагаемых положительны, а третье неотрицательно. Нарисовав примерные графики функций

$$y = x^2 + \pi x \quad \text{и} \quad y = -\frac{15\pi \sin x}{2},$$

видим, что при $x \geq 3\pi/2$ первый уходит ввысь и второму его не догнать. Спорная (только аналитически, по графику-то «видно») зона $x \in (\pi; 3\pi/2)$. Разобьем ее на две части. Если

$$x \in \left(\pi; \frac{7\pi}{6}\right) \quad \text{то} \quad x^2 + \pi x > 2\pi^2; \quad -\frac{1}{2} < \sin x < 0 \Rightarrow -\frac{15}{2}\pi \sin x < \frac{15\pi}{4}.$$

Но $2\pi^2 > 15\pi/4$, поскольку $8\pi > 15$. Если $x \in [7\pi/6; 3\pi/2)$, то $x^2 + \pi x > 91\pi^2/36$, $-15\pi \sin x/2 < 15\pi/2$, но первое число больше, поскольку $91\pi > 270$.

Р 31. Совокупность

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin y \leq 0, \end{cases}$$

даст шахматную доску (на рис. 33 закрасим области, являющиеся ее решением), на которую последовательно накладываются большие квадраты вида $[-\pi k; \pi k] \times [-\pi k; \pi k]$.

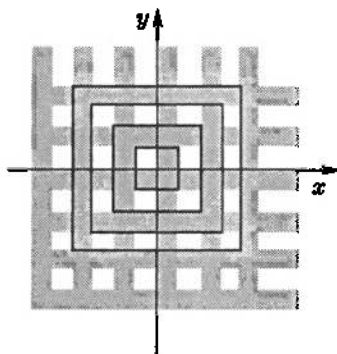


Рис. 33

При $k = 1$ внутри большого квадрата имеем один пустой квадратик (таким образом, $S_1 = 4\pi^2 - \pi^2 = 3\pi^2$), при $k = 2$ имеем уже $1 + 3$ пустых квадратика (и тогда $S_2 = 16\pi^2 - 3\pi^2 - \pi^2 = 12\pi^2$), при $k = 3$ имеем $1 + 3 + 5$ пустых квадратика и тогда $S_3 = 27\pi^2$. При произвольном k мы получаем тогда

$$S_k = 4k^2\pi^2 - (1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1)\pi^2 = \pi^2 \left(4k^2 - \frac{1 + 2k - 1}{2} k \right) = 3k^2\pi^2.$$

Можно рассуждать и так: квадрат $[-\pi k; \pi k] \times [-\pi k; \pi k]$ содержит k черных горизонталей и столько же черных вертикалей, которые имеют k^2 общих клеток; общая «черная» площадь равна $4\pi^2 k^2$, площадь общих клеток равна $\pi^2 k^2$, разность равна $3\pi^2 k^2$.

Р 32. Поскольку первые и третье неравенства решению едва ли поддаются, а второе, напротив, прекрасно решается, возникает единственная здравая мысль, что ответом будет какая-то часть множества решений второго неравенства. Решая его, находим $x \leq \pi/6$ или $x \geq 11\pi/24$. ОДЗ требует выполнения неравенств $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $x > 0$, что приводит к такому предварительному ответу:

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Рассматривая первое и третье неравенства системы как квадратные относительно x , требуем положительности дискриминантов, что дает нам два неравенства: $\sin x > x/5$ и $\cos x < x/5$, следствием которого будет $\sin x > \cos x$. Теперь ясно, что промежутки вида $(2\pi n; 2\pi n + \pi/2)$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ отпадают. Действительно, если $x \geq 2\pi$, то $x/5 > 1 > \sin x$. Отпадает и промежуток $(0; \pi/6]$, поскольку на нем $\cos x > \sin x$. Итак, остается только $[11\pi/24; \pi/2)$. Если он является ответом, то надо проверить

выполнение неравенств $\sin x > x/5 > \cos x$, а также первого и третьего неравенств исходной системы.

Неравенство $\sin x > x/5$ выполнено, так как в силу $x/5 < \pi/10$ имеем

$$\sin x > \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\pi}{10} > \frac{x}{5}.$$

Выполнено и неравенство $\cos x < x/5$, так как

$$\cos x < \cos \frac{11\pi}{24} < \frac{1}{4}, \quad \frac{x}{5} > \frac{11\pi}{120} > \frac{1}{4}.$$

При этом мы полагаем $\alpha = 11\pi/12$ и используем формулу

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

для вычисления сначала

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}},$$

а потом и

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$$

И проверяем, что

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2} < \frac{1}{4},$$

переходя к равносильному

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} > \frac{7}{4} \Leftrightarrow 16\sqrt{3} > 17.$$

Заметим, что угол $11\pi/24$ — это $82,5^\circ$, синус которого равен 0,99. Поэтому проверка первого неравенства системы сводится к проверке неравенства

$$\frac{x^4}{20} + 1 - x^{3/2} < 0.$$

Но на интервале $[11\pi/24; \pi/2)$ мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{20} + 1 - x^{3/2} &< \frac{\pi^4}{320} + 1 - \left(\frac{11\pi}{24}\right)^{3/2} = \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi^3}{40} - \frac{11}{3} \sqrt{\frac{11\pi}{24}} \right) + 1 < 0. \end{aligned}$$

Что до третьего неравенства, то здесь мы снова пользуемся тем, что $\cos x < 1/4$, и пишем:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} &< \frac{\pi^2 + 5}{4} - \frac{(11\pi/24)^3}{\sqrt{\cos x}} < \frac{\pi^2 + 5}{4} - \frac{2(11\pi)^{3/2}}{24^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\pi^2 + 5 - \frac{2 \cdot 11\pi}{6} \sqrt{\frac{11\pi}{6}} \right) < 0. \end{aligned}$$

Невольный комментарий. Много я повидал задач, «с тех пор как этим занимаюсь...», но такой... Да, задачка прегадкая, что и служит единственным оправданием для включения ее в гербарий: мы ведь не к поездке на курорт готовимся, а к суровой реальности экзаменов. Антон Семенович (doctor puerorum) в таких случаях говаривал:

В обучении всегда есть нечто от басни «Черепаша и орел». Черепаша увидела в небе орла, и захотелось ей и самой летать. Подошла она к нему и попросила за какую угодно плату научить ее. Сказал орел, что это невозможно, но она все настаивала и упрашивала. Поднял тогда орел ее в воздух, унес в вышину и бросил оттуда на скалу. Рухнула черепаха, разбилась и испустила дух.

Ответы

1. $(-\pi/2; -\pi/6] \cup [\pi/4; \pi/2)$; 2. $0 < x < \pi/2$, $2 \arctg(1 + \sqrt{5})/2 < x < \pi$;
3. $(\pi/10; \pi/4) \cup (3\pi/10; \pi/2) \cup (7\pi/10; 3\pi/4) \cup (9\pi/10; \pi)$;
4. $(-7\pi/12; -\pi/2] \cup [0; \pi/12)$; 5. $\pi/4 + 2\pi k < x < \pi/3 + 2\pi k$,
 $\pi/2 + 2\pi k < x < 2\pi/3 + 2\pi k$, $4\pi/3 + 2\pi k < x < 3\pi/2 + 2\pi k$,
 $5\pi/3 + 2\pi k < x < 7\pi/4 + 2\pi k$; 6. $\pi/4 + \pi k < x < \pi/2 + \pi k$,
 $\pi/2 + \pi k < x < 3\pi/4 + \pi k$; 7. $\pi/3 + 4\pi k < x < 3\pi/2 + 4\pi k$,
 $3\pi/2 + 4\pi k < x < 3\pi + 4\pi k$; 8. $\pi + 2\pi n$; 9. $-\pi/4 + 2\pi n < x < 5\pi/4 + 2\pi n$;
10. $\pi/6 + \pi n/3$; 11. $(-\infty; -\sqrt{1/\pi}) \cup (\sqrt{1/\pi}; +\infty)$, $(-1/\sqrt{2\pi n}; -1/\sqrt{\pi(2n+1)})$,
 $(1/\sqrt{(2n+1)\pi}; 1/\sqrt{2\pi n})$; 12. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $-\pi/2 + 2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n$;
13. $2\pi n < x < \pi/6 + 2\pi n$, $5\pi/6 + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$,
 $7\pi/6 + 2\pi m < x < 11\pi/6 + 2\pi m$; 14. $-\pi/4 + \pi k < x < \pi/4 + \pi k$;
15. $(-\pi/2 + \pi n; \pi n)$, $[\pi/3 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$; 16. $2\pi n < x < \pi/3 + 2\pi n$,
 $\pi/2 + 2\pi n < x < 2\pi/3 + 2\pi n$, $4\pi/3 + 2\pi n < x < 3\pi/2 + 2\pi n$,
 $5\pi/3 + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$; 17. $\emptyset$; 18. $x \geq (\sqrt{5} + 1)/(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$;
19. $(1 - \sqrt{33})/4 \leq x \leq -1$; 20. $1/2 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$; 21. $-1 < x < -\sqrt{3}/2$,
 $-\pi/4 < x < -\sqrt{3}/3$, $-\pi/6 < x < \pi/6$; 22. $[\pi k; \pi/2 + \pi k]$;
23. $[\pi\sqrt{5}/4; 3\pi + \pi\sqrt{5}/4]$; 24. $x \in (-\sqrt[4]{2}; -1)$, $x \neq (-1 - \sqrt{16n+1})/16$,
 $15 \leq n \leq 20$; $x \in (1; \sqrt[4]{2})$, $x \neq (-1 + \sqrt{16n+1})/16$, $19 \leq n \leq 25$;
25. $-\pi/2 + 2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n$,
 $\arccos(a - \sqrt{a^2 + 4})/2 + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos(a - \sqrt{a^2 + 4})/2 + 2\pi n$;
26. а) $a \geq 1/3$; б) $a = 2$; в) $a > 3/82$; г) $a > 2$; 27. $a = 2$, $b = \pi/2 + 2\pi n$; $a = -2$,
 $b \in \mathbb{R}$; 28. а) $a > 6$; б) $a \in [-2; 4/3] \setminus \{0\}$; 29. $x = 1/2$, $y = -\pi/4 + \pi n$;
31. $3\pi^2 k^2$; 32. $[11\pi/24; \pi/2)$.

§ 15. Системы тригонометрических уравнений

По непопулярности немногое может сравниться с тригонометрическими системами. Однако мы не станем по этой причине ущемлять национальное достоинство небольшого, но гордого народца, напротив того — постараемся рассмотреть вблизи с исчерпывающей (что?) полнотой.

1. Решить систему

$$\begin{cases} 6 \sin x \cos y + 2 \cos x \sin y + 3 = 0, \\ 5 \sin x \cos y - 3 \cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

◀ Пусть $\sin x \cos y = u$, $\cos x \sin y = v$; тогда прежде всего надо решить вспомогательную систему

$$\begin{cases} 6u + 2v = -3, \\ 5u - 3v = 1. \end{cases}$$

Сделаем это методом сложения. Умножая первое уравнение на 3 и складывая со вторым, умноженным на 2, имеем $28u = -7$ или $u = -1/4$. Теперь умножим первое уравнение на 5, а второе — на -6 и снова сложим полученное; мы придем к $28v = -21$ или $v = -3/4$.

Получившаяся система

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = -\frac{3}{4}, \end{cases}$$

вызывает однозначные ассоциации с формулами сложения для синуса. Поэтому, сложив уравнения системы, получим $\sin(x+y) = -1$. Аналогично, вычитая из первого уравнения второе, получаем $\sin(x-y) = 1/2$. Система

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -1, \\ \sin(x-y) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

равносильна исходной. Решая каждое уравнение, получаем

$$\begin{cases} x+y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x-y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n. \end{cases}$$

(Здесь приходится сказать неизбежные слова о том, что в ответе нужно использовать *разные буквы*, чтобы не связывать величины $x+y$ и $x-y$ дополнительным условием.)

Снова прибегая к сложению и вычитанию, получаем окончательный ответ:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \pi k + \frac{\pi n}{2}, \\ y &= -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \pi k - \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}$$

☛ **Ответ:** $x = -\pi/4 + (-1)^n \pi/12 + \pi k + \pi n/2$,
 $y = -\pi/4 + (-1)^{n+1} \pi/12 + \pi k - \pi n/2$.

2. Решить систему $\begin{cases} 4 \sin x \sin y = 1, \\ 3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + 1 = 0. \end{cases}$

◀ Имеем

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Складываем и вычитая, получаем

$$\begin{cases} \cos(x-y) = -\frac{1}{2}, \\ \cos(x+y) = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x+y = \pi + 2\pi k, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi(n+k), \quad y = \mp \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi(k-n).$$

Найденные серии решений удовлетворяют условиям $x, y \neq \pi/2 + \pi t$ (ОДЗ). ▶

☛ **Ответ:** $x = \pm \pi/3 + \pi/2 + \pi(n+k), y = \mp \pi/3 + \pi/2 + \pi(k-n).$

3. Решить систему $\begin{cases} \cos x = \sin y, \\ \sin x = -\cos y. \end{cases}$

◀ Эта система-малютка выглядит проще предыдущих, но здесь аналогичное действие — сложение-вычитание — приводит к ответу не сразу, поскольку уравнения-следствия не будут простейшими (т. е. вида $\sin t = a$ или $\cos t = a$). Поэтому перемножим уравнения крест-накрест; мы получим следствие

$$\cos x \cos y = -\sin x \sin y \quad \text{или} \quad \cos(x-y) = 0,$$

откуда $x-y = \pi/2 + \pi k$. Теперь подставим $y = x - \pi/2 - \pi k$ в первое уравнение системы; имеем

$$\cos x = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} - \pi k \right) \quad \text{или} \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} - \pi k \right),$$

откуда $\pi/2 - x = x - \pi/2 - \pi k + 2\pi n$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} + \pi n.$$

Тогда $y = \pi n - \pi k/2$. ▶

☛ **Ответ:** $x = \pi/2 + \pi k/2 + \pi n, y = \pi n - \pi k/2.$

4. Решить систему

$$\begin{cases} 2 \sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2 \cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

◀ Если из первого уравнения выразить $\cos x = -2 \sin x \sin y$ и подставить во второе, получим

$$1 - 2 \sin x \sin^2 y = 2 \sin x \cos^2 y,$$

откуда $2 \sin x = 1$ и $\sin x = 1/2$.

Не станем сразу выписывать общее решение, а рассмотрим отдельно два случая:

1) $\sin x = 1/2$, $\cos x = \sqrt{3}/2$. Тогда из системы находим $\sin y = -\sqrt{3}/2$. Таким образом,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

2) $\sin x = 1/2$, $\cos x = -\sqrt{3}/2$. Значит,

$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k. \quad \blacktriangleright$$

⇒ **Ответ:** $x = \pi/6 + 2\pi n$, $y = (-1)^{k+1} \pi/3 + \pi k$;
 $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, $y = (-1)^k \pi/3 + \pi k$.

5. Решить систему

$$\begin{cases} \sin x - 2 \cos y = \frac{5}{13}, \\ \cos x + 2 \sin y = \frac{12}{13}. \end{cases}$$

◀ В этом случае решение подсказывает основное тригонометрическое тождество, позволяющее исключить одно из неизвестных.

Поскольку

$$\sin x = \frac{5}{13} + 2 \cos y, \quad \cos x = \frac{12}{13} - 2 \sin y,$$

подставляя эти соотношения в равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получаем

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \frac{20}{13} \cos y + 4 \cos^2 y + \left(\frac{12}{13}\right)^2 - \frac{48}{13} \sin y + 4 \sin^2 y = 1$$

или после упрощений

$$\frac{5}{13} \cos y - \frac{12}{13} \sin y = -1,$$

что равносильно соотношению $\cos(y + \phi) = -1$, где $\phi = \arctg 12/5$. Тогда

$$y = \pi - \arctg \frac{12}{5} + 2\pi n.$$

Из условия $\sin x = 5/13 + 2 \cos y$, получаем

$$\sin x = \frac{5}{13} - 2 \cos \left(\arctg \frac{12}{5} \right) = \frac{5}{13} - \frac{2}{\sqrt{1+144/25}} = \frac{5}{13} - \frac{10}{13} = -\frac{5}{13}.$$

И окончательно

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{5}{13} + \pi k.$$

⊙ **Ответ:** $x = (-1)^{k+1} \arcsin (5/13) + \pi k$, $y = \pi - \arctg (12/5) + 2\pi n$.

6. Решить систему

$$\begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2} \cos 3y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \sin 3y. \end{cases}$$

◀ Возводя уравнения в квадрат и складывая, приходим к следствию

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 = \frac{1}{4}.$$

После преобразований получаем $\cos^2 2x = 0$. Отсюда

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

Как лучше всего найти y ? Ведь нужно еще одновременно осуществлять проверку... Обычный в случае алгебраических систем способ подстановки в данной теме подчас оборачивается целым крестовым походом.

Разобьем выражение для x на 4 серии.

Пусть $x = \pi/4 + 2\pi k$, тогда имеем

$$\begin{cases} \cos 3y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin 3y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Пусть $x = 3\pi/4 + 2\pi k$, тогда

$$\begin{cases} \cos 3y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin 3y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{и} \quad y = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Если $x = 5\pi/4 + 2\pi k$, то

$$\begin{cases} \cos 3y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin 3y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{и} \quad y = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Если $x = 7\pi/4 + 2\pi k$, то

$$\begin{cases} \cos 3y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin 3y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Запись ответа — отдельный куплет в песне под названием «Тригонометрические системы». Пусть читатель сам допоеёт его. (Хочется немного места сэкономить.) ►

7. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\cos(x-y)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{\cos y}{\cos(x-y)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

◀ Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\begin{aligned} \sin x = -\cos y &\Rightarrow \sin x + \cos y = 0 \Rightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Имеем два случая:

1) $x/2 + \pi/4 - y/2 = \pi n$. Тогда $x - y = -\pi/2 + 2\pi n$; этот вариант не годится, поскольку обращается в нуль знаменатель $\cos(x - y)$.

2) $x/2 - \pi/4 + y/2 = \pi/2 + \pi n$. Тогда $y = 3\pi/2 - x + 2\pi n$. Подставляя в первое уравнение системы, получаем

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi n\right) \quad \text{или} \quad -\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x.$$

Это уравнение распадается на два: а) $\sin x = 0$; б) $\cos x = -\sqrt{3}/2$.

Случай а) явно не отвечает реальности. Из б) находим $x = \pm 5\pi/6 + 2\pi k$; отсюда $y_1 = 2\pi/3 + 2\pi t$ (соответствует знаку плюс), $y_2 = \pi/3 + 2\pi t$. ►

☛ **Ответ:** $x_1 = 5\pi/6 + 2\pi k$, $y_1 = 2\pi/3 + 2\pi t$;
 $x_2 = -5\pi/6 + 2\pi k$, $y_2 = \pi/3 + 2\pi t$.

8. Решить систему

$$\begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \sin y = 0, \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$$

◀ Эту систему можно переписать иначе с участием двух новых неизвестных: $\sin x = u$, $\sin y = v$. Получится однородная система

$$\begin{cases} v^2 - 3uv = 1, \\ 21u^2 - v^2 = 5. \end{cases}$$

Решается она стандартным образом. После домножения первого уравнения на -5 и сложения со вторым получается $7u^2 + 5uv - 2v^2 = 0$, откуда 1) $u = -v$; 2) $7u = 2v$.

Случай 1) приводит к двум парам решений:

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad v_1 = -\frac{1}{2}; \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad v_2 = \frac{1}{2}.$$

Случай 2) дает $v = \pm\sqrt{7}$, что невозможно, поскольку $v = \sin y$.

Как видим, исходная система распалась на две простейшие:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin y = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение доводится до конца. ►

☞ **Ответ:** $x_1 = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $y_1 = (-1)^{k+1} \pi/6 + \pi k$;
 $x_2 = (-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n$, $y_2 = (-1)^n \pi/6 + \pi k$.

Кажется, пока все довольно понятно. Да, мы разгоняемся медленно: тригонометрические системы — материя скользкая.

9. Решить систему

$$\begin{cases} 12 \cos x \cos y \cos z + 1 = 0, \\ 3 \sin x \sin y = 2, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

◀ Первым делом исключим z и перепишем систему так:

$$\begin{cases} 12 \cos x \cos y \cos(x+y) = 1, \\ 3 \sin x \sin y = 2, \\ z = \pi - x - y. \end{cases}$$

Отбросим пока третье уравнение, а первые два преобразуем очевидным образом в сумму:

$$\begin{cases} \cos^2(x+y) + \cos(x-y)\cos(x+y) + \frac{1}{6} = 0, \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Пусть $\cos(x+y) = t$, тогда $\cos(x-y) = 4/3 + t$ и первое уравнение имеет вид

$$t^2 + t\left(\frac{4}{3} + t\right) + \frac{1}{6} = 0.$$

Его корни $t_1 = -1/2$, $t_2 = -1/6$.

Если $t = -1/2$, то для нахождения x и y имеем систему

$$\begin{cases} \cos(x+y) = -\frac{1}{2}, \\ \cos(x-y) = \frac{5}{6}, \end{cases}$$

и получаем

$$\begin{aligned} x &= \pm \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{6} \right) + \pi(n+k), & y &= \pm \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{6} \right) + \pi(n-k), \\ z &= \pi \mp \frac{2\pi}{3} - 2\pi n. \end{aligned}$$

Если $t = -1/6$, то

$$\cos(x-y) = \frac{7}{6},$$

т. е. данное значение не подходит. ►

☛ **Ответ:** $x = \pm(\pi/3 + (1/2) \arccos(5/6)) + \pi(n+k)$,
 $y = \pm(\pi/3 - (1/2) \arccos(5/6)) + \pi(n-k)$, $z = \pi \mp 2\pi/3 - 2\pi n$.

10. Решить систему

$$\begin{cases} \sin 2(x+y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

◀ Такого рода смешанные системы характеризуются, как правило, тем, что приходится более или менее основательно анализировать найденные решения.

Имеем

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ xy = 9, \end{cases}$$

и составляем вспомогательное уравнение

$$t^2 - \left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)t + 9 = 0.$$

Его дискриминант

$$D = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)^2 - 36$$

неотрицателен, если $|\pi/4 + \pi k| \geq 6$, т. е. при всех целых k , кроме $k = 0, \pm 1, -2$.
И можно писать ответ:

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)^2 - 36},$$

$$y = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)^2 - 36}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0, \pm 1, -2. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $x = \pi/8 + \pi k/2 \pm (1/2)\sqrt{(\pi/4 + \pi k)^2 - 36},$

$y = \pi/8 + \pi k/2 \mp (1/2)\sqrt{(\pi/4 + \pi k)^2 - 36}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0, \pm 1, -2.$

Излагая материал, учитель пытается представить его в виде логической последовательности, охватывающей все возможные случаи. Разложить по полочкам и сказать: «Элементарно, мол...» Но мы-то с вами понимаем, что самое интересное начинается тогда, когда он запрет свой комод и уйдет, оставляя простор для случаев, не нашедших себе места на полочках.

Тригонометрические системы с давних пор были коньком Физтеха... Дадим подборку лучших образцов жанра (примеры 11–16).

11. Решить систему

$$\begin{cases} \left| \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right| = -\sqrt{2} \cos y, \\ \cos 2y + 2 \sin 2x + \frac{3}{4} = 2 \sin^3 2x. \end{cases}$$

◀ Перепишем второе уравнение так:

$$2 \sin 2x (1 - \sin^2 2x) = -\cos 2y - \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$2 \sin 2x \cos^2 2x = \frac{1}{4} - 2 \cos^2 y \Leftrightarrow$$

(мы уже краем глаза косимся на первое уравнение)

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 y = \frac{1}{4} - \sin 4x \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 2x. \quad (*)$$

Здесь модуль — наш помощник: смело возводим первое уравнение в квадрат, держа в памяти $\cos y \leq 0$, и, учитывая (*), получаем

$$\cos^2(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 2x,$$

что на самом деле означает просто $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Если $\sin 2x = -1/2$, то второе уравнение системы сводится к... $\cos 2y = 0$. Отсюда $\cos^2 y = 1/2$ и, поскольку

$$\cos y \leq 0, \quad \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x = (-1)^{n+1} \pi/12 + \pi n/2$, $y = \pm 3\pi/4 + 2\pi k$.

12. Найти решения системы

$$\begin{cases} 5 \sin x \sin y + \frac{5}{2} \cos x \cos y = 2, \\ \cos x \sin y - 2 \sin x \cos y = \frac{6}{5}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

◀ Мы понимаем, что дополнительное условие ничего хорошего не предвещает: наверняка введено, чтобы спасти задачу, которая без него была бы безнадежной. Но решать-то всё равно надо... Впрочем, эту систему можно считать развитием идеи примера 5: применение основного тригонометрического тождества. Только вопрос: для x или для y ?

Сделаем выбор в пользу x . Обозначим для краткости $\sin y = a$, $\cos y = b$ и выразим через эти величины $\sin x$ и $\cos x$ из системы

$$\begin{cases} 5a \sin x + \frac{5}{2}b \cos x = 2, \\ a \cos x - 2b \sin x = \frac{6}{5}. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на $2b$, а второе — на $5a$ и сложив результаты, получим $(5b^2 + 5a^2) \cos x = 4b + 6a$, а поскольку

$$a^2 + b^2 = 1, \quad \cos x = \frac{6a + 4b}{5}.$$

Аналогично находим $\sin x = (2a - 3b)/5$.

(Заметим, справедливости ради: если бы мы захотели выразить $\cos y$ и $\sin y$ через $\sin x$ и $\cos x$, то получилось бы

$$\cos y = \frac{4(\cos x - 3 \sin x)}{5(\cos^2 x + 4 \sin^2 x)},$$

что гораздо более громоздко, чем в нашем случае. Подбор коэффициентов в системе рассчитан именно на выбранный нами путь.)

Теперь, подставив найденные выражения в тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, мы получим

$$25 = 40a^2 + 25b^2 + 36ab \quad \text{или} \quad -15 \sin^2 y = 36 \sin y \cos y,$$

откуда либо $\sin y = 0$, либо $\operatorname{tg} y = -12/5$.

Разберем по очереди открывшиеся возможности с учетом ограничений $0 \leq x \leq \pi$ и $0 \leq y \leq \pi$.

Если $y = 0$, то система принимает вид

$$\begin{cases} \cos x = \frac{4}{5}, \\ \sin x = -\frac{3}{5}, \end{cases}$$

и решений нет.

Если $y = \pi$, имеем

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{4}{5}, \\ \sin x = \frac{3}{5}, \end{cases}$$

откуда $x = \pi - \arcsin(3/5)$.

Если $y = \pi - \arctg(12/5)$, то $\sin y = (12/13)$, $\cos y = (-5/13)$ и имеем систему

$$\begin{cases} \cos x = \frac{4}{5}, \\ \sin x = \frac{3}{5}, \end{cases}$$

откуда $x = \arcsin 3/5$. ►

✎ **Ответ:** $(\pi - \arcsin(3/5); \pi)$, $(\arcsin(3/5); \pi - \arctg(12/5))$.

13. Решить систему

$$\begin{cases} \cos x \cos 2y + \sin y \cos 2x + 2 \cos x = 1, \\ \cos 2x + 3 \cos 2y + 8 \sin y = 4 \sin x \cos y + 8. \end{cases}$$

◀ Здесь мы с удовлетворением отмечаем, что возвращаются идеи, еще не забытые со времен обычных систем. Рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно $\sin x$ и для этого преобразуем его к виду

$$2 \sin^2 x + 4 \cos y \sin x + 7 - 8 \sin y - 3 \cos 2y = 0.$$

Дискриминант

$$\begin{aligned} D &= 16 \cos^2 y - 8(7 - 8 \sin y - 3 \cos 2y) = 16(1 - \sin^2 y) - 56 + \\ &+ 64 \sin y + 24(1 - 2 \sin^2 y) = -64 \sin^2 y + 64 \sin y - 1 = -16(2 \sin y - 1)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sin y = 1/2$. Тогда из второго же уравнения получаем $\sin x = -\cos y$.

Подстановка найденного в первое уравнение дает нам $\cos x = 1/2$. Совмещая три полученных условия, выписываем ответ:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k. \quad \blacktriangleright$$

✎ **Ответ:** $x = -\pi/3 + 2\pi n$, $y = \pi/6 + 2\pi k$; $x = \pi/3 + 2\pi n$, $y = 5\pi/6 + 2\pi k$.

14. Решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \sin y + 2 \operatorname{ctg} x \cos y = \sqrt{\frac{5}{2}}, \\ 2 \operatorname{ctg} x \sin y - \operatorname{tg} x \cos y = \sqrt{\frac{5}{2}}. \end{cases}$$

◀ Вычтем из первого уравнения второе; получим

$$\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 \operatorname{ctg} x(\cos y - \sin y) = 0$$

или после домножения на $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{2(\sin y - \cos y)}{\sin y + \cos y} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{2(\operatorname{tg} y - 1)}{\operatorname{tg} y + 1} = \frac{2(t - 1)}{t + 1},$$

если положить $\operatorname{tg} y = t$.

Теперь перемножим уравнения исходной системы; после небольших упрощений мы получим

$$-2 \cos 2y - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x \sin 2y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \sin 2y = \frac{5}{2}.$$

И настает черед торжествовать тангенсу половинного; раскладываем $\cos 2y$ и $\sin 2y$, а вместо $\operatorname{tg}^2 x$ и $\operatorname{ctg}^2 x$ подставляем их выражения через t . Приходим к уравнению

$$-\frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - \frac{(t-1)}{t+1} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{t+1}{t-1} \cdot \frac{2t}{1+t^2} = \frac{5}{2},$$

которое после избавления от знаменателя и приведения подобных превращается в $t^4 - 8t^2 - 9 = 0$.

Корни этого уравнения $t = \pm 3$. Тогда либо $\operatorname{tg}^2 x = 1$, либо $\operatorname{tg}^2 x = 4$.

Конечно, это еще не всё — ведь необходима проверка. И осталось по отдельности разобрать случаи:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} y = 3, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} y = 3, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \operatorname{tg} x = 2, \\ \operatorname{tg} y = -3, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \operatorname{tg} x = -2, \\ \operatorname{tg} y = -3. \end{cases}$$

В результате получаем такой ответ: $x_1 = \pi/4 + \pi k$, $y_1 = \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; $x_2 = -\pi/4 + \pi k$, $y_2 = \pi + \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; $x_3 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $y_3 = \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; $x_4 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $y_4 = -\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$. ►

🔍 **Ответ:** $x_1 = \pi/4 + \pi k$, $y_1 = \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; $x_2 = -\pi/4 + \pi k$, $y_2 = \pi + \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; $x_3 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $y_3 = \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; $x_4 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $y_4 = -\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$.

15. Решить систему

$$\begin{cases} 2 \cos 2y + 1 = (2 \cos y - 1)(1 + 2 \sin x), \\ \sin y(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x) = 3 \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

◀ Пусть $2 \cos y - 1 \neq 0$. Тогда из первого уравнения

$$\frac{2 \cos 2y + 1}{2 \cos y - 1} = 1 + 2 \sin 2x,$$

что после переноса 1 в левую часть, приведения к общему знаменателю и сокращений даст нам соотношение

$$\cos y = \sin 2x. \quad (*)$$

Так как

$$t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x},$$

то с учетом равенства (*) имеем

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = \frac{8}{\cos^3 y} - \frac{6}{\cos y}.$$

Тогда, заменив $\cos y = z$, приведем второе уравнение системы к виду

$$\frac{8}{z^3} - \frac{6}{z} = \frac{3z}{1 - z^2} \quad \text{или} \quad 3z^4 - 14z^2 + 8 = 0,$$

откуда $z^2 = 2/3$ (второе значение $z^2 = 4$ не подходит).

Значит,

$$\cos y = \sin 2x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Записать ответ не составляет труда.

Пусть теперь $2 \cos y - 1 = 0$. Тогда

$$\cos 2y = 2 \cos^2 y - 1 = -\frac{1}{2}$$

и первое уравнение системы обращается в тождество. Из 2-го уравнения находим

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = \frac{3 \cos y}{\sin^2 y} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1. \quad \blacktriangleright$$

❖ **Ответ:**

$$\begin{aligned} & (((-1)^n/2) \arcsin \sqrt{2/3} + \pi n/2; \pm \arccos \sqrt{2/3} + 2\pi k), \quad (\pi/4 + \pi n; \pm \pi/3 + 2\pi k), \\ & (((-1)^{n+1}/2) \arcsin \sqrt{2/3} + \pi n/2; \pm (\pi - \arccos \sqrt{2/3}) + 2\pi k). \end{aligned}$$

16. Решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin z}{\cos x \cos y} + 3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \frac{\sin x}{\cos y \cos z} - 5, \\ \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = \frac{\sin y}{\cos z \cos x} - 3. \end{cases}$$

◀ Для удобства обращения с огнем избавимся от знаменателей (а тем самым и от тангенсов). Система примет вид

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \sin z + 3 \cos x \cos y, \\ \sin y \sin z = \sin x - 5 \cos y \cos z, \\ \sin z \sin x = \sin y - 3 \cos z \cos x. \end{cases} \quad (1)$$

Складывая первое и третье уравнения системы (1), получим

$$(\sin y + \sin z)(\sin x - 1) = 3 \cos x (\cos y - \cos z)$$

или

$$\sin \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2} = -3 \cos x \sin \frac{y-z}{2} \sin \frac{y+z}{2},$$

откуда имеем две возможности:

$$1) \sin \frac{y+z}{2} = 0; \quad 2) \operatorname{ctg} \frac{y-z}{2} = -3 \cos x.$$

Первая дает нам $y+z = 2\pi n$. Тогда $z = 2\pi n - y$ и система принимает вид (1-е и 3-е уравнения одинаковые)

$$\begin{cases} \sin x \sin y = -\sin y + 3 \cos x \cos y, \\ -\sin^2 y = \sin x - 5 \cos^2 y. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\sin x + 1) \sin y = 3 \cos x \cos y, \\ \sin x = 5 - 6 \sin^2 y. \end{cases}$$

Поскольку из второго уравнения следует, что $\sin x + 1 = 6 \cos^2 y$, из первого уравнения, после сокращения на $3 \cos y \neq 0$, получаем $\sin 2y = \cos x$.

Тогда $\sin^2 2y + (5 - 6 \sin^2 y)^2 = 1$. Решая это биквадратное относительно $\sin y$ уравнение, находим $\sin y = \pm \sqrt{3}/2$. Соответственно, $\sin x = 1/2$.

Подстановка этих значений в систему позволяет получить следующие решения:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad y = \frac{\pi}{3} + 2\pi l, \quad z = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(n-l);$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \quad z = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi(n-l).$$

Остается рассмотреть случай

$$\operatorname{ctg} \frac{y-z}{2} = -3 \cos x$$

и убедиться, что это соотношение не дает новых решений. Сделать это можно, например, так:

Разделим первое уравнение системы (1) на третье, предполагая пока, что это возможно. Мы получим

$$\frac{\sin y}{\sin z} = \frac{\sin z + 3 \cos x \cos y}{\sin y - 3 \cos z \cos x}.$$

Перемножив крест-накрест члены этой пропорции, получим после упрощений

$$\sin^2 y - \sin^2 z = 3 \cos x \sin(y + z).$$

Это соотношение приводится к виду

$$\sin(y - z) \sin(y + z) = 3 \cos x \sin(y + z).$$

Поскольку возможность $\sin(y + z) = 0$ уже нами рассмотрена, остается только $\sin(y - z) = 3 \cos x$. Таким образом,

$$\operatorname{ctg} \frac{y - z}{2} = -\sin(y - z).$$

Отсюда следует, что

$$\cos \frac{y - z}{2} = 0,$$

т.е. $y - z = \pi + 2\pi n$. Тогда $\cos x = 0$, что не допускается ОДЗ.

Если, наконец, предположить, что $\sin x \sin z = 0$, например, $\sin x = 0$, мы получим систему

$$\begin{cases} \sin z = \pm 3 \cos y, \\ \sin y \sin z = -5 \cos y \cos z, \\ \sin y = \mp 3 \cos z, \end{cases}$$

которая решений не имеет, поскольку перемножив 1-е и 3-е уравнения, придем к выводу, что $\cos y \cos z = 0$, но ОДЗ это запрещает. ►

Ответ: $x = \pi/6 + 2\pi k$, $y = \pi/3 + 2\pi l$, $z = -\pi/3 + 2\pi(n - l)$;
 $x = 5\pi/6 + 2\pi k$, $y = 2\pi/3 + 2\pi l$, $z = -2\pi/3 + 2\pi(n - l)$.

Про такие задачи у нас в деревне говорят: «гроб на колёсиках». Но идем дальше, покинув пределы Физтеховские... Вот образчик, который МИФИ — всегдашний соперник долгопрудненского чуда — предлагал желающим поступить в сей храм.

17. Решить систему

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y, \\ 2 \sin x \cos(x - y) = \sin y. \end{cases}$$

◀ Тут стиль свой: трудного ничего, а повозиться придется «по-любому».

Второе уравнение дает нам $\sin(2x - y) = 0$, откуда $2x - y = \pi n$. Подставляя $y = 2x - \pi n$ в первое, получаем $4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 4x$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3x = 3(\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x) &\Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3 \sin x}{\cos 4x \cos 3x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x(3 - 4 \sin^2 x) \cos 4x = 3 \sin x. \end{aligned}$$

Отсюда: 1) $\sin x = 0$; 2) $(3 - 4 \sin^2 x) \cos 4x = 3$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k$, тогда $y = 2\pi k - \pi n$.

Уравнение $(3 - 4 \sin^2 x) \cos 4x = 3$ после понижения степени и замены $\cos 2x = t$ сводится к кубическому $2t^3 + t^2 - t - 2 = 0$, имеющему единственный корень $t = 1$. Однако новых решений системы это не дает. ►

☛ **Ответ:** $x = \pi k, y = 2\pi k - \pi n$.

18. Найти решения системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = x - y, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x, y \in (-\pi/2; \pi/2)$.

◀ «Нерешабельный» вид первого уравнения заставляет рассмотреть функцию $f(t) = \operatorname{tg} t - t$ и исследовать ее. Производная

$$f'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \operatorname{tg}^2 t$$

строго положительна на каждом из интервалов $(-\pi/2; 0)$ и $(0; \pi/2)$, значит, $f(t)$ возрастает в пределах каждого из них, и равенство $f(x) = f(y)$ может иметь место только при $x = y$. Тогда второе уравнение сразу решается: $\cos x = \sqrt{2}/2$, $x = y = \pm\pi/4$. ►

☛ **Ответ:** $(-\pi/4; -\pi/4), (\pi/4; \pi/4)$.

19. Решить систему

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x + \sin y + \sin z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

◀ И здесь возникает, конечно, страшное подозрение, что все косинусы равны $\sqrt{3}/2$, а все синусы $1/2$, но как это доказать?.. Симметрия подсказывает смелый шаг: возвести каждое уравнение в квадрат и результаты сложить. Действительно, после упрощений получается

$$\cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x) = 3.$$

Стало быть,

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ y - z = 2\pi k, \\ z - x = 2\pi m. \end{cases}$$

Отсюда $y = x - 2\pi n$, $z = x + 2\pi m$. Подставив во второе уравнение исходной системы, найдем $\sin x = 1/2$. Из двух серий

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi t, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi t$$

нас устраивает только первая, поскольку вторая дает отрицательные косинусы, не подходящие в первое уравнение.

Окончательно:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi t, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad z = \frac{\pi}{6} + 2\pi s.$$

(Мы понимаем, что это вовсе не означает $x = y = z$. И это показывают разные буквы, использованные при записи ответа.) ▶

✎ **Ответ:** $x = \pi/6 + 2\pi t$, $y = \pi/6 + 2\pi l$, $z = \pi/6 + 2\pi s$.

20. Решить систему

$$\begin{cases} 8 \cos x \cos y \cos(x-y) + 1 = 0, \\ x + y = z. \end{cases}$$

◀ Преобразуем первое уравнение к виду:

$$4(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \cos(x-y) + 1 = 0$$

или

$$4 \cos^2(x-y) + 4 \cos z \cos(x-y) + 1 = 0$$

и положим $\cos(x-y) = t$. Тогда имеем квадратное относительно t уравнение

$$4t^2 + 4 \cos z \cdot t + 1 = 0 \quad \text{или} \quad (2t + \cos z)^2 = -\sin^2 z,$$

откуда $\sin z = 0$ и $\cos z = \pm 1$.

Значит, $t_1 = -1/2$, $t_2 = 1/2$.

Если $t_1 = -1/2$, то

$$x - y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad x + y = 2\pi n.$$

Получаем решение

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k + n), \quad y = \mp \frac{\pi}{3} + \pi(n - k), \quad z = 2\pi n.$$

Если $t_2 = 1/2$, аналогично находим решения

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi(k + n), \quad y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k), \quad z = \pi + 2\pi n$$

$$\text{и } x = \frac{\pi}{3} + \pi(k + n), \quad y = \frac{2\pi}{3} + \pi(n - k), \quad z = \pi + 2\pi n. \quad \blacktriangleright$$

● **Ответ:** $x = \pm \pi/3 + \pi(k + n)$, $y = \mp \pi/3 + \pi(n - k)$, $z = 2\pi n$;
 $x = 2\pi/3 + \pi(k + n)$, $y = \pi/3 + \pi(n - k)$, $z = \pi + 2\pi n$; $x = \pi/3 + \pi(k + n)$,
 $y = 2\pi/3 + \pi(n - k)$, $z = \pi + 2\pi n$.

Трудно противостоять желанию заглянуть в заповедник гоблинов, в котором за 40 лет (1970–2010) были воспитаны поистине замечательные экземпляры.

21. Решить систему

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} \right) (\sqrt{11-x^2-y^2-4x-2y-6}) = 0, \\ \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{\pi x}{12} \cos \frac{\pi y}{6} = 2 \cos \frac{\pi x}{12} \sin \frac{\pi y}{6} + \sin^2 \frac{\pi x}{8}. \end{cases}$$

◀ Заметим, что вторая скобка в первом уравнении равняться 0 не может. Действительно, если

$$11 - x^2 - y^2 - 4x - 2y = 36, \quad \text{то } (x+2)^2 + (y+1)^2 + 20 = 0,$$

что невозможно. Значит, при условии $11 - x^2 - y^2 - 4x - 2y \geq 0$ система равносильна такой:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} = 0, \\ \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{\pi x}{12} \cos \frac{\pi y}{6} = 2 \cos \frac{\pi x}{12} \sin \frac{\pi y}{6} + \sin^2 \frac{\pi x}{8}. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение; имеем

$$\frac{1}{2} + 2 \sin \left(\frac{\pi x}{12} - \frac{\pi y}{6} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{4}$$

или

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{4} + 2 \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} = 0.$$

Сравнивая это равенство с первым уравнением, делаем вывод, что

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi x}{4} = 0, \\ \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Решение этой системы — две серии: $x = 2 + 4n$, $y = 1 + 2n - 6k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.
Осталось учесть условие

$$11 - x^2 - y^2 - 4x - 2y \geq 0 \quad \text{или} \quad (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 16.$$

Ему удовлетворяют только два значения x , а именно $x = \pm 2$ при $n = -1; 0$.

Если $x = 2$ (при $n = 0$), то y может равняться только -1 , однако это значение не может получиться из формулы $y = 1 + 2n - 6k$ при $n = 0$. Если $x = -2$, т.е. $n = -1$, то $y = -1 - 6k$. Подходит только $y = -1$. ►

✎ **Ответ:** $x = -2$, $y = -1$.

И в заключение — перед неизбежным переходом к параметрам — не забудем про обратные тригонометрические функции.

22. Решить систему

$$\begin{cases} \cos x - \arccos y = 1, \\ \cos(\pi y) - \arcsin x + 1 = 0. \end{cases}$$

◀ Первое уравнение должно нас насторожить: от величины, не превосходящей 1 (а таков $\cos x$) вычитается нечто неотрицательное (каков, несомненно, $\arccos y$) и получается 1. Конечно, это возможно, только если одновременно $\cos x = 1$ и $\arccos y = 0$. Тогда $x = 2\pi n$, $y = 1$.

После подстановки найденного второе уравнение принимает вид

$$\arcsin 2\pi n = 0.$$

Отсюда $n = 0$ и $x = 0$. ►

✎ **Ответ:** $x = 0$, $y = 1$.

23. Решить систему

$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \frac{\pi}{4}, \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = \frac{5\pi^2}{64}, \end{cases}$$

и для каждого решения (x, y) определить, что больше: величина $2y - 3x$ или $\sqrt[4]{2} - 0,5$.

◀ Конечно, сама по себе эта система проблемы не представляет, но дополнительное задание... Поглядим...

Заменим $\arccos 2y = u$, $\arcsin 3x = v$ и решим систему

$$\begin{cases} u + v = \frac{\pi}{4}, \\ \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

После упрощений второе уравнение приводится к виду $uv = -3\pi^2/64$. Составляем вспомогательное квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{\pi}{4}t - \frac{3\pi^2}{64} = 0;$$

его корни $t_1 = -\pi/8$, $t_2 = 3\pi/8$.

Первый корень не годится как значение арккосинуса, поэтому имеем единственную возможность:

$$\arccos 2y = \frac{3\pi}{8}, \quad \arcsin 3x = -\frac{\pi}{8}.$$

Отсюда

$$2y = \cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}, \quad 3x = -\sin \frac{\pi}{8}.$$

Поскольку

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/4)}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

решением системы служит единственная пара

$$x = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4}.$$

Приступаем ко второй части задания. Так как

$$2y - 3x = 2 \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

то надо сравнить

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{2}-0,5 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \vee 2\sqrt[4]{2}-1.$$

Имеем цепочку:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \vee 2\sqrt[4]{2}-1 &\Leftrightarrow 8-4\sqrt{2} \vee 4\sqrt{2}-4\sqrt[4]{2}+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt[4]{2} \vee 8\sqrt{2}-7 \Leftrightarrow 16\sqrt{2} \vee 128-112\sqrt{2}+49 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8\sqrt{2} \vee 11 \Leftrightarrow 128 > 121. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x = -(\sqrt{2-\sqrt{2}})/6$, $y = (\sqrt{2-\sqrt{2}})/4$; $2y - 3x > \sqrt[4]{2} - 0,5$.

24. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} 3 \cos 2x + 2\sqrt{y^2+1} + 4a = 3, \\ 4 \cos^2 x - \sqrt{y^2+1} + 5a = 4, \end{cases}$$

имеет решения.

◀ Складывая первое уравнение с удвоенным вторым и используя формулу

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

приходим к равенству $\cos^2 x = 1 - a$. Отсюда $0 \leq 1 - a \leq 1$, т. е. $0 \leq a \leq 1$. Подставив $\cos^2 x = 1 - a$ во второе уравнение, получаем

$$\sqrt{y^2+1} = a,$$

откуда $a \geq 1$. Таким образом, система имеет решения только при $a = 1$. ▶

☛ **Ответ:** $a = 1$.

25. Найти все a , при которых имеет решения система

$$\begin{cases} 6 \sin x \sin y = 5 \sin a, \\ 6 \cos x \cos y = 5 \cos a. \end{cases}$$

◀ Вычитая и складывая уравнения, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} 6 \cos(x+y) = 5(\cos a - \sin a), \\ 6 \cos(x-y) = 5(\cos a + \sin a), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{5\sqrt{2}}{6} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right), \\ \cos(x-y) = \frac{5\sqrt{2}}{6} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right), \end{cases}$$

и для разрешимости необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\left| \cos\left(a \pm \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Неравенство вида $|\cos t| \leq b$ ($b > 0$) выполнено при

$$\arccos b + \pi n \leq t \leq \pi - \arccos b + \pi n.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \arccos b + \pi n \leq a \leq \frac{3\pi}{4} - \arccos b + \pi n, \\ \frac{\pi}{4} + \arccos b + \pi k \leq a \leq \frac{5\pi}{4} - \arccos b + \pi k. \end{cases}$$

Ее решение: $\pi/4 + \arccos b + \pi m \leq a \leq 3\pi/4 - \arccos b + \pi m$. ►

● **Ответ:** $\pi/4 + \arccos(3\sqrt{2}/5) + \pi m \leq a \leq 3\pi/4 - \arccos(3\sqrt{2}/5) + \pi m$.

26. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (|x| + 1)a = \cos x + y, \\ \sin^2 x + y^2 = 1, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

◀ Поскольку x входит в оба уравнения четным образом, делаем вывод, что $x = 0$; тогда $y = \pm 1$. Для параметра получаем два значения: $a = 0$ и $a = 2$.

Если $a = 0$, то система принимает вид

$$\begin{cases} \cos x + y = 0, \\ \sin^2 x + y^2 = 1, \end{cases}$$

и для любого $y \in [-1; 1]$ первое уравнение имеет решения (бесконечно много), а второе уравнение становится тождеством. Значит, $a = 0$ не годится.

Если $a = 2$, имеем

$$\begin{cases} 2(|x| + 1) = \cos x + y, \\ \sin^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $y = \pm \cos x$; тогда

$$\begin{cases} |x| + 1 = \cos x, \\ |x| + 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x = 0$, поскольку

$$|x| + 1 \geq 1, \quad \cos x \leq 1 \Rightarrow |x| + 1 = \cos x = 1.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет. Тогда $y = 1$ и $(0; 1)$ — единственное решение системы. ►

✎ **Ответ:** $a = 2$.

27. Найти все $\alpha \in (-\pi; \pi)$, при которых система

$$\begin{cases} (1 - 4x^2 - 4y^2)(4x^2 + 15 - 12y) = 0, \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

имеет ровно 3 решения.

◀ Если

$$1 - 4x^2 - 4y^2 = 0, \quad \text{т.е.} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

то можно положить

$$x = \frac{1}{2} \cos \phi, \quad y = \frac{1}{2} \sin \phi,$$

где $\phi \in [0; 2\pi)$. Тогда второе уравнение примет вид $\sin(\phi + \alpha) = 1$, откуда

$$\phi + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Таким образом,

$$x = \frac{1}{2} \cos \phi = \frac{1}{2} \sin \alpha, \quad y = \frac{1}{2} \sin \phi = \frac{1}{2} \cos \alpha.$$

При любом значении параметра α эти формулы дают нам одно решение системы.

Пусть теперь $4x^2 + 15 - 12y = 0$. Тогда $y = x^2/3 + 5/4$ и, подставляя во второе уравнение, мы получим квадратное относительно x уравнение

$$\frac{\cos \alpha}{3} x^2 + x \sin \alpha + \frac{5}{4} \cos \alpha - \frac{1}{2} = 0. \quad (*)$$

Чтобы оно имело два решения, достаточно потребовать выполнения неравенства $D > 0$. После упрощений это условие принимает вид

$$8 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha - 3 < 0.$$

Отсюда $-1/2 < \cos \alpha < 3/4$. Из всех значений параметра, удовлетворяющих этому двойному неравенству, надо исключить те, при которых хотя бы одна пара решений уравнения $4x^2 + 15 - 12y = 0$ совпадает с найденной ранее парой $(1/2 \sin \alpha; 1/2 \cos \alpha)$.

Подставляя $x = 1/2 \sin \alpha$ в уравнение (*), получаем

$$\frac{\cos \alpha}{4} \left(\frac{1}{3} \sin^2 \alpha + 5 \right) = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha,$$

откуда либо $\cos \alpha = 0$, либо

$$\frac{1}{3} \sin^2 \alpha + 5 = 2 \cos^2 \alpha.$$

Первое условие дает нам два посторонних значения параметра: $\alpha = \pm \pi/2$, второе не выполнено ни при каких α .

Осталось решить неравенство $-1/2 < \cos \alpha < 3/4$ при $\alpha \in (-\pi; \pi)$. ►

⊗ **Ответ:** $-2\pi/3 < \alpha < -\arccos(3/4)$, $\alpha \neq -\pi/2$;
 $\arccos(3/4) < \alpha < 2\pi/3$, $\alpha \neq \pi/2$.

И наконец — последний тригонометрический монстр перед обращением к следующей теме.

28. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \frac{2(x+y)}{(a-\pi)z}, \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \leq y \leq \pi/2$, $z > 0$.

◀ Складывая и вычитая первые два уравнения, получим равенства

$$\cos(x-y) = \frac{(a-\pi)^2 - z^2(x+y)^2}{z^2(a-\pi)^2}, \quad \cos(x+y) = -\frac{(a-\pi)^2 + z^2(x+y)^2}{z^2(a-\pi)^2}. \quad (*)$$

Теперь главное — не убояться сделать то, что так часто делается при решении систем — использовать основное тригонометрическое тождество, и для этого возвести в квадрат выражения для $\sin(x-y)$ и $\cos(x-y)$, а потом сложить и приравнять к единице. В данном случае это даст равенство

$$\frac{(z^2(x+y)^2 + (a-\pi)^2)^2}{(a-\pi)^4 z^4} = 1,$$

откуда

$$\frac{z^2(x+y)^2 + (a-\pi)^2}{(a-\pi)^2 z^2} = 1$$

и таким образом, $\cos(x+y) = -1$ (равенство (*)).

Соотношение $x+y = \pi + 2\pi k$ даст нам равенство $\cos x = -\cos y$ и мы приходим к подсистеме

$$\begin{cases} x+y = \pi + 2\pi k, \\ \cos y = \frac{\pi + 2\pi k}{a-\pi}. \end{cases}$$

Для того чтобы удовлетворить условию задачи, надо потребовать, чтобы данная система имела решения только при одном значении $k \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение разрешимо при условии

$$0 \leq \frac{\pi + 2\pi k}{a-\pi} < 1$$

(равенство 1 не допускается, поскольку условие $\cos y = 1$ несовместимо с первым уравнением системы). Данное двойное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{2k+1}{a-\pi} \geq 0, \\ \frac{2k+2-a}{a-\pi} < 0. \end{cases} \quad \text{Если } a > \pi, \text{ то имеем } \begin{cases} 2k+1 \geq 0, \\ 2k+2 < \frac{a}{\pi}, \end{cases}$$

откуда $-1/2 \leq k < a/2\pi - 1$. Решением этого неравенства должно быть только $k = 0$, что приводит к условию $0 < a/2\pi - 1 \leq 1$, откуда $2\pi < a \leq 4\pi$. При $a < \pi$ приходим к неравенству $a/2\pi - 1 < k \leq -1/2$ и решением должно быть только $k = -1$, откуда

$$-2 \leq \frac{a}{2\pi} - 1 < -1 \quad \text{и} \quad -2\pi \leq a < 0. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $-2\pi \leq a < 0$, $2\pi < a \leq 4\pi$.



**Привал образованных
охотников**

Решите системы (1–17):

$$1. \begin{cases} \sin x = \sin^2 y, \\ \cos x = \cos^4 y. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^4 x + 32 \sin^2 y = 55, \\ \frac{1}{\sin^2 x} - 4 \cos y = 5. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 17 \cos 2x - 7 = 21 \sin x \cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3 \sin x} \cdot \cos y. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \sin(2x + y) + \sin(2x - y) = \sqrt{2} \cos y, \\ \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos y = \operatorname{tg}^2 y. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$
8. а)
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin x + \sin y^2 = 1, \\ |x| + y^2 = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{10} = -1, \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin \frac{x}{8} = -1. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 3 \operatorname{tg} \frac{y}{2} + 6 \sin x = 2 \sin(y - x), \\ \operatorname{tg} \frac{y}{2} - 2 \sin x = 6 \sin(x + y). \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos y \sin x = \cos 2y, \\ \cos 2x + \sin 2y = \sin^2 y + 3 \cos y \sin x. \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ 2 \sin(4x + 8y) \sin(3x + 10y) + 5 \cos(7x + 2y) = 4. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} (\cos y + \sin x - 1) \left(\operatorname{tg}^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{tg}^2 \left(y + \frac{\pi}{6} \right) \right) = 0, \\ (\sin x - \cos y)(2 - \sin 2y + \sin y) = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3 \sin^3 x - 3 \cos^2 x + 7 \sin x - \cos 2x + 1 = 0, \\ \cos^2 x + 3 \cos x \sin 2x - 8 \sin x = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2 \cos x = 3 \operatorname{tg} y, \\ 2 \cos y = 3 \operatorname{tg} z, \\ 2 \cos z = 3 \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0, \\ 9 \sin \frac{\pi}{x} + \cos(5xy + y) = y \left(y + \frac{2}{x} - 1 \right) + \sin y \cdot \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1 - 5x)}. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \sqrt{3 + \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x} + 2 \left(\cos \frac{x}{2} + \sqrt{2} \sin y \right)^2 = 2, \\ 4 \sin y \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} - \sin y \right) = 1 + \cos x - \sin x. \end{cases}$$

18. Решите систему:

$$а) \begin{cases} (a^2 - a) \sin \frac{x}{2} + 2 \cos y = a + 5, \\ 3 \sin \frac{x}{2} + \cos y = 4. \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + a \cos y) = a + 1, \\ \sqrt{2}(\cos x + a \sin y) = a + 1. \end{cases}$$

19. Найдите все a , при которых имеет решения система:

$$а) \begin{cases} \sin x \cos 2y = (a^2 - 1)^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a + 1. \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sin x \cos y = a^3 - a^2 - 6a + \frac{35}{4}, \\ \cos x \sin y = a^2 - 6a + \frac{33}{4}. \end{cases} \quad в) \begin{cases} \arctg^2 x + \arccos^2 y = \pi^2 a, \\ \arctg x + \arccos y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

20. Найдите все a , при которых:

а) найдется такое β , что система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a \sin \beta, \\ \cos x \cos y = a \cos \beta, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение;

б) для любого β эта система имеет решения.

21. Найдите все a , при которых система:

$$а) \begin{cases} \cos x = \sin(x\sqrt{4-7a^2}), \\ \sin x = \left(3a - \frac{1}{2}\right) \cos(x\sqrt{4-7a^2}), \end{cases}$$

имеет единственное решение на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$;

$$б) \begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

22. Даны три утверждения:

а) уравнение $x + 1/x = a$ не имеет решений;

б) $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$;

в) система

$$\begin{cases} x + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = -3, \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите все значения a , при которых ровно два из этих утверждений истинны, а третье ложно.

23. Найдите все α из отрезка $[0; 2\pi]$, при которых имеет решения система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x + y + z) - \sin \alpha = 0, \\ (x + 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 \sqrt{x} + \alpha^2 \sqrt{z} + \sin \frac{3\alpha}{2} = 0. \end{cases}$$

Советы и решения

Р 1. Возводя каждое уравнение в квадрат и складывая, получим

$$\sin^4 y + \cos^8 y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = 0. \end{cases}$$

Соответствующие значения x должны удовлетворять условиям $\sin x, \cos x \geq 0$.

Р 2. После возведения уравнений в квадрат и сложения получим $\sin^2 2x = 1$, откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

Разбивая эту серию на 4 (по четвертям), находим для каждой соответствующий y .

Р 3. Обозначив $1/\sin^2 x = a$, $\cos y = b$, получим систему

$$\begin{cases} (a-1)^2 + 32(1-b^2) = 55, \\ a-4b = 5, \end{cases} \Rightarrow a = 6, \quad b = \frac{1}{4}.$$

Р 4. Имеем равносильную систему

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x, \end{cases}$$

при условии $\cos x \geq 0$, из которой $\sin x = 1/2$, $\cos y = -1/4$.

Р 5. Возводя второе уравнение в квадрат и заменяя $\sin x = u$, $\cos^2 y = v$, приходим к системе

$$\begin{cases} 34u^2 + 21uv - 21u - 10 = 0, \\ 1 - u^2 = 3uv, \end{cases}$$

из которой, исключив uv , находим $u = 4/5$, $v = 3/20$.

Р 6. Из первого уравнения получаем $2 \sin 2x \cos y = \sqrt{2} \cos y$, что ввиду $\cos y \neq 0$ (ОДЗ) означает $\sin 2x = \sqrt{2}/2$. Если $2x = \pi/4 + 2\pi n$, то второе уравнение принимает вид $\cos^3 y + 2 \cos^2 y - 1 = 0$, откуда

$$\begin{cases} \cos y = -1, \\ \cos y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \end{cases}$$

Если же $2x = 3\pi/4 + 2\pi n$, то $\operatorname{tg}(x + \pi/8)$ не определен.

Р 7. Ввиду неравенства $a + 1/a \geq 2$ при $a > 0$, из первого уравнения следует, что $\sin y = \pm 1$. При этом $\operatorname{tg} x = \pm 1$. Тогда $\cos z = 0$.

Р 8. а) Первое уравнение удовлетворяется в двух случаях:

$$1) \sin \frac{x+y}{2} = 0; \quad 2) \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{x+y}{2}.$$

В первом случае находим $x + y = 2\pi n$, причем подходит только $n = 0$ (иначе или $|x| > 1$, или $|y| > 1$, что противоречит второму уравнению), т. е. $x + y = 0$. Аналогично во втором случае получаем

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

б) Если $x \geq 0$, то из второго уравнения $y^2 = \pi/3 - x$ и, решая первое уравнение, находим $x = 2\pi n + \pi/6$, что с учетом условия $|x| \leq \pi/3$ (как следует из второго уравнения) дает нам $x = \pi/6$. Тогда $y = \pm \sqrt{\pi/6}$. Если же $x < 0$, то решением первого уравнения служит серия $x = (-1)^k \arcsin 1/\sqrt{3} - \pi/6 + \pi k$, однако ни при каком k не получается значение, удовлетворяющее условию $-\pi/3 \leq x < 0$.

Р 9. Решая каждое уравнение, получаем

$$x = -4\pi + 16\pi n = 5\pi + 15\pi k = -4\pi + 8\pi m.$$

Таким образом, надо решить систему двух уравнений в целых числах: $15k + 5 = 8m - 4$, $2n = m$. Первое имеет вид $15k = 8m - 9$ и частное решение $k_0 = 1$, $m_0 = 3$, откуда $k = 1 + 8t$, $m = 3 + 15t$. Тогда второе уравнение переписывается так: $2n = 3 + 15t$; частное решение $n_0 = -6$, $t_0 = -1$, т. е. $n = -6 + 15p$, $t = -1 + 2p$. Окончательно

$$x = -4\pi + 16\pi n = -4\pi + 16\pi(15p - 6) = -100\pi + 240\pi p.$$

Р 10. Перемножим уравнения; мы получим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} = 4 \sin^2 y.$$

Уравнение $\operatorname{tg}(y/2) = 2 \sin y$ дает $y_1 = 2\pi n$, $y_2 = 2\pi/3 + 2\pi k$, $y_3 = -2\pi/3 + 2\pi m$. Уравнение $\operatorname{tg}(y/2) = -2 \sin y$ решений не имеет. Если $y_1 = 2\pi n$, то $x_1 = \pi t$. Если $y_2 = 2\pi/3 + 4\pi k$, то подстановка в оба уравнения системы приведет нас к системе

$$\begin{cases} 3\sqrt{3} + 6 \sin x = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right), \\ \sqrt{3} - 2 \sin x = 6 \sin \left(\frac{2\pi}{3} + x \right), \end{cases}$$

из которой $\sin x = -4\sqrt{3}/7$, $\cos x = 1/7$. Подстановка y_3 приводит к системе

$$\begin{cases} -3\sqrt{3} + 6 \sin x + 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) = 0, \\ -\sqrt{3} - 2 \sin x = 6 \sin \left(\frac{-2\pi}{3} + x \right), \end{cases}$$

из которой $\sin x = 4\sqrt{3}/7$, $\cos x = 1/7$.

Р 11. Сложив уравнения системы, после перехода к однократным углам получим

$$\sin^2 y - \sin^2 x + 2 \cos y (\sin y - \sin x) = 0.$$

Отсюда либо $\sin y = \sin x$, либо $\sin y - \sin x + 2 \cos y = 0$. Подставив $\sin y = \sin x$ в первое уравнение, придем к уравнению $3 \cos 2y - \sin 2y = 1$ и при помощи тангенса половинного угла получим

$$y_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad y_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi m.$$

Если же $\sin y - \sin x + 2 \cos y = 0$, то после подстановки $\sin x = \sin y + 2 \cos y$ в первое уравнение получим $3 \cos 2y + 5 \sin 2y = -7$, что решений не имеет, поскольку $\sqrt{9+25} < 7$.

Р 12. Из первого уравнения находим: 1) $x - 2y = 2\pi n$; 2) $x + 2y = \pi + 2\pi k$. Второе уравнение преобразуется к виду

$$\cos(x - 2y) - \cos(7x + 18y) + 5 \cos(7x + 2y) = 4.$$

Тогда условие $x - 2y = 2\pi n$ приведет к уравнению $5 \cos 8x - \cos 16x - 3 = 0$, из которого $\cos 8x = 1/2$. Аналогично условие $x + 2y = \pi + 2\pi k$ даст $\cos 6x = -4/5$.

Р 13. Прежде всего, заметим, что $2 - \sin 2y + \sin y \neq 0$ ни при каком y . Действительно,

$$\sin 2y - \sin y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = 1, \\ \sin y = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \sin y = -1, \end{cases}$$

что невыполнимо. Значит, имеются две возможности:

$$1) \begin{cases} \cos y + \sin x - 1 = 0, \\ \sin x = \cos y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \cos y = \sin x, \\ \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{6} \right) = 0, \end{cases}$$

причем, решения первой системы должны также удовлетворять условиям

$$x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad y + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Р 14. Заменяя $\sin x = t$, приходим к системе

$$\begin{cases} 3t^3 + 5t^2 + 7t - 3 = 0, \\ 6t^3 + t^2 + 2t - 1 = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая второе, получим квадратное уравнение

$$9t^2 + 12t - 5 = 0,$$

откуда $t = 1/3$ (второй корень не подходит).

Р 15. Возведем уравнения в квадрат и заменим $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 y = b$, $\operatorname{tg}^2 z = c$. Тожество $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ позволяет переписать систему в виде

$$\begin{cases} b(a+1) = \frac{4}{9}, \\ c(b+1) = \frac{4}{9}, \\ a(c+1) = \frac{4}{9}. \end{cases}$$

Теперь, выразив из первого и третьего уравнения a и c через b и подставив

$$a = \frac{4}{9b} - 1, \quad c = \frac{4}{9(b+1)}$$

во второе, получим уравнение, содержащее только b , из которого найдем $b = 1/3$ (второй корень отрицателен). Тогда и $a = c = 1/3$. Для исходных неизвестных получаем $x = \pm\pi/6 + \pi n$, $y = \pm\pi/6 + \pi k$, $z = \pm\pi/6 + \pi m$. Однако это еще далеко не всё, поскольку сочетание серий друг с другом — целая эпопея. Что поделаешь: не надо было возводить в квадрат! Разобьем каждую серию на 4 меньших:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_4 = \frac{-5\pi}{6} + 2\pi n;$$

и аналогично для двух других неизвестных. Тройка (x_1, y_1, z_1) подходит — видно сразу. Посмотрим, с чем еще можно объединить x_1 . Для соответствующих y и z должно быть $\operatorname{tg} y > 0$, $\cos z > 0$. Это условие невыполнимо. Переходим к x_2 . В этом случае $\cos x < 0$, $\operatorname{tg} x < 0$, тогда $\operatorname{tg} y > 0$, $\cos z < 0$. Подходят две тройки: (x_2, y_1, z_4) и (x_2, y_4, z_3) . Таким же образом находим еще две тройки: (x_3, y_2, z_4) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_2, z_1) , (x_4, y_3, z_2) .

Р 16. Первое уравнение имеет корни $x_1 = -2/5$, $x_{2,3} = -1 \pm 1/\sqrt{3}$. Условие существования радикала из второго уравнения:

$$\frac{4}{x} + 16 + 5x - 25x^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{(x-1)(5x+2)^2}{x} \leq 0,$$

откуда $x = -2/5$ или $x \in (0; 1]$. Значения $x_{2,3} = -1 \pm 1/\sqrt{3}$ этим условиям не удовлетворяют. Подставим $x = -2/5$ во второе уравнение; мы получим

$$\cos y = (y-3)^2 \quad (*)$$

— уравнение, не имеющее решений. Доказать это можно либо при помощи графиков, либо (если комиссия строга), уточнив, что при $y \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$ правая часть $(*)$ больше 1, а при $y \in [2; 4]$ отрицательна левая часть, поскольку $[2; 4] \subset [\pi/2; 3\pi/2]$.

Р 17. Поскольку

$$\operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 1$$

(причем равенство имеет место лишь при $\cos^2 x = 1$), первое уравнение выполнено, только если

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \cos \frac{x}{2} + \sqrt{2} \sin y = 0. \end{cases}$$

Тогда либо $x = 2\pi n$, либо $x = \pi + 2\pi n$. Вторая серия позволяет сразу получить $y = \pi k$. Первую серию разобьем на две: а) $x = 4\pi m$, б) $2\pi + 4\pi m$. В случае а) получаем $\sin y = -1/\sqrt{2}$, в случае б) $\sin y = 1/\sqrt{2}$. При подстановке во второе уравнение в обоих случаях получается верное равенство (заранее это, конечно, утверждать нельзя).

Р 18. а) Второе уравнение выполнено только при $\sin(x/2) = \cos y = 1$, откуда

$$x = \pi + 4\pi n, \quad y = 2\pi k.$$

Тогда $a^2 - a + 2 = a + 5$ и $a_1 = -1$, $a_2 = 3$. При других a решений нет.

б) Избавившись от y , получим $\sqrt{2}(a+1)(\sin x + \cos x) = 2(a+1)$. Если $a = -1$, то имеем систему

$$\begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \cos x = \sin y, \end{cases}$$

решение которой $x = x_0$, $y = \pi/2 - x_0 + 2\pi k$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. При $a \neq -1$ получаем $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, откуда $\sin x = \cos x = \sqrt{2}/2$, $x = \pi/4 + 2\pi n$, что приводит к системе

$$\begin{cases} a \cos y = \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ a \sin y = \frac{a}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

которая в случае $a = 0$ выполнена при любом y , а в случае $a \neq 0$ дает $y = \pi/4 + 2\pi k$.

Р 19. а) Из первого уравнения ясно, что $a = \pm 1$. Если $a = 1$, то второе уравнение не выполняется. Если $a = -1$, то

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1, \\ \cos x \sin 2y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+2y) = 1, \\ \sin(x-2y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x-2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi(n+k), \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(n+k)}{2}.$$

б) Неравенство $-1 \leq a^2 - 6a + 33/4 \leq 1$ дает

$$\frac{6 - \sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{6 + \sqrt{5}}{2};$$

сложив уравнения, получим

$$\sin(x+y) = a^3 - 12a + 17,$$

откуда $-1 \leq a^3 - 12a + 17 \leq 1$, что дает $a = 2$ или $a \leq -4$. Таким образом, $a = 2$. Для проверки надо подставить это значение в систему и решить ее. Имеем

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Система разрешима.

в) Пусть $\arcsin y = p$, $\arccos y = t$; тогда для t получаем уравнение

$$8t^2 - 4\pi t + \pi^2(1 - 4a) = 0.$$

Условие $D \geq 0$ дает $a \geq 1/8$. Кроме того, так как $t \leq \pi$, $p < \pi/2$, то $t^2 + p^2 < \pi^2 + \pi^2/4$, откуда

$$\pi^2 a < \frac{5\pi^2}{4} \quad \text{и} \quad a < \frac{5}{4}.$$

Если $1/8 \leq a < 1/4$, то оба корня уравнения (*) положительны и хотя бы один принадлежит отрезку $[0; \pi]$, если $f(0)f(\pi) \geq 0$, $f(x_*) \in [0; \pi]$, откуда $1/8 \leq a < 1/4$. (Значение $t = \pi$ на самом деле не годится, поскольку тогда $p = -\pi/2$, что невозможно). При $1/4 \leq a < 5/4$ корни имеют разные знаки и неотрицательный принадлежит промежутку $[0; \pi]$ при $f(0) \leq 0$, $f(\pi) > 0$. Оба эти неравенства выполнены.

Р 20. Сложение-вычитание дает

$$\begin{cases} \cos(x - y) = a\sqrt{2} \cdot \cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right), \\ \cos(x + y) = a\sqrt{2} \cdot \cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right), \end{cases}$$

откуда (при $a \neq 0$)

$$\left| \cos\left(\beta \pm \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{|a|\sqrt{2}}. \quad (*)$$

Если $1/|a|\sqrt{2} \geq 1$, т. е. $|a| \leq 1/\sqrt{2}$, то неравенства (*) выполнены при любом β и исходная система имеет решения. То же и при $a = 0$. Ответ на п. б) получен. Пусть теперь $|a| > 1/\sqrt{2}$; выясним, при каких a имеют решения неравенства (*). Рассуждая как при решении примера 25, получаем

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \arccos b + \pi n \leq \beta \leq \frac{3\pi}{4} - \arccos b + \pi n, \\ \frac{\pi}{4} + \arccos b + \pi k \leq \beta \leq \frac{5\pi}{4} - \arccos b + \pi k, \end{cases}$$

где $b = 1/|a|\sqrt{2}$. Система имеет решение, пока

$$\frac{3\pi}{4} - \arccos b \geq \frac{\pi}{4} + \arccos b,$$

т. е. при $\arccos b \leq \pi/4$, что дает неравенство $b \geq \sqrt{2}/2$ или $|a| \leq 1$.

Р 21. а) Пусть $x\sqrt{4 - 7a^2} = t$; возводя уравнения в квадрат и складывая, получим

$$\left(3a - \frac{1}{2}\right)^2 \cos^2 t = \cos^2 t.$$

Если $\cos t = 0$, т.е. $x\sqrt{4-7a^2} = \pi/2 + \pi n$, то система принимает вид

$$\begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), \\ \sin x = \left(3a - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), \end{cases}$$

и распадается на две:

а) если $n = 2k$, то имеем

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

б) если $n = 2k + 1$, то

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

В первом случае получаем единственное значение, принадлежащее отрезку $[\pi/2; 5\pi/2]$, а именно $x = 2\pi$. Тогда

$$2\pi\sqrt{4-7a^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Поскольку $0 \leq \sqrt{4-7a^2} \leq 2$, это равенство возможно только при $k = 0$ и при $k = 1$. При $k = 0$ имеем для нахождения a уравнение

$$4\sqrt{4-7a^2} = 1,$$

откуда $a = \pm 3/4$. При $k = 1$ находим $a = \pm\sqrt{39}/4\sqrt{7}$. В случае б) решением будет $x = \pi$; тогда

$$\pi\sqrt{4-7a^2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}.$$

Пусть теперь $\cos t \neq 0$, тогда $(3a - 1/2)^2 = 1$, откуда $a = 1/2$, $a = -1/6$. При $a = 1/2$ система принимает вид

$$\begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{3x}{2}\right), \\ \sin x = \cos\left(\frac{3x}{2}\right). \end{cases}$$

Ее решением является серия $x = \pi/5 + 2\pi m/5$ и на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$ лежит более одного корня. Таким образом, $a = 1/2$ не является решением. При $a = -1/6$ получаем систему

$$\begin{cases} \cos x = \sin t, \\ \sin x = -\cos t, \end{cases}$$

где $t = x\sqrt{137}/6$. Она имеет единственное решение на указанном отрезке, а именно

$$x = \frac{3\pi}{\sqrt{137}-6}.$$

б) Из четности по x следует, что $x = 0$; тогда $y = \pm 1$, откуда $a = 0$ или $a = 2$. Если $a = 0$, то имеем

$$\begin{cases} |\sin x| = y + 1, \\ \operatorname{tg}^2 x = 1 - y^2, \end{cases}$$

откуда $y \in [-1; 0]$. Далее:

$$|\cos x| = \sqrt{1 - (1 + y)^2} = \sqrt{-y^2 - 2y} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{(1 + y)^2}{-y^2 - 2y} = 1 - y^2,$$

что верно при $y = -1$; но тогда

$$\begin{cases} |\sin x| = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 0, \end{cases}$$

и $x = \pi n$, т.е. система имеет бесконечно много решений. Значит, $a = 0$ не годится.

Если $a = 2$, то

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1, \end{cases}$$

и из второго уравнения следует, что $|y| \leq 1$, тогда $2x^2 + 1 = y - |1 - \sin x|$ только если $x = 0$, $y = 1$, т.е. система имеет единственное решение.

Р 22. Первое утверждение истинно при $a \in (-2; 2)$. Второе истинно при $a \leq 2$. Пусть хотя бы одно из этих утверждений ложно. Тогда истинно третье утверждение. Поскольку система имеет единственное решение, $y = 0$ (четность). Но тогда $a = -3$. Решим систему

$$\begin{cases} x + y^2 = -3, \\ x - \sin^2 y = -3. \end{cases}$$

Вычитая, имеем $y^2 + \sin^2 y = 0$, откуда $y = 0$, $x = -3$ — единственное решение системы. Итак, при $a = -3$ первое утверждение ложно, а второе и третье истинны. Пусть теперь истинны а) и б); тогда $a \in (-2; 2)$. И в) действительно ложно, как мы только что выяснили.

Р 23. Заметим сразу, что $x \geq 0$, $z \geq 0$, а также то, что при $\sin(3\alpha/2) > 0$ второе уравнение (а значит и вся система) решений не имеет, поскольку все слагаемые неотрицательны, а последнее положительно. Таким образом, $\alpha \in (0; 2\pi/3)$ можно исключить из рассмотрения. Если $\alpha = 0$, то из второго уравнения $y = 0$ или $x = 0$ и оба варианта приводят к одному итогу: тройке $(0; 0; 0)$, являющейся решением системы. Итак, рассматриваем случай $\alpha \in [2\pi/3; 2\pi]$. Если $\alpha = 2\pi$, то из второго уравнения

$$\begin{cases} z = 0, \\ x = 0 \text{ или } y = 0, \end{cases}$$

и снова убеждаемся, что системе удовлетворяет нулевое решение. Идем дальше: $\alpha \in [2\pi/3; 2\pi]$. Теперь за дело придется браться всерьез. Приведем первое уравнение к виду

$$2x^2 + 2x(x + y) + x^2 + y^2 - \sin \alpha = 0$$

и рассмотрим как квадратное относительно x . Неотрицательность дискриминанта дает неравенство $2 \sin \alpha \geq (x - y)^2 \geq 0$, которое еще сужает рассматриваемую область: $\alpha \in [2\pi/3; \pi]$. Снова отделяем простой случай: если $\alpha = \pi$, то

$$x = y, \quad z = -\frac{(x + y)}{2} = -x$$

и отсюда снова $(0; 0; 0)$ — решение системы. Пусть, наконец, $\alpha \in [2\pi/3; \pi)$. Перепишем второе уравнение так:

$$x \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + y^2 \sqrt{x} + \alpha^2 \sqrt{z} + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin \left(\frac{3\alpha}{2} \right) = 0.$$

Сумма первых трех слагаемых положительна (ибо на данном промежутке $\sin \alpha/2 > 0$); докажем, что сумма двух последних также положительна (и, значит, уравнение решений не имеет). Действительно:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) &= \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 3\right) > 0 \end{aligned}$$

Ответы

1. $(\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + \pi k)$, $(2\pi m; \pi t)$; 2. $(\pi/4 + 2\pi n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k)$, $(3\pi/4 + 2\pi n; -\pi/4 + 2\pi k)$, $(5\pi/4 + 2\pi n; \pi/4 + 2\pi k)$, $(-\pi/4 + 2\pi n; 3\pi/4 + 2\pi k)$;
3. $(\pm \arcsin(1/\sqrt{6}) + \pi n; \pm \arccos(1/4) + 2\pi k)$, $(\pm \arcsin(1/\sqrt{6}) + \pi n; \mp \arccos(1/4) + 2\pi k)$; 4. $x = (\pi/6) + 2\pi k$, $y = \pm(\pi - \arccos(1/4)) + 2\pi n$; 5. $x = \arcsin(4/5) + 2\pi n$, $y = \pm \arccos \sqrt{3/20} + 2\pi k$; $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2\pi n$, $y = \pm(\pi - \arccos \sqrt{3/20}) + 2\pi k$; 6. $(\pi/8 + \pi n; 2\pi k)$, $(\pi/8 + \pi n; \pm \arccos((\sqrt{5}-1)/2) + 2\pi k)$; 7. $(\pi/4 + \pi n/2; \pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi m)$;
8. а) $(\pm 1/2; \mp 1/2)$, $(0; \pm 1)$, $(\pm 1; 0)$; б) $(\pi/6; \pm \sqrt{\pi/6})$; 9. $x = 140\pi + 240\pi n$;
10. $(\pi n; 2\pi k)$, $(\mp \arccos 1/7 + 2\pi n; \pm 2\pi/3 + 2\pi k)$;
11. $(-\pi/4 + \pi k + 2\pi n; -\pi/4 + \pi k)$, $(-5\pi/4 + 2\pi n - \pi k; -\pi/4 + \pi k)$, $(\arctg 1/2 + \pi m + 2\pi n; \arctg 1/2 + \pi m)$, $(\pi - \arctg 1/2 - \pi m + 2\pi n; \arctg 1/2 + \pi m)$;
12. $x = \pm \pi/24 + \pi k/4$, $y = \pm \pi/48 + \pi k/8 - \pi n$; $x = \pm 1/6(\pi - \arccos(4/5)) + \pi m/3$, $y = \mp 1/12(\pi - \arccos(4/5)) - \pi m/6 + \pi/2 + \pi k$; 13. $x = \pi/6 + 2\pi l$, $y = -\pi/3 + 2\pi s$; $x = \pi/3 + 2\pi t$, $y = -\pi/6 + 2\pi p$; $x = 4\pi/3 + 2\pi q$, $y = 5\pi/6 + 2\pi m$;
14. $(-1)^n \arcsin(1/3) + \pi n$; 15. $(\pi/6 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi k; \pi/6 + 2\pi m)$, $(-\pi/6 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi k; -5\pi/6 + 2\pi m)$, $(-\pi/6 + 2\pi n; -5\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi m)$, $(5\pi/6 + 2\pi n; -\pi/6 + 2\pi k; -5\pi/6 + 2\pi m)$, $(5\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi m)$, $(-5\pi/6 + 2\pi n; -\pi/6 + 2\pi k; \pi/6 + 2\pi m)$, $(-5\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/6 + 2\pi k; -\pi/6 + 2\pi m)$;
16. $\emptyset$; 17. $(\pi + 2\pi n; \pi k)$, $(2\pi + 4\pi n; (-1)^k \pi/4 + \pi k)$, $(4\pi n; (-1)^{k+1} \pi/4 + \pi k)$;
18. а) Если $a = -1$ или $a = 3$, то $x = \pi + 4\pi n$, $y = 2\pi k$; при других a решений нет. б) Если $a = -1$, то $x = x_0$, $y = \pi/2 - x_0 + 2\pi k$, где $x_0 \in \mathbb{R}$; если $a = 0$, то $x = \pi/4 + 2\pi n$, $y \in \mathbb{R}$; в остальных случаях $x = \pi/4 + 2\pi n$, $y = \pi/4 + 2\pi k$;
19. а) $a = -1$; б) $a = 2$; в) $1/8 \leq a < 5/4$; 20. а) $|a| \leq 1$; б) $|a| \leq 1/\sqrt{2}$;
21. а) $-1/2$; $-1/6$; $\pm 3/4$; $\pm \sqrt{39/4}\sqrt{7}$; б) $a = 2$; 22. $a = -3$, $a \in (-2; 2)$;
23. 0 ; π ; 2π .

Глава 4

Логарифмы и несть им конца

Здесь будет представлена вся палитра этого исконного жанра: задачи, связанные с показательной и логарифмической функциями. Но вначале — небольшое защитительное слово.

Логарифмы наводят скуку на людей мыслящих. Век логарифмических линеек ушел и не вернется. Зачем еще могут быть нужны эти логарифмы?

Вот небольшой отрывок из романа А. Франса «Ивовый манекен».

Проходя по площади св. Экзюпера, г-н Компаньон указал на дом Денизо: — Что-то не слышно больше о провидице, общавшейся со святой Радегундой и всем райским сонмом. Вы ходили к ней, Бержере? Меня водил туда в самый расцвет ее славы Лакарель, правитель канцелярии префекта. Она сидела в кресле, закрыв глаза, а человек десять почитателей задавали вопросы. Спрашивали, в добром ли здоровье папа, каковы будут последствия франко-русского соглашения, пройдет ли подходящий налог и скоро ли будет найдено средство против чахотки. На все вопросы она отвечала в поэтическом стиле и без особого затруднения. Когда черед дошел до меня, я задал ей самый простой вопрос: «Каков логарифм девяти?» Ну, как вы думаете, Бержере, она ответила: 0,954? — Нет, я этого не думаю, — сказал г-н Бержере. — Она ничего не ответила, ровно ничего. Как воды в рот набрала. Я сказал: «Как же это, святая Радегунда не знает логарифма девяти? Да виданное ли это дело?» Там были полковники в отставке, духовные особы, пожилые дамы и русские врачи. Они, по-видимому, были смущены, а Лакарель повесил нос на квинту. Я удрал, провожаемый общим неодобрением.

Ну а теперь — за дело, нам-то ведь никто не простит незнания логарифмов.

§ 16. Преобразования и вычисления

1. Вычислить $\frac{3 \log_7 2 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 9}$.

◀ Поскольку $3 \log_7 2 = \log_7 2^3 = \log_7 8$, имеем

$$\frac{3 \log_7 2 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 9} = \frac{\log_7 8 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 9} = \frac{\log_7(1/3)}{\log_7 27} = \frac{-\log_7 3}{3 \log_7 3} = -\frac{1}{3}.$$

✎ **Ответ:** $-1/3$.

2. Вычислить $81^{1/4 \log_{32} 243}$.

◀ Так как $32 = 2^5$, $243 = 3^5$, то

$$\log_{32} 243 = \log_2 3.$$

Поэтому

$$81^{1/4 \log_{32} 243} = 3^{1/\log_2 3} = 3^{\log_2 2} = 2. \quad \blacktriangleright$$

🔑 **Ответ:** 2.

3. Вычислить $A = \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$.

◀ Два основных принципа, которых следует придерживаться в задачах арифметического характера, связанных с логарифмами, таковы: переход во всех логарифмах к одному основанию и разложение на простые множители.

Приняв к сведению этот совет, получим, последовательно следуя обоим рекомендациям:

$$\begin{aligned} A &= \log_3 24 \log_3 72 - \log_3 216 \log_3 8 = \\ &= \log_3(2^3 \cdot 3) \log_3(2^3 \cdot 3^2) - \log_3(2^3 \cdot 3^3) \log_3 2^3 = \\ &= (3 \log_3 2 + 1)(3 \log_3 2 + 2) - (3 \log_3 2 + 3)3 \log_3 2 = \\ &= 9 \log_3^2 2 + 9 \log_3 2 + 2 - 9 \log_3^2 2 - 9 \log_3 2 = 2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

🔑 **Ответ:** 2.

4. Вычислить

$$(\log_2 3 + \log_3 16 + 4)(\log_2 3 - 2 \log_{12} 3) \log_3 2 - \log_2 3.$$

◀ Если обозначить $\log_2 3 = a$ и перейти во всех логарифмах к основанию 2, то данное выражение можно представить в виде

$$\left(a + \frac{4}{a} + 4\right) \left(a - \frac{2a}{2+a}\right) \frac{1}{a} - a$$

и упростить до конца:

$$\frac{(a+2)^2}{a} \cdot \frac{a^2}{a+2} \cdot \frac{1}{a} - a = a + 2 - a = 2. \quad \blacktriangleright$$

🔑 **Ответ:** 2.

5. Вычислить $3^A - 4^B$, если $A = \log_{\sqrt{3}} 2$, $B = \log_{\sqrt{3}} 2$.

◀ Так как

$$3^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 3^{2 \log_3 2} = 3^{\log_3 4} = 4,$$

то, возводя обе части равенства $3^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 4$ в степень $B = \log_{\sqrt{3}} 2$, получаем $3^A = 4^B$, т. е. вычисляемое выражение равно 0. ▶

☞ **Ответ:** 0.

6. Вычислить $5^A - 3^B$, где $A = \log_2 3$, $B = \log_2 5$.

◀ Воспользуемся основным логарифмическим тождеством и запишем уменьшаемое в виде $3^{A \log_3 5}$. Но $A \log_3 5 = \log_2 3 \log_3 5 = \log_2 5$, поэтому $5^A = 3^B$ и искомое выражение равно 0. ▶

☞ **Ответ:** 0.

Большинство примеров такого рода основано на следующих свойствах логарифмов:

- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$,
- $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

Доказательство первого из них фактически повторяет решение предыдущего примера, доказательство второго модифицирует его mutatis mutandis:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\log_a a \cdot \sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_a^2 a \cdot \log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

7. Известно, что $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. Выразить $\log_{60} 30$ через a и b .

◀ Применим основной принцип 2, т. е. разложим все числа-фигуранты на простые множители: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Затем, следуя первому принципу, перейдем к логарифмам с основанием 3; тогда

$$\begin{aligned} \log_{60} 30 &= \frac{\log_3(2 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_3(2^2 \cdot 3 \cdot 5)} = \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 5}{2 \log_3 2 + 1 + \log_3 5} = \\ &= \frac{1/a + 1 + b}{2/a + 1 + b} = \frac{1 + a + ab}{2 + a + ab}. \end{aligned}$$

☞ **Ответ:** $(1 + a + ab)/(2 + a + ab)$.

8. Найти $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$.

◀ Разложив на простые множители все составные числа:

$$25 = 5^2, \quad 24 = 2^3 \cdot 3, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 12 = 2^2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2,$$

видим, что «элементарными кирпичиками» трех данных логарифмов являются 2, 3 и 5, поэтому вводим вспомогательные логарифмы $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$, через которые и выразим три исходных. Действуем:

$$\log_{25} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 25} = \frac{3+x}{2y}, \quad \log_6 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 6} = \frac{x+y}{1+x},$$

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1+2x}{2+x}.$$

По условию,

$$\frac{x+y}{1+x} = a, \quad \frac{1+2x}{2+x} = b.$$

Из второго равенства сразу находим

$$x = \frac{2b-1}{2-b};$$

тогда из первого

$$y = ax + a - x = \frac{ab + a - 2b + 1}{2-b}.$$

Теперь

$$\log_{25} 24 = \frac{x+3}{2y} = \frac{5-b}{2(ab+a-2b+1)}.$$

Для завершения решения необходимо проверить, что $ab + a - 2b + 1 \neq 0$, но $ab + a - 2b + 1 = (a-b+1) + b(a-1) > 0$, так как $a > 1$, $0 < b < 2$. ▶

🔍 **Ответ:** $(5-b)/(2(ab+a-2b+1))$.

9. Найти a^a , если $b^a = 8$, $a^c = 10$, $b^c = 2$.

◀ Пусть $a^a = x$; тогда, логарифмируя по основанию 10 данное равенство и три исходных, получим, во-первых, $a \lg a = \lg x$, а во-вторых, в-третьих и в-четвертых,

$$a \lg b = \lg 8, \quad c \lg a = 1, \quad c \lg b = \lg 2.$$

Из трех последних равенств надо исключить с и $\lg b$. Делением второго равенства на третье получаем

$$\frac{\lg a}{\lg b} = \frac{1}{\lg 2};$$

перемножив обе части этого равенства на соответствующие части первого, найдем

$$\alpha \lg \alpha = \frac{\lg 8}{\lg 2} = 3.$$

Тогда $\lg x = 3 \Rightarrow x = 1000$. ►

☛ **Ответ:** 1000.

10. (Задача-шутка). Вычислить $\lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 9^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 87^\circ$.

◀ «Шутка», собственно, состоит в том, что надо догадаться о наличии среди множителей $\lg \operatorname{tg} 45^\circ = \lg 1 = 0$, обнуляющего и всё произведение (тогда как в «обычных» задачах на прогрессии важно знать первый и последний члены, что здесь безразлично). ►

☛ **Ответ:** 0.

11. Упростить выражение

$$A = \left(\frac{x^2 - 4x}{\sqrt{5+x} - 3} + \frac{\sqrt{20x^2 + 4x^3} - \sqrt{x^4 + 5x^2}}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \left(\frac{10}{3} \right)^{\log_{0,09} x^2}.$$

◀ Задачи на упрощение — конек МЭИ. А маленький логарифм в конце не позволяет рассматривать этот пример раньше, в теме «упрощение алгебраических выражений», хотя идеологически он, конечно, относится к ней. Этот «логарифм в конце» — своего рода экзотическая добавка к блюду, которое негурманы могут употреблять и так.

Тряхнем стариной и, вспоминая «уничтожение иррациональности в знаменателе дроби», сразу напишем:

$$\frac{x^2 - 4x}{\sqrt{5+x} - 3} = \frac{(x^2 - 4x)(\sqrt{5+x} + 3)}{(5+x) - 9} = \frac{x(x-4)(\sqrt{5+x} + 3)}{x-4} = x\sqrt{5+x} + 3x.$$

Теперь, замечая, что $x > 0$, имеем для числителя второй дроби:

$$\sqrt{20x^2 + 4x^3} - \sqrt{x^4 + 5x^2} = 2x\sqrt{5+x} - x\sqrt{x}\sqrt{x+5} = x\sqrt{5+x}(2 - \sqrt{x}).$$

Тогда вся вторая дробь равна $-x\sqrt{5+x}$.

Наконец, поскольку основание логарифма

$$0,09 = \left(\frac{10}{3} \right)^{-2}, \quad \log_{0,09} x^2 = \log_{10/3} x^{-1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{10}{3} \right)^{\log_{0,09} x^2} = x^{-1}.$$

Таким, образом,

$$A = (x\sqrt{5+x} + 3x - x\sqrt{5+x})x^{-1} = 3. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** 3.

Кажется, на сегодняшний день вузовско-математическая мысль не произвела ничего нового на эту тему, а потому мы можем перейти к следующему пункту плана — задачам на сравнение чисел, содержащих логарифмы (и степени).

Сравнивая два логарифма, прежде всего ищут разделяющее (их) число.

12. Сравнить числа: а) $\log_3(1/2)$ и $\log_7 2$; б) $\log_2 3$ и $\log_5 3$.

◀ а) Это — простейший случай: разделяющее число — 0. Действительно, число $\log_a b$ положительно, если числа a и b лежат по одну сторону от 1, и отрицательно, если по разные. (Простейшее доказательство этого факта: $\log_a b = \lg b / \lg a$, и в первом случае $\lg a$ и $\lg b$ одного знака, а во втором — разного.) Значит,

$$\log_3 \frac{1}{2} < 0, \quad \log_7 2 > 0 \quad \text{и} \quad \log_7 2 > \log_3 \frac{1}{2}.$$

б) Здесь разделяющее число, очевидно, 1, поскольку

$$\log_2 3 > \log_2 2 = 1, \quad \log_5 3 < \log_5 5 = 1;$$

значит, $\log_2 3 > \log_5 3$.

Можно обойтись и без разделяющего числа, поскольку равны логарифмируемые числа. Действительно, в силу неравенства $\log_3 2 < \log_3 5$ получаем

$$\frac{1}{\log_3 2} > \frac{1}{\log_3 5},$$

т. е. $\log_2 3 > \log_5 3$. ▶

☛ **Ответ:** а) первое число меньше; б) первое число больше.

13. Сравнить $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

◀ Сравниваемые числа заключены между 1 и 2, поэтому если их разделяет число, скажем, $3/2$, то при умножении на 2 между ними оказывается целое число 3.

Проверим:

$$2 \log_2 3 = \log_2 3^2 = \log_2 9 > 3; \quad 2 \log_5 8 = \log_5 64 < 3.$$

Итак, $2 \log_2 3 > 2 \log_5 8$, значит, $\log_2 3 > \log_5 8$. ▶

☛ **Ответ:** первое число больше.

Если умножение на 2 сравниваемых чисел не дает желаемого результата, можно попробовать умножить их на 3, на 4 и т. д. Но это, конечно, не очень

хороший метод, хотя рано или поздно он приводит к желаемому результату. И за неимением другого это неплохо.

14. Сравнить $\log_2 5$ и $\log_3 12$.

◀ В этом примере целое число (23) оказывается между $n \log_2 5$ и $n \log_3 12$ только после умножения на 10. Тогда

$$10 \log_2 5 = \log_2 9765625 > 23,$$

так как $2^{23} = 8388608$; а

$$10 \log_3 12 = 10 + \log_3 1048576 < 23,$$

так как $3^{13} = 1594323$. Что ж, спасибо и за это. ►

☛ **Ответ:** первое число больше.

Конечно, никто не заставляет нас искать разделяющее число всегда и везде: если задача позволяет, можно пойти другим путем.

15. Сравнить $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

◀ Поскольку

$$\log_7 27 = 3 \log_7 3 = \frac{3}{\log_3 7},$$

в задаче фактически задействован только один логарифм, и вопрос сводится к сравнению $\log_3 7$ и $\sqrt{3}$, даже $\log_3 7 - 1$ и $\sqrt{3} - 1$. Но

$$\log_3 7 - 1 = \log_3 \frac{7}{3} > \frac{3}{4},$$

так как $\log_3 (7/3)^4 > 3$ ввиду неравенства $7^4 = 2401 > 27 \cdot 81 = 2187$. И поскольку $\sqrt{3} - 1 < 3/4$, первое число больше. ►

☛ **Ответ:** первое число больше.

16. Сравнить $\log_3 5$ и $\log_4 7$.

◀ И здесь оба числа близки к $3/2$, которое, однако, их не разделяет. Всё же удвоим сравниваемые числа, чтобы они стали близки к 3, т.е. сравним $\log_3 25$ и $\log_2 7$. Выясним, какое из них ближе к 3; для этого рассмотрим разности $3 - \log_3 25$ и $3 - \log_2 7$. Имеем:

$$3 - \log_3 25 = \log_3 \frac{27}{25}; \quad 3 - \log_2 7 = \log_2 \frac{8}{7}.$$

Но

$$\log_2 \frac{8}{7} > \log_3 \frac{8}{7} > \log_3 \frac{27}{25},$$

значит,

$$3 - \log_2 7 > 3 - \log_3 25,$$

т.е. $\log_3 25 > \log_2 7$ и первое число больше. ►

🔍 **Ответ:** первое число больше.

17. Сравнить $\log_8 9$ и $\log_9 10$.

◀ Сделаем больше — докажем, что при всех натуральных $n > 1$ выполнено неравенство

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

и для этого рассмотрим и исследуем функцию $f(x) = \log_x(x+1)$. Поскольку исследование функции — предмет математического анализа, а в анализе все логарифмы — натуральные, перейдем к основанию e , т.е. представим функцию в виде

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}.$$

Нас интересует ее поведение при $x > 1$. Посчитаем производную:

$$f'(x) = \frac{\ln x / (x+1) - (\ln(x+1))/x}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x}.$$

Поскольку знаменатель положителен, а

$$x \ln x < (x+1) \ln(x+1),$$

ибо

$$x < x+1, \quad \ln x < \ln(x+1),$$

производная отрицательна. Это означает, что функция $f(x)$ убывает при $x > 1$; в частности, $f(x) > f(x+1)$. Но это последнее неравенство имеет вид

$$\log_x(x+1) > \log_{x+1}(x+2),$$

что нам и требовалось.

Второе решение.

Конечно, можно доказать неравенство $\log_8 9 > \log_9 10$ и непосредственно. Поскольку сравниваемые числа больше 1, отнимем от каждого по 1, т. е. сравним

$$\log_8 9 - 1 = \log_8 9 - \log_8 8 = \log_8 \frac{9}{8} \quad \text{и} \quad \log_9 10 - 1 = \log_9 \frac{10}{9}.$$

Имеем:

$$\log_8 \frac{9}{8} > \log_9 \frac{9}{8} > \log_9 \frac{10}{9},$$

поскольку при $x > 1$ можно написать

$$\log_8 9 = \log_8 x \cdot \log_x 9 > 1 \quad \Rightarrow \quad \log_8 x > \frac{1}{\log_x 9} = \log_9 x. \quad \blacktriangleright$$

 **Ответ:** первое число больше.

18. Сравнить $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

◀ И здесь — лучше не блуждать наугад, а воспользоваться методом примера 8, т. е. ввести вспомогательные неизвестные-логарифмы.

Поскольку

$$189 = 3^3 \cdot 7, \quad 1323 = 3^3 \cdot 7^2, \quad 63 = 3^2 \cdot 7, \quad 149 = 3 \cdot 7^2,$$

перейдем к логарифмам по основанию 3 и положим $\log_3 7 = x$. Тогда

$$\log_{189} 1323 = \frac{3 + 2x}{3 + x}, \quad \log_{63} 147 = \frac{1 + 2x}{2 + x};$$

для сравнения логарифмов рассмотрим их разность, т. е.

$$\frac{3 + 2x}{3 + x} - \frac{1 + 2x}{2 + x} = \frac{3}{(2 + x)(3 + x)} > 0,$$

поскольку $x > 0$. Значит, $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$. $\blacktriangleright$

 **Ответ:** первое число больше.

19. Сравнить $(1/6)^{1/6}$ и $(1/5)^{1/5}$.

◀ Конечно, можно, не мудрствуя лукаво, возвести оба числа в 30-ю степень и посчитать, однако знание логарифмов позволяет оформить решение *изящнее* (как выражаются наши милые вундеркинды средней руки).

Соединив (или разделив) сравниваемые числа символом « $\vee$ », прологарифмируем обе части по основанию 10 (это действие сохраняет знак), т. е. перейдем к сравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \lg \frac{1}{6} \vee \frac{1}{5} \lg \frac{1}{5} &\Leftrightarrow -5 \lg 6 \vee -6 \lg 5 \Leftrightarrow 6 \lg 5 \vee 5 \lg 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lg 5 \vee 5 \lg \frac{6}{5} = \lg \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5. \end{aligned}$$

Но $\lg(1 + 1/5)^5 < \lg 3$, поскольку для любого $x > 0$ верно неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3.$$

Поэтому число, стоящее слева, больше, т. е. $(1/6)^{\frac{1}{6}} > (1/5)^{\frac{1}{5}}$.

Мы получили «выигрыш в силе» благодаря неравенству $(1 + 1/x)^x < 3$, которое не доказали. Свободное от долгов решение можно получить, исследовав функцию $f(x) = x^x$ (при $x > 0$). Ее производная (которую нельзя находить по формуле

$$(a^x)' = a^x \ln a) \quad f'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

обращается в нуль, только если $\ln x = -1$, т. е. при $x = 1/e$. На промежутке $(0; 1/e)$ производная отрицательна, значит, функция здесь убывает, а поскольку

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{e}, \quad f\left(\frac{1}{6}\right) > f\left(\frac{1}{5}\right),$$

что подтверждает полученный выше вывод. ►

☛ **Ответ:** первое число больше.

Завершает тему пример несколько иного характера.

20. Найти число цифр и первую цифру в десятичной записи числа 125^{100} , если известно, что $\lg 16 = 1,20412 \dots$

◀ Пусть $x = 125^{100}$, тогда

$$\lg x = 100 \lg 125 = 300 \lg 5 = 300 - 300 \lg 2.$$

Поскольку $300 \lg 2 = 75 \lg 16 = 90,3 \dots$, имеем $209 < 300 - 300 \lg 2 < 210$, т. е. число x состоит из 210 цифр.

Заметим, что для ответа на вопрос о числе цифр условие $\lg 16 = 1,20412 \dots$ является лишним: можно обойтись и без него. Действительно,

$$300 \lg 2 = 30 \lg 2^{10} = 30 \lg 1024 > 90.$$

Докажем, что $300 \lg 2 < 91$ и для этого рассмотрим разность

$$300 \lg 2 - 90 = 30 \lg 1024 - 90 = 30(\lg 1024 - 3) = 30 \lg \frac{1024}{100} = 30 \lg \left(1 + \frac{24}{1000}\right).$$

Снова воспользуемся неравенством $(1 + 1/x)^x < 3$. Тогда

$$30 \lg \left(1 + \frac{24}{1000}\right) = \frac{30 \cdot 24}{1000} \lg \left(1 + \frac{24}{1000}\right)^{1000/24} < \frac{30 \cdot 24}{1000} \lg 3 = \frac{18}{25} \lg 3 < 1.$$

Значит, $300 \lg 2 < 91$, и дальнейшее ясно.

Переходим ко второй части. Здесь уже без условия $\lg 16 = 1,20412\dots$ не обойтись. Пусть

$$x = a_0 a_1 a_3 \dots a_{209},$$

т. е.

$$x = a_0 \cdot 10^{209} + a_1 \cdot 10^{208} + \dots + a_{209}$$

(все $a_k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_k \leq 9$).

Тогда

$$\lg x = \lg 10^{209} \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots\right) = 209 + \lg \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots\right).$$

Поскольку

$$\lg x = 300 - 75 \lg 16 = 209,691\dots, \quad \lg \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots\right) = 0,691\dots$$

или

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots = 10^{0,691\dots}.$$

Значит, a_0 — целая часть числа $10^{0,691\dots}$. Но $10^{0,691\dots} = 10^{0,6} 10^{0,091\dots}$, а

$$\lg 10^{0,6} = 0,6 \approx \frac{1}{2} \lg 16 = \lg 4.$$

Поэтому $a_0 = 4$. Действительно, неравенство $4 < 10^{0,691\dots} < 5$ равносильно неравенству

$$\lg 4 < 0,691\dots < \lg 5 \quad \text{или} \quad 2 \lg 2 < 0,691\dots < 1 - \lg 2.$$

И, таким образом, нужно проверить неравенство $\lg 2 < 0,309\dots$. Но это следует из данного в условии значения

$$\lg 2 = \frac{1}{4} \lg 16 = 0,301\dots$$

►

☛ **Ответ:** число цифр 210, первая цифра 4.



Причал цивилизованных охотников

Она не знала таких вещей, как скорость света, разница между арифметической и геометрической прогрессией, логарифмы или закон притяжения.

Г. Газданов

0. По какому основанию вычислил логарифм девяти рассказчик у Франса (см. начало параграфа)?

1. Упростите:

а) $(\log_a b + \log_b a + 2) \log_a(ab) - (1 + \log_a^2 b) \log_b(ab) - \log_a(a^2 b^2)$;

б) $\left(2 + \lg \frac{a^2}{b^2} - 2 \lg(-a) + 2 \lg(-b)\right)^{\log_2 3}$;

в) $\frac{\log_a b}{1 + 4 \log_b c} + \frac{4 \log_a bc + \log_c b \cdot \log_a c}{4 + \log_c b}$;

г) $\log_{a+b} c + \log_{a-b} c - 2 \log_{a+b} c \cdot \log_{a-b} c$, если $a^2 - b^2 = c^2$.

д) Представьте в виде произведения

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x.$$

2. а) Вычислите

$$\frac{\lg 125 - 2 \lg 2}{\lg \sqrt[3]{4} + \lg 0,2};$$

б) найдите $\log_a \sqrt[5]{a^2 b^3}$, если $\log_b \sqrt[3]{a^4 b} = 3$.

3. Вычислите

$$2^{\log_3 5 - \log_3 3} \cdot 3^{\log_5 2 - \log_5 5} \cdot 5^{\log_2 3 - \log_2 2}.$$

4. Вычислите:

а) $5^A - 3^B$, где $A = \log_2^2 3$, $B = \log_2 3 \log_2 5$;

б) 2^A , где $A = 6 \log_{2\sqrt{2}}(5 - \sqrt{10}) + 8 \log_{1/4}(\sqrt{5} - \sqrt{2})$;

в) $\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{16}}}}_{40}$;

г) $\log_{\sqrt{2}-1}(7 + 5\sqrt{2})$.

5. Какие значения может принимать выражение $\log_{b_1 b_{50}}(b_1 b_2 \dots b_{60})$, где $b_1, b_2, \dots$ — геометрическая прогрессия?

6. Вычислите:

а) $\frac{\lg 6 \cdot \lg 12}{2 \lg^2 3 + 3 \lg 3 \cdot \lg 2 - 2 \lg^2 2} + \log_{4,5} 0,75;$

б) $\log_3 2 \cdot \left(\frac{2 \log_3^2 4 + \log_2^4 3}{2 + \log_2^2 3} - 2 \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \log_9^2 16;$

в) 196^A , если

$$A = \frac{(\log_7 4 - \log_4 7)(\log_7 4 + 5)}{(\log_7 4 + 2)(\log_7 4 - 5 \log_7 7 + 4)}.$$

7. Для некоторых чисел $x \neq y$ и z выражения

$$\log_{x^3 y^2 z} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z} \right) \quad \text{и} \quad \log_{x^2 y^3 z} \left(\frac{\sqrt{x y}}{z} \right)$$

принимают одно и тоже значение. Найдите это значение.

8. Вычислите:

$$\lg(\sin 0,1\pi) \lg(\sin 0,2\pi) \lg(\sin 0,3\pi) \dots \lg(\sin 0,9\pi).$$

9. Возможно ли равенство $\lg \sin \alpha = \sin \alpha$?

10. Докажите, что $\log_{16} 36$ иррационален.

11. Найдите значение выражения

$$\log_{11/25} |\sin 3\alpha| + \log_{11/25} |\sin \alpha|,$$

если известно, что

$$\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

12. Пусть $\log_5 2 = a$, $\log_2 3 = b$. Найдите $\log_{600} 900$.

13. Найдите $\log_{24} 54$, если $\log_{108} 48 = a$.

14. Пусть $\lg 196 = a$, $\lg 56 = b$. Найдите $\lg 0,175$.

15. Выразите

$$\log_{\sqrt{x y z}} \left(\frac{x^2 y^2}{z^4} \right)$$

через $\log_{xy} x = a$ и $\log_{xz} y = b$.

16. Найдите x^x , если $x^x = 10$, $y^y = 100$, $y^z = 36$.

17. Найдите

$$\log_{a/b}^2 a + \log_{b/a}^2 b,$$

если

$$\log_{a/b} a^9 = \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{b}{a} \right).$$

18. Сравните: а) $\log_5 3$ и $2/3$; б) $\lg 12$ и $\lg^2 11$.

19. Сравните: а) $\log_3 6$ и $\log_5 10$; б) $\log_3 4$ и $\log_7 10$; в) $\log_{11} 396$ и $\log_9 363$; г) $\log_{20} 80$ и $\log_{80} 640$.

20. Верно ли неравенство:

а) $3 \log_2 5 < \sqrt{9 \log_2 5 + 28}$;

б) $\log_2 7 + \left(3 + \cos \frac{15}{7} \right) \log_7 2 \leq 4$?

21. Сравните с нулем $\lg (\operatorname{arctg} 2)$.

22. Сравните $3 \log_{16} 1862 + \log_{16} 1866$ и $\log_2 1863$.

23. Сравните: а) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ и $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$; б) $2^{3^{100}}$ и $3^{2^{150}}$ (наверное, понятно, что здесь не требуется сравнивать 8^{100} и 9^{150}).

24. Докажите, что

$$\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4,4.$$

25. Какому из отрезков $[2; 3]$, $[3,1; 3,3]$, $[3,6; 4,5]$ принадлежит число

$$a = \log_6 7 \sqrt[3]{6} - \log_7 \frac{1}{8 \sqrt[3]{49}} + \log_8 \frac{9}{8}?$$

26. Найдите число цифр числа: а) 2^{100} ; б) 5^{800} .

27. Найдите число цифр и первую цифру числа 2^{64} , считая известным

$$\lg 2 = 0,301 \dots$$

28. Друг за другом выписаны числа 2^{2009} и 5^{2009} . Сколько всего цифр выписано?

Советы и решения

Р 0. Очевидно, основание равно 10, поскольку если говорят просто: «логарифм», не уточняя основание, по умолчанию подразумевается либо логарифм десятичный, либо натуральный. Так как $\ln 9 > 2$ и не может равняться 0,954, то остается десятичный. Поразимся вместе тому, как много знают хорошие писатели, не бравирующие математической безграмотностью.

Р 1. а) Обозначив $\log_a b = x$, имеем

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)(1+x) - (1+x^2)\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2 - 2x &= \\ = \frac{(x+1)^3 - (x^2+1)(x+1) - 2x^2 - 2x}{x} = \dots = 0. \end{aligned}$$

б) Выражение в скобках можно переписать в виде

$$2 + \lg \frac{a^2}{b^2} - \lg a^2 + \lg b^2 = 2 + \lg \frac{a^2}{b^2} - \lg \frac{a^2}{b^2} = 2.$$

в) Пусть $\log_a b = x$, $\log_a c = y$, тогда $\log_a c = y/x$ и упрощаемое выражение переписывается:

$$\frac{x}{1 + 4y/x} + \frac{4(x+y)}{4 + x/y} = \frac{x^2 + (5x+4y)y}{x+4y} = \frac{(x+4y)(x+y)}{x+4y} = x+y = \log_a(bc).$$

г) Переходя к основанию c , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_c(a+b)} + \frac{1}{\log_c(a-b)} - \frac{2}{\log_c(a+b) \log_c(a-b)} &= \\ = \frac{\log_c(a^2 - b^2) - 2}{\log_c(a+b) \log_c(a-b)} = \frac{\log_c c^2 - 2}{\log_c(a+b) \log_c(a-b)} = 0. \end{aligned}$$

д) Переходя к основанию x , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_x a \log_x b} + \frac{1}{\log_x b \log_x c} + \frac{1}{\log_x c \log_x a} &= \frac{\log_x abc}{\log_x a \log_x b \log_x c} = \\ = \log_x(abc) \log_x^{-1} a \log_x^{-1} b \log_x^{-1} c. \end{aligned}$$

Р 2. а) $\dots = \frac{3 \lg 5 - 2 \lg 2}{2/3 \lg 2 - \lg 5} = \frac{3 \lg 5 - 2 \lg 2}{1/3(2 \lg 2 - 3 \lg 5)} = -3.$

б) Из условия следует, что $\log_a a^4 b = 9$, откуда $b^9 = a^4 b$ или, поскольку $a, b > 0$, $b^8 = a^4$, т. е. $b = \sqrt[4]{a}$. Значит,

$$\log_a \sqrt[5]{a^2 b^3} = \frac{1}{5} \log_a a^2 a^{3/2} = \frac{1}{5} \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{10}.$$

Р 3. Перепишем данное выражение так:

$$\frac{2^{\log_1 5}}{5^{\log_1 2}} \cdot \frac{3^{\log_3 2}}{2^{\log_3 3}} \cdot \frac{5^{\log_2 3}}{3^{\log_2 5}}.$$

Каждая из этих дробей равна 1 на основании формулы $a^{\log_a c} = c^{\log_a a}$ настоящего параграфа.

Р 4. а) Имеем $B = \log_3 5 \cdot \log_2^2 3$, поэтому $B \log_5 3 = \log_2^2 3$ и тогда $3^B = 5^{B \log_5 3} = 5^4$.

б) $A = 6 \cdot \frac{2}{3} \log_2(5 - \sqrt{10}) - 8 \cdot \frac{1}{2} \log_2(\sqrt{5} - \sqrt{2}) =$
 $= 4 \log_2 \frac{5 - \sqrt{10}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = 4 \log_2 \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \log_2 25.$

в) Матрешка из радикалов равна $a = 16^{(1/2)^{40}}$; тогда

$$\log_2 a = \left(\frac{1}{2}\right)^{40} \cdot 4 = (4)^{-20} \cdot 4 = 4^{-19}.$$

г) Примем во внимание, что

$$7 + 5\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^3 = (\sqrt{2} - 1)^{-3}.$$

Р 5. Имеем

$$b_{11}b_{50} = b_1^2 q^{59}, \quad b_1 b_2 \dots b_{60} = b_1^{60} q^{1+2+\dots+59} = b_1^{60} q^{59 \cdot 30} = (b_1^2 q^{59})^{30}.$$

Р 6. а) Знаменатель преобразуется так:

$$(\lg 3 + 2 \lg 2)(2 \lg 3 - \lg 2) = \lg 12 \cdot \lg (4,5).$$

Тогда дробь равна $\lg 6 / \lg (4,5) = \log_{4,5} 6$, что при сложении с $\log_{4,5} (0,75)$ дает 1.

б) Пусть $\log_2 3 = a$, преобразуем выражение в скобке:

$$\frac{2(\log_2 4/a)^2 + a^4}{2 + a^2} - 2 = \frac{a^6 + 8}{a^2(a^2 + 2)} - 2 = \frac{a^4 - 2a^2 + 4}{a^2} - 2 = \frac{(a^2 - 2)^2}{a^2}.$$

Поскольку $a = \log_2 3 > 3/2 > \sqrt{2}$, $\log_2^2 16 = \log_2^2 4 = 4a^{-2}$, для исходного выражения имеем:

$$\frac{a^2 - 2}{a^2} + \frac{2}{a^2} = 1.$$

в) Пусть $\log_7 4 = a$, тогда

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a - 1/a)(a + 5)}{(a + 2)(a + 4 - 5/a)} = \frac{(a^2 - 1)(a + 5)}{(a + 2)(a^2 + 4a - 5)} = \\ &= \frac{a + 1}{a + 2} = \frac{\log_7 28}{\log_7 196} = \log_{196} 28. \end{aligned}$$

Р 7. Пусть

$$\log_{x^2 y^2 z} \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z} = \log_{x^2 y^2 z} \frac{\sqrt{xy}}{z} = a.$$

Тогда

$$x^{5a} y^{2a} z^a = x^{2/3} y^{1/3} z^{-1} \quad \text{и} \quad x^{2a} y^{5a} z^a = x^{1/2} y^{1/2} z^{-1}.$$

Отсюда

$$x^{3a} y^{-3a} = x^{1/6} y^{-1/6} \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{3a} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/6} \quad \text{и} \quad 3a = \frac{1}{6}.$$

Р 8. Где-то в середине стоит $\lg (\sin 0,5\pi) = 0$.

Р 9. Если бы такое равенство было возможно, то, поскольку $\sin \alpha \leq 1$, логарифм был бы ≤ 0 , но тогда и $\sin \alpha \leq 0$, что не совместимо с существованием $\lg \sin \alpha$.

Р 10. Поскольку

$$\log_{16} 36 = \log_4 6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 3,$$

достаточно доказать иррациональность $\log_2 3$. Предположив, что $\log_2 3 = m/n$, получим $2^m = 3^n$, что невозможно ни при каких натуральных n и m : слева четное число, справа — нечетное.

Р 11. Упростив данное в условии равенство, получим $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$; тогда

$$\sin 3\alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \sin \alpha \sin 3\alpha = \frac{11}{25}.$$

Р 12. Имеем

$$\log_{600} 900 = \frac{\log_2 900}{\log_2 600} = \frac{\log_2 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{\log_2 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2} = \frac{2 + 2b + 2/a}{3 + b + 2/a} = \frac{2(a + ab + 1)}{3a + ab + 2}.$$

Р 13. Так как

$$a = \frac{\log_2(2^4 \cdot 3)}{\log_2(2^2 \cdot 3^3)},$$

то, обозначив $\log_2 3 = x$, получим

$$a = \frac{4 + x}{2 + 3x}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{2a - 4}{1 - 3a}.$$

Тогда

$$\log_{24} 54 = \frac{1 + 3x}{3 + x}$$

и после подстановки

$$\log_{24} 54 = \frac{11 - 3a}{7a + 1}.$$

Р 14. Поскольку

$$0,175 = \frac{7}{40} \quad \text{и} \quad \lg 0,175 = \lg 7 - \lg 40 = \lg 7 - 2 \lg 2 - 1,$$

обозначим $\lg 2 = x$, $\lg 7 = y$. Тогда

$$a = 2 \lg 14 = 2(x + y), \quad b = \lg 4 + \lg 14 = 3x + y.$$

Из этих двух равенств находим

$$x = \frac{2b - a}{4}, \quad y = \frac{3a - b}{4}.$$

И окончательно

$$\lg 0,175 = y - 2x - 1 = \frac{5a - 5b - 4}{4}.$$

Р 15. Имеем:

$$a = \frac{1}{\log_x y + 1}, \quad \text{откуда} \quad \log_x y = \frac{1 - a}{a}.$$

Тогда из условия

$$b = \frac{\log_x y}{1 + \log_x z} \quad \text{находим} \quad \log_x z = \frac{1 - a - ab}{ab}.$$

Осталось подставить эти выражения в

$$\log_{\sqrt{xy}} \left(\frac{x^2 y^2}{z^4} \right) = \frac{4(1 + \log_x y - 2 \log_x z)}{1 + \log_x y + \log_x z}.$$

Р 16. Логарифмируя данные равенства, придем к системе

$$\begin{cases} x \lg x = 1, \\ x \lg y = 2, \\ x \lg y = 6 \lg 6. \end{cases}$$

Исключая y , получим $x = z/\lg 6$. Подстановка в первое уравнение даст $z \lg x = \lg 6$, откуда $x^z = 6$.

Р 17. Пусть $a/b = x$. Тогда

$$9 \log_x a = -\frac{2}{\log_x b} \Rightarrow \log_x a \log_x b = -\frac{2}{9}. \quad (*)$$

Исходное выражение имеет вид

$$\log_x^2 a + \log_x^2 b = (\log_x ab)^2 - 2 \log_x a \log_x b = \log_x^2 ab + \frac{4}{9}.$$

Из равенства (*) следует, что

$$\log_x(bx) \log_x b = -\frac{2}{9} \quad \text{или} \quad t^2 + t + \frac{2}{9} = 0, \quad \text{где} \quad t = \log_x b.$$

Находим два корня: $t_1 = -2/3$, $t_2 = -1/3$, которые при подстановке приводят к одному результату, а именно:

$$\log_x^2 ab = \log_x^2(b^2 x) = (1 + 2 \log_x b)^2 = (1 + 2t)^2 = \frac{1}{9}.$$

Р 18. а) Поскольку $3 \log_5 3 = \log_5 27 > \log_5 25 = 2$, первое из данных чисел больше.

б) Имеем:

$$\lg^2 11 = (1 + \lg 1,1)^2 = 1 + \lg 1,21 + \lg^2 1,1 > 1 + \lg 1,2 = \lg 12.$$

Р 19. а) Первое число равно $1 + \log_3 2$, второе равно $1 + \log_5 2$. И поскольку

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} > \frac{1}{\log_2 5} = \log_5 2,$$

первое число больше.

б) Уменьшив числа на 1, сравним $\log_3(4/3)$ и $\log_7(10/7)$ или, что то же, $\log_3(16/9)$ и $\log_7(100/49)$. Но

$$\log_3 \left(\frac{16}{9} \right) > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

(ибо $256 > 81 \cdot 3$), тогда как

$$\log_7 \left(\frac{100}{49} \right) < \log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$$

(ибо $100/49 < 2,5 = \sqrt{6,25} < \sqrt{7}$). Значит, $\log_3 4 > \log_7 10$.

в) Разность

$$\log_{11} 396 - \log_9 363 = \log_{11}(11 \cdot 36) - \frac{1}{2} \log_3(11^2 \cdot 3) = \frac{1}{2} + \log_{11} 36 - \log_3 11 < 0,$$

поскольку $\log_{11} 36 < 3/2$ (ибо $2 \log_{11} 36 = \log_{11} 1296 < 3 = \log_{11} 1331$), а $\log_3 11 > 2$.

г) Уменьшим каждое число на 1 и сравним

$$\log_{20} 4 = \frac{2}{2+x} \quad \text{и} \quad \log_{80} 8 = \frac{3}{4+x}, \quad \text{где } x = \log_2 5.$$

Поскольку

$$\frac{2}{2+x} - \frac{3}{4+x} = \frac{2-x}{(2+x)(4+x)} < 0$$

(ибо $x > 2$), первое число меньше.

Р 20. а) Пусть $x = \log_2 5$, $x > 2$. Неравенство

$$3x < \sqrt{9x+28}$$

равносильно $9x^2 - 9x - 28 < 0$, откуда $-4/3 < x < 7/3$. Значит, надо проверить неравенство $\log_2 5 < 7/3$, что равносильно верному неравенству

$$3 \log_2 5 = \log_2 125 < \log_2 128 = 7.$$

б) Знак « $\leq$ » не должен вводить нас в заблуждение: если мы докажем, что первое число строго меньше 4, замена знака « $<$ » на « $\leq$ » никакой ошибки содержать не будет. Пусть $\log_2 7 = a$, $3 + \cos 15/7 = k$. Решим неравенство $a + k/a < 4$, учитывая, что $a \in (2; 3)$. Мы получим

$$(a-2)^2 < 4-k = 2 \sin^2 \frac{15}{14},$$

откуда

$$2 - \sqrt{2} \sin \frac{15}{14} < a < 2 + \sqrt{2} \sin \frac{15}{14}.$$

Поскольку $\sin 15/14 > 0$, неравенство $2 - \sqrt{2} \sin (15/14) < a$ выполнено при $\log_2 7 = a$. А поскольку

$$3 = 2 + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} < 2 + \sqrt{2} \sin \frac{15}{14}$$

(ибо $\pi/4 < 15/14 \Leftrightarrow \pi < 30/7$), выполнено и неравенство

$$\log_2 7 < 2 + \sqrt{2} \sin \frac{15}{14}.$$

Р 21. Поскольку $\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi/3 > 1$, логарифм положителен.

Р 22. Пусть $1862 = n$, тогда сравниваемые числа имеют вид

$$\frac{3}{4} \log_2 n + \frac{1}{4} \log_2 (n+4) = \frac{1}{4} \log_2 n^3 (n+4) \quad \text{и} \quad \log_2 (n+1).$$

Сравнение этих чисел сводится к сравнению $n^3(n+4)$ и $(n+1)^4$. Но

$$n^4 + 4n^3 < n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

поскольку n положительно. Значит, первое число меньше.

Да, вот такое «неинтересное» решение: ведь составитель предполагал использование неравенства Коши, причем для *четырёх* (неотрицательных) чисел (которое, однако, еще и доказывать надо бедным поступающим — несмотря на то, что Коши доказал его аж в 1821 г.)! Что ж, так бывает: какой-нибудь гадкий школьник (который может

даже не зная формулу бинома, а просто возвести в 4-ю степень) находит тупое решение, обесценивающее задачу (и ночные вдохновения сочинителя). Всё-таки из уважения приведем и «красивое» решение, основывающееся на неравенстве

$$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4.$$

Действительно,

$$1862^3 \cdot 1866 < \left(\frac{3 \cdot 1863 + 1866}{4} \right)^4 = 1863^4,$$

и дело в шляпе!

Р 23. а) Будем кратки:

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \vee (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3} \lg 2 \vee \sqrt{2} \lg 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \vee \log_2 3.$$

Но $\sqrt{3/2} < 3/2$, тогда как $\log_2 3 > 3/2$. Значит,

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}.$$

б) Беря от сравниваемых чисел логарифмы по основанию 2, получаем

$$3^{100} \vee 2^{150} \log_2 3 \quad \text{или} \quad 9^{50} \vee 8^{50} \log_2 3, \quad \left(\frac{9}{8} \right)^{50} \vee \log_2 3.$$

Но в силу неравенства $(1+a)^n > 1+na$ имеем

$$\left(1 + \frac{1}{8} \right)^{50} > 1 + \frac{50}{8} > 7,$$

тогда как $\log_2 3 < 2$. Значит, $2^{3^{100}} > 3^{2^{150}}$.

Р 24. Разбив сумму логарифмов на две пары, применим к каждой неравенство Коши (для двух чисел). Получим

$$\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 2\sqrt{\log_4 6} + 2\sqrt{\log_6 8}$$

и, снова по тому же неравенству,

$$\dots > 4\sqrt[4]{\log_4 8} = 4\sqrt[4]{\frac{3}{2}} > 4,4 \Leftrightarrow 1,5 > 1,1^4 \Leftrightarrow 1,5 > 1,46.$$

Р 25. Очевидными упрощениями приводим данное число к виду

$$a = \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 9.$$

Поскольку самый большой в тройке — это $\log_6 7$, а он меньше 1,1 (цепочка:

$$\log_6 7 < 1,1 \Leftrightarrow \log_6 \frac{7}{6} < 0,1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{6} \right)^{10} < 6 \Leftrightarrow 7^{10} < 6^{11},$$

что верно, так как $(n+1)^k < n^{k+1}$ при $n > 3$), вся сумма меньше 3,3. Но больше ли она 3,1? Призовем неравенство Коши для трех чисел; оно даст нам $a > 3\sqrt[3]{\log_6 9}$. Докажем, что

$$3\sqrt[3]{\log_6 9} > 3,1 \Leftrightarrow \log_6 9 > \left(\frac{31}{30} \right)^3.$$

Так как

$$\left(\frac{31}{30}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^3 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{300} + \frac{1}{27000},$$

а $\log_6 9 = 1 + \log_6(3/2)$, то нам достаточно проверить, что

$$\log_6 \frac{3}{2} > \frac{1}{10} + \frac{1}{250} = \frac{13}{125}$$

(мы заменили число $1/300 + 1/27000 = 93/27000$ на большее). Для этого преобразуем

$$\log_6 \frac{3}{2} = \frac{1 - \log_3 2}{1 + \log_3 2}$$

и, обозначив $\log_3 2 = x$, решим неравенство

$$\frac{1-x}{1+x} > \frac{13}{125}.$$

Мы получим $x < 56/59$. И поскольку

$$\log_3 2 < \frac{2}{3} < \frac{56}{59},$$

всё доказано. Итак, $a \in [3,1; 3,3]$.

Р 26. а) Пусть $x = 2^{100}$, докажем, что $30 < \lg x < 31$. Имеем

$$\lg x = 100 \lg 2 = 10 \lg 1024 > 10 \lg 1000 = 30.$$

В примере 20 настоящего параграфа мы доказали, что $300 \lg 2 < 91$, т. е.

$$100 \lg 2 < \frac{91}{3} < 31.$$

Таким образом, $10^{30} < x < 10^{31}$, и наше число состоит из 31 цифры.

б) Если $5^{800} = x$, то

$$\lg x = 800 \lg 5 = 800(1 - \lg 2) = 800 - 800 \lg 2.$$

Поскольку в примере 20 мы установили, что $30 < 100 \lg 2 < 91/3$, это дает нам оценку $240 < 800 \lg 2 < 728/3$, откуда

$$557 \frac{1}{3} < 800 - 800 \lg 2 < 560.$$

Докажем, что на самом деле $559 < 800 - 800 \lg 2 < 560$, откуда будет следовать, что наше число имеет 560 цифр. Неравенство $559 < 800 - 800 \lg 2$ можно переписать в виде $800 \lg 2 - 240 < 1$ и дальше повторить выкладку из примера 20. А именно

$$\begin{aligned} 800 \lg 2 - 240 &= 80 \lg \frac{1024}{1000} = 80 \lg \left(1 + \frac{24}{1000}\right) = \\ &= \frac{80 \cdot 24}{1000} \lg \left(1 + \frac{24}{1000}\right)^{1000/24} < \frac{80 \cdot 24}{1000} \lg 3 = \frac{48}{25} \lg 3 < \frac{48}{25} \cdot \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

(так как $\lg 3 < 0,5 = \lg \sqrt{10}$).

Р 27. Пусть $2^{64} = x$, тогда поскольку

$$64 \cdot 0,3 < 64 \lg 2 < 64 \cdot 0,31 < 20$$

(см. предыдущую задачу), число x состоит из 20 цифр. Далее: так как

$$\lg x = 64 \cdot 0,301 \dots = 19,264 \dots, \quad \text{то} \quad x = a_0 \cdot 10^{19} + a_1 \cdot 10^{18} + \dots$$

и тогда

$$\lg x = \lg 10^{19} \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots \right) = 19 + \lg \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots \right).$$

Таким образом,

$$\lg \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots \right) = 0,264 \dots \quad \text{и} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots = 10^{0,264 \dots},$$

так что $a_0 = [10^{0,264 \dots}]$ (целая часть числа). Поскольку

$$\lg 10^{0,2} = 0,2 = \frac{0,3}{1,5} \approx \frac{2}{3} \lg 2 = \lg 2^{2/3} = \lg \sqrt[3]{4},$$

эта целая часть равна 1. Действительно, неравенство $1 < 10^{0,264 \dots} < 2$ равносильно очевидному неравенству $0 < 0,264 < \lg 2 < 0,3$.

Р 28. Пусть $2^{2009} = x$, $5^{2009} = y$. Тогда

$$\lg x + \lg y = 2009,$$

и наименьшее целое число, большее 2009, т.е. 2010, и есть искомое количество цифр. (Если x имеет n цифр, а y — k цифр, то $n-1 < \lg x < n$, $k-1 < \lg y < k$ и $k+n-2 < \lg x + \lg y < k+n \Leftrightarrow k+n-2 < 2009 < k+n \Leftrightarrow 2009 < k+n < 2011$.)

Ответы

0. 10; 1. а) 0; б) 2; в) $\log_a(bc)$; г) 0; д) $\log_x(abc) \log_x^{-1} a \log_x^{-1} b \log_x^{-1} c$; 2. а) -3; б) 0,7; 3. 1; 4. а) 0; б) 25; в) -19; г) -3; 5. 30; 6. а) 1; б) 1; в) 28; 7. 1/18; 8. 0; 9. Нет; 11. 1; 12. $(2(a+ab+1))/(3a+ab+2)$; 13. $(11-3a)/(7a+1)$; 14. $(5a-5b-4)/4$; 15. $(4(2ab+2a+b-2))/((1-a)(b+1))$; 16. 6; 17. 5/9; 18. Первое число больше; 19. а) 6 — первое число больше; в) г) — первое число меньше; 20. а) да; б) да; 21. $\lg(\operatorname{arctg} 2) > 0$; 22. первое число меньше; 23. а) первое число меньше; б) первое число больше; 25. $a \in [3,1; 3,3]$; 26. а) 31; б) 560; 27. 20 цифр, первая — 1; 28. 2010.

§ 17. Уравнения и их системы

При решении показательных (и логарифмических) уравнений успех зависит от возможности свести уравнение к простейшему, т.е. к уравнению вида $a^x = b$ или $\log_a x = b$, и сложность задачи, как правило, прямо пропорциональна количеству входящих в уравнение показательных (логарифмических) функций с разными основаниями.

1. Решить уравнения:

$$\text{а) } \sqrt{3^{5x-2}} = \frac{27}{\sqrt[7]{9}};$$

$$\text{б) } 9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0;$$

$$\text{в) } 6 \cdot 5^{2x+3} - 5 \cdot 5^{\frac{3x+3}{2}} = 5^{-x}.$$

◀ а) Это уравнение можно привести к виду $3^a = 3^b$; а конкретно

$$3^{\frac{5x-2}{2}} = \frac{3^3}{3^{2/7}} \quad \text{или} \quad 3^{\frac{5x-2}{2}} = 3^{3-2/7}.$$

Теперь, приравнявая показатели степени, получаем $(5x - 2)/2 = 19/7$, откуда $x = 52/35$.

б) На первый взгляд кажется, что в этом уравнении показательных функций две, но в действительности — тоже одна, как и в примере а), а вторая является ее степенью. Перепишем уравнение в виде

$$3^{2x} - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$$

и положим $3^x = y$, где $y > 0$. Квадратное уравнение $y^2 - 25y - 54 = 0$ имеет единственный положительный корень $y = 27$; тогда $3^x = 27$ и $x = 3$.

в) И в этом уравнении, несмотря на кажущуюся сложность, действует только одна показательная функция. Домножим обе части равенства на 5^x ; мы получим

$$6 \cdot 5^{3x+3} - 5 \cdot 5^{\frac{3x+3}{2}} = 1.$$

Положив

$$5^{\frac{3x+3}{2}} = y > 0$$

приходим к уравнению $6y^2 - 5y - 1 = 0$, положительный корень которого $y = 1$. Тогда $(3x + 3)/2 = 0$, $x = -1$. ▶

🔑 **Ответ:** а) $52/35$; б) 3 ; в) -1 .

2. Решить уравнение $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$;

◀ В этом уравнении показательные функции 2^u и 5^v уже не сводятся друг к другу, поэтому сгруппируем отдельно двойки, отдельно пятерки:

$$\begin{aligned} 2^{2x} + 2^{2x+2} &= 5^{2x} - 5^{2x-1} \Rightarrow 2^{2x} + 2^{2x} \cdot 4 = 5^{2x} - 5^{2x} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5 \cdot 2^{2x} = \frac{4}{5} \cdot 5^{2x} \Rightarrow 2^{2x-2} = 5^{2x-2}. \end{aligned}$$

Настал решительный момент: надо разделить обе части уравнения на одну из степеней, например на 5^{2x-2} , получится уравнение $(5/2)^{2x-2} = 1$. Отсюда $2x - 2 = 0$, $x = 1$. ►

☛ **Ответ:** 1.

3. Решить уравнение $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

◀ В этом уравнении задействованы уже три показательные функции, несводимые к одной. Однако совсем уж произвольными основания степеней быть не могут. Чтобы выявить подноготную, перепишем уравнение так:

$$3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} = 5 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x}.$$

Теперь видно, что предложенное уравнение на самом деле однородное (второй степени): достаточно обозначить $2^{2x} = u$, $3^{2x} = v$. Имеем

$$3u^2 - 5uv + 2v^2 = 0.$$

Отсюда 1) $u = v$, 2) $u = 2v/3$.

Первая возможность приводит к уравнению $2^{2x} = 3^{2x}$ или $(2/3)^{2x} = 1$, откуда $x = 0$. Равенство $u = 2v/3$ дает $(2/3)^{2x} = 2/3$, откуда $x = 1/2$. ►

☛ **Ответ:** 0; 1/2.

4. Решить уравнение

$$4^{\frac{3x+1}{2x+1}} + 4^{\frac{x+1}{2x+1}} = 10.$$

◀ В этом уравнении основание степени одно, и это, кажется, неплохо, но показатели... Значит, всё дело в них. Присмотревшись, замечаем, что

$$\frac{3x+1}{2x+1} + \frac{x+1}{2x+1} = 2,$$

а потому, заменив

$$\frac{3x+1}{2x+1} = y,$$

мы получим

$$\frac{x+1}{2x+1} = 2 - y,$$

и уравнение примет вид $4^y + 4^{2-y} = 10$. Это уравнение приводится к квадратному и легко решается. ►

☛ **Ответ:** -1, -7/13.

5. Решить уравнение $2^x = 5^{1/x}$.

◀ В определенных кругах бытует мнение, что равенства вроде $2^a = 5^b$ возможны только при $a = b = 0$. Однако это не так. Прибегнем к логарифмированию обеих частей равенства — по основанию 10; мы получим тогда

$$x \lg 2 = \frac{1}{x} \lg 5 \quad \text{или} \quad x^2 = \log_2 5,$$

откуда $x = \pm \sqrt{\log_2 5}$. ▶

☛ **Ответ:** $\pm \sqrt{\log_2 5}$.

6. Решить уравнение $16^{\frac{x-1}{2}} \cdot 5^x = 100$.

◀ Снова прологарифмируем обе части равенства по основанию 10; мы получим

$$\frac{x-1}{2} \lg 16 + x \lg 5 = 2 \quad \text{или} \quad 4(x-1) \lg 2 + x^2 \lg 5 = 2x.$$

Немногие понимают, что перед нами — квадратное уравнение. От «обычного» его отличает только то, что коэффициентами являются логарифмы, с которыми нужно обращаться соответствующим образом. Действительно, перепишем уравнение так:

$$\lg 5 \cdot x^2 + (4 \lg 2 - 2)x - 4 \lg 2 = 0$$

и найдем дискриминант, учитывая, что $\lg 5 = 1 - \lg 2$. Имеем

$$D = 16 \lg^2 2 - 16 \lg 2 + 4 + 16(1 - \lg 2) \lg 2 = 4.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{2 - 4 \lg 2 - 2}{2 \lg 5} = -2 \log_5 2, \quad x_2 = 2. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $-2 \log_5 2$; 2.

Решение логарифмических уравнений — это прежде всего практикум по логарифмическим преобразованиям плюс повторение темы «уравнения». Иными словами, решая логарифмическое уравнение, его нужно сперва упростить, приводя к простейшему, а потом, получив алгебраическое уравнение, не забыть сделать проверку.

7. Решить уравнение $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11/2$.

◀ Приводя логарифмы к основанию 3, получаем

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{2}$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \log_3 x = \frac{11}{2}, \quad \frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{2},$$

откуда $\log_3 x = 3$. Тогда $x = 27$. ►

☛ **Ответ:** 27.

8. Решить уравнение $\log_2^2(8x) + \log_2^2(4x) + \log_2^2(2x) = 5$.

◀ Раскладывая логарифм произведения в сумму логарифмов, получаем

$$(\log_2 8 + \log_2 x)^2 + (\log_2 4 + \log_2 x)^2 + (\log_2 2 + \log_2 x)^2 = 5$$

или, обозначая

$$\log_2 x = y, \quad (3 + y)^2 + (2 + y)^2 + (1 + y)^2 = 5,$$

откуда

$$3y^2 + 12y + 9 = 0 \quad \text{или} \quad y^2 + 4y + 3 = 0.$$

Тогда $y_1 = -3$, $y_2 = -1$. Решая уравнения 1) $\log_2 x = -3$ и 2) $\log_2 x = -1$, находим $x_1 = 1/8$, $x_2 = 1/2$. ►

☛ **Ответ:** $1/8$, $1/2$.

9. Решить уравнение $\log_{5x} x = \log_{7x-1} x$.

◀ Образцом неосторожности был бы переход к основанию x — такое преобразование может привести к потере корней. Перейдем к основанию 10:

$$\frac{\lg x}{\lg 5x} = \frac{\lg x}{\lg (7x-1)} \Rightarrow \lg x (\lg (7x-1) - \lg 5x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1) \lg x = 0, \quad x_1 = 1; \quad 2) \lg (7x-1) = \lg 5x, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

ОДЗ определяется условиями

$$x > 0, \quad 5x \neq 1, \quad 7x-1 > 0, \quad 7x-1 \neq 1.$$

Найденные корни им удовлетворяют. ►

☛ **Ответ:** $1/2$; 1.

10. Решить уравнение

$$\log_2(\log_3 x) + \log_3(\log_2 x) = 0.$$

◀ Вот тут навыки преобразований окажутся очень кстати. Переходим к новому основанию — пусть это опять будет 10; получим

$$\frac{\lg(\log_3 x)}{\lg 2} + \frac{\lg(\log_2 x)}{\lg 3} = 0$$

или

$$\lg 3 \cdot \lg(\log_3 x) + \lg 2 \cdot \lg(\log_2 x) = 0, \\ \lg(\log_3 x)^{\lg 3} + \lg(\log_2 x)^{\lg 2} = 0, \quad \lg((\log_3 x)^{\lg 3} \cdot (\log_2 x)^{\lg 2}) = 0.$$

Тогда

$$(\log_3 x)^{\lg 3} \cdot (\log_2 x)^{\lg 2} = 1.$$

Переходим к основанию 10 теперь во внутренних логарифмах:

$$\left(\frac{\lg x}{\lg 3}\right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{\lg x}{\lg 2}\right)^{\lg 2} = 1 \Leftrightarrow (\lg x)^{\lg 6} = (\lg 3)^{\lg 3} \cdot (\lg 2)^{\lg 2}.$$

Наконец, логарифмируя последнее равенство по основанию 10, получим

$$\lg 6 \cdot \lg(\lg x) = \lg 3 \cdot \lg(\lg 3) + \lg 2 \cdot \lg(\lg 2), \\ \lg(\lg x) = \frac{\lg 3 \lg(\lg 3) + \lg 2 \lg(\lg 2)}{\lg 6},$$

откуда

$$x = 10^A, \quad \text{где } A = 10^B, \quad B = \frac{\lg 3 \lg(\lg 3) + \lg 2 \lg(\lg 2)}{\lg 6}.$$

(Мы прибегли к такому ступенчатому способу записи ответа, чтобы не гроздить «высотки» из показателей степени.) ▶

☛ **Ответ:** 10^A , где $A = 10^B$, $B = (\lg 3 \lg(\lg 3) + \lg 2 \lg(\lg 2))/\lg 6$.

11. Решить уравнение $\log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + x - 1) = \log_{\sqrt{5}-2}(x + 3)$.

◀ Некоторая наблюдательность (накопленная за 16 параграфов) позволяет заметить, что $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1$, а потому и в этом уравнении возможно привести логарифмы к одному основанию. Имеем:

$$\log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + x - 1) = \log_{(\sqrt{5}+2)^{-1}}(x + 3)$$

или

$$\log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + x - 1) = -\log_{(\sqrt{5}+2)}(x + 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + x - 1) = \log_{(\sqrt{5}+2)}(x + 3)^{-1}.$$

Отсюда, потенцируя (так называется действие, состоящее в отбрасывании логарифмов), получаем $x^2 + x - 1 = (x + 3)^{-1}$ или $(x^2 + x - 1)(x + 3) = 1$.

Раскрывая скобки, приходим к уравнению $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$, корни которого $x_1 = -2$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$. Проверка показывает, что все они входят в ОДЗ исходного уравнения. ►

● **Ответ:** $-2; -1 \pm \sqrt{3}$.

Один из скользких моментов темы — уравнения вида $f(x)^{g(x)} = h(x)$. Скользкость состоит в трудности, связанной с областью определения левой части. И чтобы не скользить, надо сразу уяснить себе, что необходимо рассмотреть два случая: *либо те x , для которых $f(x) > 0$; либо те, для которых $f(x) = 0, g(x) > 0$* . Такова твердая почва, которую гарантирует добрый старый школьный учебник. Если же при решении такого, например, уравнения $x^{x+3} = x^2$ при подстановке значения $x = -1$ получится верное равенство $(-1)^2 = 1$, то $x = -1$ мы имеем право корнем всё равно не считать. Но можем и считать. Ни в том, ни в другом случае ошибки не будет.

Цивилизованное решение уравнения $f(x)^{g(x)} = h(x)$ состоит в логарифмировании обеих частей равенства при $f(x) > 0$ и отдельного рассмотрения случая $f(x) = 0$.

12. Решить уравнение $x^{x^2-6x+5} = x^{12}$.

◀ При $x = 0$ функция, стоящая в левой части, определена и равна 0, правая часть также равна 0, значит $x_1 = 0$ — корень уравнения.

Пусть теперь $x > 0$. Логарифмируя по основанию 10, получим $(x^2 - 6x + 5) \lg x = 12 \lg x$; отсюда 1) $\lg x = 0$, $x_2 = 1$; 2) $x^2 - 6x + 5 = 12 \Rightarrow x_3 = -1$, $x_4 = 7$. Корень $x_3 = -1$ надо отбросить как не удовлетворяющий условию $x > 0$. ►

● **Ответ:** 0; 1; 7.

Переходим теперь к экстремальным методам решения логарифмических и показательных уравнений.

13. Решить уравнение $8^x(3x + 1) = 4$.

◀ Слева стоит возрастающая функция, поэтому корень (если он есть) может быть только один. Угадать его нетрудно: $x = 1/3$. Это, собственно, всё. ►

● **Ответ:** $1/3$.

Классика жанра «угадай корень» — уравнение $3^x + 4^x = 5^x$. Но мы разберем другой пример из многочисленного потомства, которое дало это «почти египетское» (ведь его единственный корень $x = 2$) уравнение.

14. Решить уравнение $\lg(x^3 + x) = \log_2 x$

◀ Заменим $\log_2 x = y$, тогда $2^y = x$, и поскольку $\lg(x^3 + x) = y$, избавляясь от логарифма, имеем уравнение $8^y + 2^y = 10^y$. Сокращая на положительную величину 2^y , получаем $4^y + 1 = 5^y$. Что дальше, ясно?

Угадать корень можно: это $y = 1$. После деления на 5^y имеем

$$\left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1.$$

Функция $f(y) = (4/5)^y + (1/5)^y$ строго убывающая как сумма двух убывающих функций, значит, уравнение $f(y) = 1$ может иметь не более одного корня. Если $y = 1$, то $x = 2$. ►

🔍 **Ответ:** 2.

А вот — одно из самых молодых и существенно более хитроумных изобретений того же рода.

15. Решить уравнение

$$\log_2 x \log_5(x+3) + \log_3(x+1) \log_4(x+2) = 2 \log_3(x+1) \log_5(x+3).$$

◀ Неясность преобразований, которые следует предпринять, заставляет хотя бы попытаться подобрать корень — мы уже знаем, что это может оказаться не вовсе бесполезным. Будем считать, что значение $x = 2$ находится без особого труда. Попробуем доказать, что других корней нет (хотя заранее мы в этом, конечно, уверены быть не можем; откуда ей взяться, этой уверенности?)

Перепишем уравнение иначе — подготовим его к тонкой операции:

$$\begin{aligned} & \log_2 x \log_5(x+3) - \log_3(x+1) \log_5(x+3) = \\ & = \log_3(x+1) \log_5(x+3) - \log_3(x+1) \log_4(x+2), \end{aligned}$$

$$\log_5(x+3)(\log_2 x - \log_3(x+1)) = \log_3(x+1)(\log_5(x+3) - \log_4(x+2)).$$

Кажется, момент настал. Пусть вначале $x > 2$; тогда множители $\log_5(x+3)$ и $\log_3(x+1)$ положительны, и правдоподобным кажутся неравенства

$$\begin{cases} \log_2 x > \log_3(x+1), \\ \log_5(x+3) < \log_4(x+2). \end{cases}$$

Если оба предположения подтвердятся, это будет означать, что при $x > 2$ корней у уравнения нет, поскольку его левая часть положительна, а правая — отрицательна.

Справедливость этих неравенств следует из рассмотрения графиков (рис. 34 а) и б)).

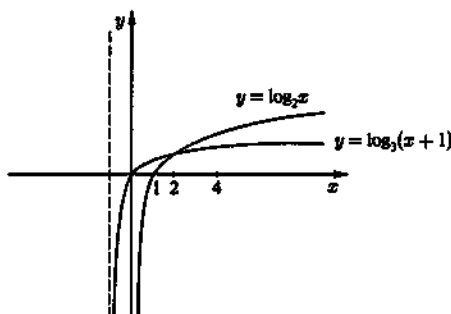


Рис. 34а

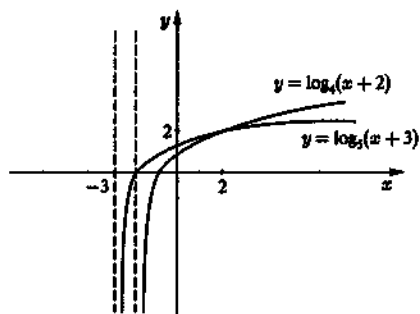


Рис. 34б

Для строгого доказательства приходится исследовать соответствующую функцию.

Преобразуем неравенство $\log_2 x > \log_3(x+1)$ к равносильному виду; имеем цепочку:

$$\log_2 x > \log_3(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_x 2} > \frac{\log_x(x+1)}{\log_x 3} \Leftrightarrow \log_2 3 > \log_x(x+1)$$

(напоминаем: $x > 2$).

Вот и вылезла наружу нужная функция $f(x) = \log_x(x+1)$, уже знакомая нам по примеру 17 из предыдущего параграфа. Мы знаем, что она убывает на рассматриваемом промежутке, значит $f(2) > f(x)$, т. е.

$$\log_2 3 > \log_x(x+1).$$

Аналогично устанавливается справедливость неравенства

$$\log_5(x+3) < \log_4(x+2).$$

Пусть теперь $0 < x < 2$. Тогда имеют место неравенства противоположного знака, т. е.

$$\begin{cases} \log_2 x < \log_3(x+1), \\ \log_5(x+3) > \log_4(x+2), \end{cases}$$

что опять-таки означает отсутствие корней у уравнения. Итак, $x = 2$. ►

☛ **Ответ:** 2.

16. Решить уравнение $x^{x^4} = 4$.

◀ Пусть $x^4 = y$, тогда уравнение имеет вид: $x^y = 4$. Логарифмируя оба равенства, получим

$$\begin{cases} 4 \lg x = \lg y, \\ y \lg x = \lg 4 \end{cases}$$

и отсюда $4 \lg 4 = y \lg y$. Корень $y = 4$ очевиден, а других нет, поскольку функция $y \lg y$ возрастающая как произведение двух возрастающих.

Уравнение $x^4 = 4$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$.

Считать ли корнем $x = -\sqrt{2}$ — вопрос, как мы знаем, почти философский. С одной стороны, мы *имеем право не считать* это значение корнем, а с другой — *можем и считать*, поскольку тогда $x^4 = 4$ и $(-\sqrt{2})^4 = 4$. ►

☞ **Ответ:** $\sqrt{2}$.

17. Решить уравнение

$$x \cdot 2^{1/x} + \frac{2^x}{x} = 4.$$

◀ Очевидно, корнем может быть только $x > 0$, а потому оба слагаемых в левой части положительны; применим неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Имеем

$$x \cdot 2^{1/x} + \frac{2^x}{x} \geq 2\sqrt{2^{1/x} \cdot 2^x} = 2 \cdot 2^{(1/2)(x+1/x)} \geq 2 \cdot 2^{(1/2) \cdot 2} = 4,$$

поскольку $x + 1/x \geq 2$.

Значит, левая часть не меньше 4. Таким образом, равенство возможно только если $x + 1/x = 2$ и $a = b$, т.е. при

$$x \cdot 2^{1/x} = \frac{2^x}{x}.$$

При $x = 1$ оба условия удовлетворяются. ►

☞ **Ответ:** 1.

18. Решить уравнение $2^x = 3x - 1$.

◀ Если нарисовать графики левой и правой частей уравнения, можно предположить, что уравнение имеет два корня и найти их: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Строгое доказательство того, что других корней нет? В данном случае оно скорее всего

будет использовать довольно серьезное утверждение из области Математического Анализа — теорему Ролля (нам уже приходилось призывать ее на помощь в § 13) — простой монотонности недостаточно. ►

19. Решить уравнение $(4^x + 2)(2 - x) = 6$.

◀ И это уравнение приходится решать подбором; всё же корни можно угадать: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$. Но есть ли еще?

Перепишем уравнение так:

$$\frac{6}{4^x + 2} = 2 - x,$$

и рассмотрим функцию

$$y = \frac{6}{4^x + 2} + x - 2$$

при $x < 2$ (другие значения x корнями уравнения быть не могут).

Производная

$$y' = -\frac{6 \cdot 4^x \ln 4}{(4^x + 2)^2} + 1 = \frac{(4^x + 2)^2 - 4^x \cdot 6 \ln 4}{(4^x + 2)^2}.$$

Уравнение $y' = 0$ после преобразований принимает вид

$$4^{2x} + 4(1 - 3 \ln 2)4^x + 4 = 0.$$

Оно, как квадратное относительно 4^x , имеет не более двух корней (а два точно имеет, поскольку дискриминант положителен — проверьте, если не верите). Значит, функция не может обращаться в нуль более трех раз, и корней, отличных от найденных, уравнение не имеет. ►

☛ **Ответ:** 0; 1/2; 1.

20. Решить уравнение $2^{x-1} = 1 + \log_2 x$.

◀ Поскольку уравнение содержит взаимно обратные операции, возникает предположение, что решение должно использовать соображения, связанные с взаимно обратными функциями. Рассмотрим функцию $y = 2^{x-1}$; обратная ей находится из условия $x - 1 = \log_2 y$, т. е. $x = 1 + \log_2 y$. Таким образом, нам, как уже бывало, надо найти точки совпадения значений двух взаимно обратных строго возрастающих функций. Мы знаем, что это может иметь место только на прямой $y = x$, т. е. исходное уравнение равносильно уравнению $2^{x-1} = x$. Как и в примере 18, это уравнение имеет не более двух корней, которые находятся подбором: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. ►

☛ **Ответ:** 1; 2.

Особое место занимают уравнения *смешанного типа*, поскольку теперь можно составить четырехкомпонентную смесь вида: радикалы-модули-тригонометрия-логарифмы.

21. Решить уравнение $\log_{\sin x} 2 + \log_{\cos x} 2 + \log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\cos x} 2 = 0$.

◀ Оставляя проверку ограничений, связанных с областью определения, на потом, имеем:

$$\frac{1}{\log_2 \sin x} + \frac{1}{\log_2 \cos x} + \frac{1}{\log_2 \sin x \cdot \log_2 \cos x} = 0,$$

откуда

$$\log_2 \cos x + \log_2 \sin x + 1 = 0, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}, \quad \sin 2x = 1$$

и $x = \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Все найденные значения принадлежат ОДЗ. ▶

✎ **Ответ:** $x = \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

22. Решить уравнение

$$\lg x + \frac{1}{\lg x} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x).$$

◀ Воспользуемся неравенством

$$\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2.$$

Если $a > 0$, т.е. $\lg x > 0, x > 1$, то левая часть равенства строго больше 2, правая же — не больше 2, поскольку

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2.$$

Значит, при $x > 1$ уравнение решений не имеет. Пусть теперь $\lg x < 0$, т.е. $0 < x < 1$. Тогда

$$\lg x + \frac{1}{\lg x} < -2, \quad \text{а} \quad \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \geq -2.$$

Таким образом, и в этом случае решений нет. (Случай $\lg x = 0$ невозможен.) ▶

✎ **Ответ:** $\emptyset$.

23. Решить уравнение

$$\log_3 \left| \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right| \cdot \log_4 (x^2 - 2x - 2) = \sqrt{4x + 3\pi} \cdot \log_5 (x^2 - 2x - 2).$$

◀ Перепишем уравнение так:

$$\log_3 \left| \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right| \cdot \log_4 (x^2 - 2x - 2) \cdot \log_4 5 = \sqrt{4x + 3\pi} \cdot \log_4 (x^2 - 2x - 2),$$

откуда:

$$1) \log_4 (x^2 - 2x - 2) = 0;$$

$$2) \log_3 \left| \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right| \cdot \log_4 5 = \sqrt{4x + 3\pi}.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, оба принадлежащие ОДЗ.

Что касается второго уравнения, то, поскольку $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$, левая часть заведомо неположительна, тогда как правая неотрицательна. Значит, равенство возможно только в случае

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \pm \sqrt{2}, \\ 4x + 3\pi = 0, \end{cases}$$

откуда $x = -3\pi/4$. ▶

🔑 **Ответ:** $-3\pi/4$; -1 ; 3 .

24. Решить уравнение

$$9^{\arcsin(2x+1)} + \log_3(2 \arcsin(2x+1)) - 3^{\arccos(6x+3)} + \log_{1/3} \arccos(6x+3) = 0.$$

◀ Пусть $\arcsin(2x+1) = \alpha$, $\arccos(6x+3) = \beta$; уравнение можно переписать в виде

$$3^{2\alpha} + \log_3(2\alpha) = 3^\beta + \log_3 \beta.$$

Поскольку функция $f(t) = 3^t + \log_3 t$ — возрастающая как сумма двух возрастающих функций, равенство $f(2\alpha) = f(\beta)$ возможно только при $2\alpha = \beta$. Таким образом, мы имеем уравнение

$$2 \arcsin(2x+1) = \arccos(6x+3).$$

Вычисляя косинус от обеих частей равенства, после преобразований получаем уравнение $4x^2 + 7x + 2 = 0$, корни которого $x_{1,2} = (-7 \pm \sqrt{17})/8$.

При проверке подходит только корень $x = (-7 + \sqrt{17})/8$ (второй корень меньше $-1/2$, тогда $\arcsin(2x + 1) < 0$ и соответствующий логарифм не определен). ►

☛ **Ответ:** $(-7 + \sqrt{17})/8$.

Что можно сказать о логарифмических и показательных системах? Хорошо, если они сводятся к таким алгебраическим, которые удастся решить.

25. Решить систему

$$\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$$

◀ Пусть $2^x = a$, $3^y = b$; тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a^2 + 5a - 2b = 2, \\ 2b^2 + a + 2b = 1. \end{cases} \quad (*)$$

Вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2. Мы получим

$$a^2 - 4b^2 + 3a - 6b = 0 \quad \text{или} \quad (a - 2b)(a + 2b) + 3(a - 2b) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} a = 2b, \\ a + 2b + 3 = 0. \end{cases}$$

Вторая возможность исключена, так как $a, b > 0$. Подставляя $a = 2b$ во второе уравнение системы (*), получим уравнение $2b^2 + 4b - 1 = 0$, положительный корень которого $b = (\sqrt{6} - 2)/2$; тогда $a = \sqrt{6} - 2$. ►

☛ **Ответ:** $x = \log_2(\sqrt{6} - 2)$, $y = \log_3((\sqrt{6} - 2)/2)$.

26. Решить систему

$$\begin{cases} \log_{2/3}^2 x + \log_{2/3}^2 y - \log_{2/3}^2(x + y) = 1, \\ \log_{3/2} x \cdot \log_{3/2} y + \log_{3/2}(x + y) = 0. \end{cases}$$

◀ Прежде всего, перепишем систему так:

$$\begin{cases} \log_{2/3}^2 x + \log_{2/3}^2 y - \log_{2/3}^2(x + y) = 1, \\ \log_{2/3} x \cdot \log_{2/3} y - \log_{2/3}(x + y) = 0, \end{cases}$$

и, заменив

$$\log_{2/3} x = a, \quad \log_{2/3} y = b, \quad \log_{2/3}(x + y) = c,$$

приведем ее к виду

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + 1, \\ ab = c. \end{cases}$$

Сложив первое уравнение с удвоенным вторым, получим

$$(a + b)^2 = (c + 1)^2,$$

откуда

$$\begin{cases} a + b = c + 1, \\ a + b = -c - 1. \end{cases}$$

Перепишем уравнение $a^2 + b^2 = c^2 + 1$ так:

$$(a - c)(a + c) = (1 - b)(1 + b). \quad (1)$$

Тогда если

$$a + b = c + 1, \quad \text{т.е.} \quad a - c = 1 - b, \quad \text{то} \quad a + c = 1 + b.$$

Из двух последних равенств находим $a = 1$ (и тогда $x = 2/3$) и $b = c$ (что означает $x = 0$). Итак, первое уравнение совокупности решений не дает. Если теперь

$$a + b = -c - 1 \quad \text{или} \quad a + c = -1 - b,$$

то из равенства (1) получаем $a - c = b - 1$. Тогда $a = -1$, $b = -c$. Отсюда $x = 3/2$, тогда

$$\log_{2/3} y = -\log_{2/3} \left(\frac{3}{2} + y \right) \quad \text{и} \quad y \left(y + \frac{3}{2} \right) = 1.$$

Положительный корень этого уравнения $y = 1/2$. ►

☛ **Ответ:** $(3/2; 1/2)$.

В практике экзамена не столь уж часты системы чисто показательные или чисто логарифмические, — преобладают системы смешанного характера.

27. Решить систему

$$\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$$

◀ Сложив уравнения, получим

$$x(1 + \log_2 2) = y(2 + \log_2 3).$$

Но

$$1 + \log_2 72 = \log_2 144 = 2 \log_2 12 = 2(2 + \log_2 3),$$

значит, $2x = y$. Исключив y из первого уравнения, получим

$$x + \log_2 2x = 2x \log_2 3 + \log_2 x \quad \text{или} \quad x + 1 + \log_2 x = 2x \log_2 3 + \log_2 x,$$

откуда

$$x = \frac{1}{2 \log_2 3 - 1} = \log_{9/2} 2.$$

Тогда $y = 2 \log_{9/2} 2$. ►

❖ **Ответ:** $(\log_{9/2} 2; 2 \log_{9/2} 2)$.

28. Решить систему

$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg x + \lg y, \\ \sin \pi(x+y) = \sin \pi x + \sin \pi y. \end{cases}$$

◀ Из первого уравнения следует, что $x+y = xy$; тогда второе уравнение принимает вид $\sin \pi xy = \sin \pi x + \sin \pi y$. Имеем

$$2 \sin \frac{\pi xy}{2} \cos \frac{\pi xy}{2} = 2 \sin \frac{\pi xy}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2}.$$

Отсюда:

$$1) \sin \frac{\pi xy}{2} = 0 \Rightarrow xy = 2n;$$

$$2) \cos \frac{\pi xy}{2} = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \Rightarrow xy = \pm(x-y) + 4k, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Займемся отдельно каждым случаем.

$$1) \begin{cases} x+y = 2n, \\ xy = 2n. \end{cases}$$

Решения этой системы находятся из вспомогательного квадратного уравнения $t^2 - 2nt + 2n = 0$. Поскольку

$$D = 4n^2 - 8n = 4n(n-2) \geq 0$$

при всех целых n , кроме $n = 1$, имеем

$$x = n \pm \sqrt{n^2 - 2n}, \quad y = n \mp \sqrt{n^2 - 2n}.$$

Не забудем про ОДЗ, которая требует положительности неизвестных. Это условие дает $n > 0$, т. е. $n \geq 2$. Поскольку в этом случае $n > \sqrt{n^2 - 2n}$, окончательно:

$$x = n \pm \sqrt{n^2 - 2n}, \quad y = n \mp \sqrt{n^2 - 2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

$$2) \begin{cases} x+y = \pm(x-y) + 4k, \\ x+y = xy. \end{cases}$$

Если $x + y = x - y + 4k$, то $x = 2k/2k - 1$, $y = 2k$.

Если $x + y = -(x - y) + 4k$, то $x = 2k$, $y = 2k/(2k - 1)$. При этом $k \in \mathbb{N}$. ►

☛ **Ответ:** $x = n \pm \sqrt{n^2 - 2n}$, $y = n \mp \sqrt{n^2 - 2n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
 $x = 2k/(2k - 1)$, $y = 2k$; $x = 2k$, $y = 2k/(2k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

29. Найти положительные решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^y = y^x. \end{cases}$$

◀ Понятно, что если $x = y$, то второе уравнение удовлетворяется. Тогда из первого находим $x = y = 1/\sqrt{2}$.

Пусть теперь $x \neq y$, положим для определенности $x < y$; кроме того, из первого уравнения следует, что $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1$ (ОДЗ требует $x, y > 0$). Прологарифмировав второе уравнение, получим

$$y \lg x = x \lg y \quad \text{или} \quad y(-\lg x) = x(-\lg y).$$

Такая запись обусловлена тем, что оба логарифма отрицательны. Ввиду того, что $y > x$, также и $\lg y > \lg x$, откуда $-\lg x > -\lg y$; значит,

$$y(-\lg x) > x(-\lg y)$$

и решений при $x \neq y$ нет. ►

☛ **Ответ:** $x = y = 1/\sqrt{2}$.

И как бы мы ни смотрели на это, следующее творение рук человеческих — тоже логарифмическая система:

30. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{xy}{9} + \frac{xz}{25} - \frac{yz}{49} = 1 + 2 \ln \frac{7x}{15}, \\ \frac{xy}{9} + \frac{yz}{49} - \frac{xz}{25} = 1 + 2 \ln \frac{5y}{21}, \\ \frac{yz}{49} + \frac{xz}{25} - \frac{xy}{9} = 1 + 2 \ln \frac{3z}{35}. \end{cases}$$

◀ Складывая первые два уравнения, получим

$$\frac{2xy}{9} = 2 + 2 \ln \frac{7x \cdot 5y}{15 \cdot 21} \quad \text{или} \quad \frac{xy}{9} = 1 + \ln \frac{xy}{9}.$$

Заменяя $xy/9 = t$, приходим к уравнению $t = 1 + \ln t$ или $t - 1 = \ln t$.

Корень $t = 1$ очевиден, а его единственность следует из рассмотрения графиков функций $u = t - 1$ и $u = \ln t$ на плоскости $(t; u)$ плюс дополнительное соображение: прямая $u = t - 1$ — касательная к графику функции $u = \ln t$ в точке $t = 1$. Действительно, уравнение $u - u_0 = u'_0(t - t_0)$ имеет в данном случае вид

$$u - 0 = \frac{1}{1}(t - 1), \quad \text{т.е.} \quad u = t - 1.$$

Итак, $xy = 9$. Аналогичным образом, складывая второе и третье уравнения, а потом — первое и третье, мы найдем $yz = 49$ и $xz = 25$. Решив эту систему-следствие, не забыв про положительность неизвестных, побывавших под логарифмом, получим ответ:

$$x = \frac{15}{7}, \quad y = \frac{21}{5}, \quad z = \frac{35}{3}. \quad \blacktriangleright$$

🔍 **Ответ:** $x = 15/7$, $y = 21/5$, $z = 35/3$.

Да, абитуриентская математика не брезгает «брать на испуг», т.е. использовать в своей деятельности задачи, на которых читается: «Входящие, оставьте упования!» (Или: «Не влезай, убьет!») Вот еще два примера, относящиеся к этой категории.

31. Решить уравнение

$$\frac{4}{25^{-x} + 8 + 16 \cdot 25^x} - \frac{5^x}{1 + 4 \cdot 25^x} + \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{23}}{5} + \frac{1}{100}.$$

◀ Замена $5^{-x} + 4 \cdot 5^x = 1/y$ позволяет преобразовать уравнение к квадратному

$$4y^2 - y + c = 0, \quad \text{где} \quad c = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{23}}{5} - \frac{1}{100}.$$

Не будем торопиться с нахождением дискриминанта. Присмотримся к уравнению. Во-первых, $c < 0$ и $b = -1 < 0$, поэтому уравнение имеет два корня, причем один из них положительный, а другой — отрицательный (и мы сразу его отбрасываем, поскольку $y > 0$). Но этого мало; сумма корней $y_1 + y_2 = 1/4$ и так как $y_1 < 0$, то $y_2 > 1/4$. С другой стороны,

$$y = \frac{1}{5^{-x} + 4 \cdot 5^x},$$

и по неравенству

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad y = \frac{1}{5^{-x} + 4 \cdot 5^x} \leq \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Полученное противоречие показывает, что исходное уравнение корней не имеет. ►

☛ **Ответ:** $\emptyset$.

32. Решить систему

$$\begin{cases} 8 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}(3 \log_8 x + \log_5(y+1)^3)} - 7 \cdot \sqrt[7]{\frac{1}{4}(\log_8 x^3 + 3 \log_5(y+1))} = 1, \\ 11 \cdot \sqrt[4]{\log_8 x^3 \cdot \log_5(y+1)} - 5 \cdot \sqrt[5]{\log_8 x \cdot \log_5(y+1)^3} = 6. \end{cases}$$

◀ Пусть

$$y^{14} = \frac{3}{4}(\log_8 x + \log_5(y+1)), \quad z^{20} = 3 \log_8 x \cdot \log_5(y+1);$$

тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 8y^7 - 7y^2 = 1, \\ 11z^5 - 5z^4 = 6. \end{cases}$$

Ее единственное решение $y = z = 1$ (подробности можно найти в § 4, часть первая — пример 38). Тогда, обозначая, в свою очередь, $\log_8 x = u$, $\log_5(y+1) = v$, получаем систему

$$\begin{cases} u + v = \frac{4}{3}, \\ uv = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ее решения $(1; 1/3)$ и $(1/3; 1)$. Отсюда $x_1 = 8$, $y_1 = \sqrt[3]{5} - 1$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$. ►

☛ **Ответ:** $x_1 = 8$, $y_1 = \sqrt[3]{5} - 1$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$.

Впрочем, как бы мы ни отнеслись к этим задачам, для их решения нужно проявить знание математики. К категории «смесь» относятся и следующие два примера; добавим их в коллекцию — как диагноз: нигде, кроме как на вступительных экзаменах, не встретишь такое:

33. Решить уравнение

$$3 \log_{27} 3^{x^2-2x+2} = \left[\sin^2 \left(x - 1 + \frac{\pi}{4} \right) \right]'$$

◀ В переводе на русский язык, нам предлагается решить уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 2 \sin \left(x - 1 + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x - 1 + \frac{\pi}{4} \right)$$

или

$$x^2 - 2x + 2 = \sin \left(2x - 2 + \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е.

$$(x - 1)^2 + 1 = \cos 2(x - 1).$$

Нам понятно, что равенство возможно только при $x = 1$, поскольку

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + 1 \geq 1, \\ \cos 2(x - 1) \leq 1. \end{cases}$$

☛ **Ответ:** $x = 1$.

Заметим, однако, что непосредственная подстановка найденного значения в исходное равенство не даст желаемого результата, если мы сначала подставим $x = 1$ в правую часть, а потом вычислим производную. Нужно сначала вычислить производную, а потом уже подставить в нее $x = 1$. Это значит, что формулировка задачи некорректна? Но это не наша забота: мы должны придать смысл тому, что нам предложено. Ведь обращаться с претензиями некуда. ►

34. Решить уравнение

$$\log_x (2x - 1)^2 + \log_x \left(\frac{1}{2} - x \right)^3 = 2 \int_{1/4}^{3/4} (4y - 1) dy.$$

◀ Видно, что ОДЗ определяется условиями $1 - 2x > 0$, $x > 0$, $x \neq \pm 1$; таким образом имеем уравнение

$$\log_x (1 - 2x) + \log_x \frac{1 - 2x}{8} = 2(2y^2 - y) \Big|_{1/4}^{3/4}$$

или

$$\log_x \frac{(1 - 2x)^2}{8} = 1,$$

откуда

$$1 - 4x + 4x^2 = 8x, \quad \text{т.е.} \quad (2x - 3)^2 = 8.$$

С учетом ОДЗ получаем ответ: $x = 3/2 - \sqrt{2}$.

☛ **Ответ:** $x = 3/2 - \sqrt{2}$.

И здесь: хотя в условии как будто наличествует второе неизвестное — y — искать его не надо (и нельзя). Нет, пусть читатель не думает, что мы сами создали все эти проблемы в примерах 33 и 34: оба они взяты из конкурсной практики. ►

А теперь перейдем к параметрам.

35. Найти все a , при которых уравнение

$$4(x - \sqrt{a \cdot 4^a})x + 4(4^a - 1) + a = 0$$

имеет корни, и определить знаки корней при различных значениях a .

◀ Заметим сразу, что допустимыми являются только $a \geq 0$. Перепишем уравнение в более естественном виде

$$4x^2 - 4\sqrt{a \cdot 4^a} \cdot x + 4^{a+1} + a - 4 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения неотрицателен, если

$$(a - 4)(4^a - 1) \geq 0,$$

т.е. (мы помним, что $a \geq 0$) при $a = 0$ и $a \geq 4$. Если $a = 0$, то $x = 0$. Если $a = 4$, то $x = 16$. Если $a > 4$, то из теоремы Виета следует, что оба корня положительны: выполнены условия

$$x_1 + x_2 = \sqrt{a \cdot 4^a} > 0 \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = 4^a + \frac{a}{4} - 1 > 0. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** Уравнение имеет корни при $a = 0$ и $a \geq 4$. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \geq 4$, то корни положительны.

36. Решить уравнение

$$x^2 \cdot 2^{a\sqrt{x}-x} = x^2 + \sqrt{x} - a.$$

◀ Заменим $\sqrt{x} - a = t$. Тогда

$$x^2 \cdot 2^{-t\sqrt{x}} = x^2 + t.$$

Если $t \geq 0$, то

$$x^2 \cdot 2^{-t\sqrt{x}} \leq x^2, \quad \text{а} \quad x^2 + t \geq x^2.$$

Значит, решение будет только при $t = 0$. Отсюда $x = a^2$, если $a \geq 0$.

Пусть теперь $t < 0$. Тогда

$$x^2 \cdot 2^{-t\sqrt{x}} > x^2, \quad x^2 + t < x^2.$$

Решений нет. ►

☛ **Ответ:** $x = a^2$ при $a \geq 0$; при $a < 0$ решений нет.

37. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2a, \\ x^2 \cdot 2^{\sqrt{2-x}} + 2^{x+4} = 16 \cdot 2^{\sqrt{2-x}+2y} + x^2 \cdot 2^x \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти это решение.

◀ Первое уравнение имеет несомненный геометрический смысл. Если рассмотреть на плоскости xOy точки $A(-a; 0)$, $M(x; y)$, $B(a; 0)$, то

$$MA = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad MB = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad AB = 2a$$

и таким образом,

$$MB - MA = AB \quad \text{или} \quad MB = MA + AB.$$

Отсюда следует, что точки A , B и M лежат на одной прямой, в данном случае — на оси Ox , т. е. во-первых, $y = 0$; что касается абсциссы точки M , то в случае $a > 0$, точка M лежит слева от точки A , т. е. $x \leq -a$, а случае $a < 0$, наоборот, $x \leq a$.

Итак, при $a > 0$ решением первого уравнения является любая пара чисел вида $(x; 0)$, где $x \leq -a$; при $a < 0$ — пара того же вида $(x; 0)$, где $x \leq a$. При $a = 0$ первое уравнение является тождеством при любых значениях неизвестных.

Второе уравнение после подстановки в него $y = 0$ раскладывается на множители и приводится к виду

$$x^2(2^{\sqrt{2-x}} - 2^x) = 16(2^{\sqrt{2-x}} - 2^x),$$

что дает два корня: $x = -4$ и $x = 1$ ($x = 4$ не входит в ОДЗ, определяемое условием $2 - x \geq 0$).

Заметим, что если $a = 0$, то мы получаем как минимум два решения системы: $(-4; 0)$ и $(1; 0)$, т. е. это значение параметра не удовлетворяет условию.

Если $a > 0$, то нам подойдут те значения параметра, при которых один корень: $x = -4$ или $x = 1$ будет удовлетворять условию $x \leq -a$, а второй нет. Ясно, что для этого необходимо взять $a \leq 4$. И в этом случае единственным решением системы будет $(-4; 0)$.

Аналогично в случае $a < 0$, когда корни должны удовлетворять условию $x \leq a$, надо потребовать $a \geq -4$, тогда опять же решением системы будет только пара $(-4; 0)$. ►

☛ **Ответ:** $a \in [-4; 0) \cup (0; 4]$; $x = -4$, $y = 0$.

38. Найти все a и b , при которых равенство $ae^x + b = e^{ax+b}$ выполняется при всех x .

◀ Подставив в данное равенство последовательно значения $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, получим систему

$$\begin{cases} a + b = e^b, \\ ae + b = e^a e^b, \\ ae^{-1} + b = e^{-a} e^b, \end{cases}$$

которую можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} ae(1 - e^{a-1}) = b(e^a - 1), \\ a(1 - e^{a-1}) = b(e^a - 1), \end{cases}$$

откуда следует, что $ae(1 - e^{a-1}) = a(1 - e^{a-1})$.

Таким образом, либо $a = 0$, что невозможно, так как тогда $b = e^b$ (а графики функций $y = x$ и $y = e^x$ не имеют общих точек), либо $e^{a-1} = 1$, откуда $a = 1$. Тогда $b + 1 = e^b$.

Это уравнение также исследуется при помощи графика. Корень $b = 0$ очевиден, а других нет. Дополнительным аргументом служит то, что прямая $y = x + 1$ является касательной к графику функции $y = e^x$ при $x = 0$, как это следует из уравнения касательной $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, которая в данном случае принимает вид $y - e^0 = e^0(x - 0)$, т.е. $y = x + 1$. (Уравнение $b + 1 = e^b$ равносильно уравнению $t - 1 = \ln t$, рассмотренному нами в примере 30). ►

☛ **Ответ:** $a = 1$, $b = 0$.

39. Найти все положительные значения параметров a и b , при которых системы

$$\begin{cases} \log_3 x^2 = b - \log_3 y, \\ (x + y)^2 = a^2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 2x + 2y + a^2, \end{cases}$$

имеют одинаковое число решений.

◀ Первую систему можно привести к виду

$$\begin{cases} |x|y = c, \\ x + y = \pm a, \end{cases}$$

где $c = 3^b$, или

$$\begin{cases} y = \frac{c}{|x|}, \\ y = -x \pm a. \end{cases}$$

Построив (самостоятельно) графики, видим, что эта система всегда имеет не менее двух решений; три решения она имеет при условии касания прямой $y = -x + a$ и гиперболы $y = c/x$, что означает $a = 2\sqrt{c}$ (требуем равенства нулю дискриминанта уравнения $-x^2 + ax = c$); и она имеет 4 решения при $a > 2\sqrt{c}$.

Вторая система имеет равносильный вид

$$\begin{cases} x + y = \pi n, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Семейство прямых вида $y = -x + \pi n$ при $a = 0$ имеет три пересечения с окружностью

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = a^2 + 2$$

(прямая $y = -x$ касается окружности, а прямая $y = -x + \pi$ пересекает в двух точках; остальные прямые окружность не пересекают). Значит, при $a > 0$ будет уже как минимум 4 решения. Нам нужно, чтобы их больше и не было. Гарантией этого служит условие $r < d$, где $r = \sqrt{a^2 + 2}$ (радиус нашей окружности), d — расстояние от начала координат до прямой $y = -x + 2\pi$ (эта прямая ближе к окружности, чем $y = -x - \pi$; когда при увеличении a окружность коснется этой прямой, будет уже 5 решений). Но $d = \pi\sqrt{2} - \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 < 2\pi(\pi - 2)$, т. е. при

$$2\sqrt{c} < a < \sqrt{2\pi(\pi - 2)}$$

обе системы имеют по 4 решения. ►

✎ **Ответ:** Параметры должны удовлетворять условию

$$2\sqrt{3^b} < a < \sqrt{2\pi(\pi - 2)}.$$

40. Найти все a , при которых уравнение

$$3x^2 + 2ax + 4a - 3 - 2 = \left| \frac{a - 2}{x + a} \right|$$

имеет ровно два различных корня на отрезке $[-4; 0]$.

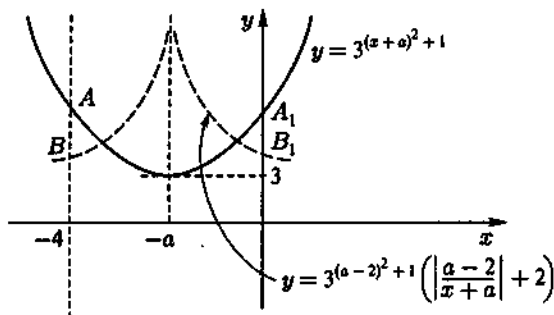


Рис. 35

◀ Выделим полные квадраты и перепишем уравнение так:

$$3^{(x+a)^2+1} = 3^{(a-2)^2} \left(\left| \frac{a-2}{x+a} \right| + 2 \right).$$

Подобные уравнения нам встречались — в них всегда нужно угадывать корни. Поэтому обращаемся к рассмотрению графиков левой и правой части (рис. 35).

Заметим, что оба графика симметричны относительно прямой $x = -a$; то же можно сказать и о точках их взаимного пересечения. Поэтому если $a \leq 0$, то обе эти точки не могут находиться на отрезке $[-4; 0]$.

Итак, $a > 0$. И сразу заметим, что $a < 4$ (левая точка пересечения не должна уйти из отрезка $[-4; 0]$).

Чтобы требование задачи было выполнено, надо наложить два условия: точки A и A_1 пересечения графика правой части с прямыми $x = -4$ и $x = 0$ должны лежать не выше точек B и B_1 пересечения с теми же прямыми графика левой части. Вычисляя координаты этих точек, получаем два неравенства:

$$1) \quad 3^{(-4+a)^2+1} \geq 3^{(a-2)^2} \left(\left| \frac{a-2}{-4+a} \right| + 2 \right);$$

$$2) \quad 3^{a^2+1} \geq 3^{(a-2)^2} \left(\left| \frac{a-2}{a} \right| + 2 \right).$$

Решим сначала более простое второе неравенство. Оно приводится к виду

$$3^{4a-3} \geq \left| \frac{a-2}{a} \right| + 2 \quad \text{или} \quad 3^{4a-3} \geq \left| 1 - \frac{2}{a} \right| + 2.$$

Заметим, что $a = 2$ условию задачи не удовлетворяет: получается уравнение

$$3^{(x+2)^2+1} = 2,$$

которое не имеет решений в силу того, что левая часть больше 2 (и даже 3).

Если $a > 2$, то имеем

$$3^{4a-3} \geq 3 - \frac{2}{a}.$$

Это неравенство, очевидно, выполнено при $a > 2$, поскольку левая часть больше 3, а правая — не больше 3. Таким образом, $a \in (2; 4)$.

Пусть теперь $0 < a < 2$. Тогда получаем неравенство

$$3^{4a-3} \geq \frac{2}{a} + 1.$$

При $a = 1$ левая часть равна правой и неравенство выполнено при $1 \leq a < 2$.

Переходим к неравенству 1), т. е.

$$3^{(a-4)^2+1} \geq 3^{(a-2)^2} \left(\left| \frac{a-2}{a-4} \right| + 2 \right)$$

или

$$3^{13-4a} \geq \left| \frac{a-2}{a-4} \right| + 2.$$

При $a \in (2; 4)$ получаем

$$3^{13-4a} \geq 1 - \frac{2}{a-4}.$$

Обе части совпадают при $a = 3$, а неравенство верно при $a \in (2; 3]$.

Если $1 \leq a < 2$, то приходим к неравенству

$$3^{13-4a} \geq 3 + \frac{2}{a-4},$$

которое выполнено на всем интервале $[1; 2)$, поскольку левая часть заключена в интервале $(3^5; 3^9]$, а правая — в интервале $[2; 7/3)$. ►

✎ **Ответ:** $a \in [1; 2) \cup (2; 3]$.



Привал неустрасимых

Ученик: — Я не успел (сделать домашнее задание).

Учитель: — Не успевают только неуспевающие.

Из воспоминаний А. Д. Блинкова о Второй школе

1. Решите показательные уравнения:

а) $3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}$;

б) $5^{7x} = 7^{5x}$;

$$в) x^{x^2-5x+8} = x^2;$$

$$г) 2^{\frac{3-x}{x+1}} \cdot 5^{\frac{2-x}{x}} = 10;$$

$$д) (26 + 15\sqrt{3})^x - 3(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 3.$$

2. Решите логарифмические уравнения:

$$а) 4(\log_4 x)^2 = \log_2 \frac{x^5}{16};$$

$$б) \log_7(3 - 2x) \log_x(3 - 2x) = \log_7(3 - 2x) + \log_7 x^2;$$

$$в) \log_{x-1} x = \log_{2x-5} x;$$

$$г) \log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2;$$

$$д) \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} x + \log_x(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = \frac{3}{2} + \log_x 2\sqrt{6}.$$

3. а) Найдите x , если известно, что числа

$$\lg 2, \quad \lg(2^x - 1) \quad \text{и} \quad \lg(2^x + 3)$$

— последовательные члены некоторой арифметической прогрессии.

б) При каких x числа

$$\log_3(3^x - 1), \quad \sqrt{6}, \quad \log_3(3^{x+1} - 3)$$

в данном порядке образуют геометрическую прогрессию?

4. Решите показательно-логарифмические уравнения:

$$а) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2^2 x + 1} = 9^{2 - \log_2 x^3};$$

$$б) x \cdot 2^{\log_x 5} = 10;$$

$$в) \log_{13-x^2}(3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x}) = \log_{x+1}(3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x}).$$

$$г) (\log_2 3)^{\log_5(\log_2^2 x) - 1} + 1 = \log_3 6 \cdot (\log_x 2)^{\log_5(\log_2 2)}.$$

5. Решите уравнения «смешанного» типа:

$$а) \log_x \cos x = 0;$$

$$б) \lg \sin x = \cos^2 x;$$

$$в) 4^{\sin x} - 3 \cdot 2^{\sin x + \cos x} + 2 \cdot 4^{\cos x} = 0;$$

$$г) 1 + 2^{\lg x} = 4^{(1/\sqrt{2}) \sin(\pi/4 - x) \cos^{-1} x};$$

$$д) 3 - \log_2(17 - 2^{x^2+1}) = x^2.$$

$$е) \sqrt{4 + 2 \log_2 \left(1 - \frac{8x}{(2x+1)^2} \right)} = \log_2 \frac{2x+1}{2x-1} + 2 \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$ж) 2^x + 4^x + 1 = \sqrt{3(4^x + 16^x + 1)}.$$

$$з) ||x - 5 + \lg x| + \lg x - x| = 2.$$

$$и) |\lg x|^{\sin x} = |\operatorname{ctg} x|^{\cos x}.$$

$$к) (\lg x)^{\lg(\lg x)} \sin^2(\lg x) + (\lg x)^{\lg(\lg x)} \cos^2(\lg x) = 1;$$

$$л) |5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$$

$$м) 2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|};$$

$$н) \sin^2(2^{\sqrt{-x}}) = \frac{1}{2};$$

$$о) \log_{\sin 3x}(\cos x - \cos 2x) = 1.$$

$$п) \log_{\cos x} \left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x \right) = 2.$$

$$р) \cos 2x + \log_4 \left(\frac{1}{2} \sin x \right) + 2 \cos x \log_{1/2} \sin x = 2 \cos x + \sin^2 x \log_2 \sin^2 x.$$

$$с) \log_{1/5} \left(\sin x - \cos 6x + \frac{2}{3} \right) = \log_{1/5} \left(\sin 3x - \cos 8x + \frac{2}{3} \right)$$

при условии $-4 < x < -2,5$.

6. Решите уравнения, применяя оценки и исследования:

$$а) (\sqrt{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-9}})^x + (\sqrt{\sqrt{x+7} - \sqrt{x-9}})^x = 2^{x+1}.$$

$$б) 2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2.$$

$$в) 3 \cdot 4^x + (3x - 10)2^x + 3 - x = 0.$$

$$г) \log_5(x-1) \log_x 36 = 2.$$

$$д) \log_{12}(\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x}) = \frac{1}{2} \log_9 2x.$$

$$е) x(2^{1-2x} - 1) = 2^{x-2x^2} - 1.$$

$$ж) \log_5(2x-1) \cdot \log_4 \sin \frac{\pi(x-1)}{2} = \log_7(x^2 - 4x + 5) \cdot \log_6(2x-1).$$

$$з) \log_{4\sqrt{x+4y}} \left(4^{\sqrt{x+4y}} + \sqrt{\frac{y\sqrt{x}}{2} + 1} \right) = 3^{-\sqrt{x-4y-4\sqrt{x}}}.$$

$$\text{и)} \log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

$$\text{к)} (4x^3 - 8)(3^{\sin x} - 1) + (2^{x^3} - 4) \sin x = 0.$$

$$\text{л)} 2^{4x-x^2-2} = \log_2 x^2 + \log_x 4.$$

$$\text{м)} 4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

$$\text{н)} e^{-x^2-2x-1} = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

7. Решите систему:

$$\text{а)} \begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y + 8 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} (x + 2y)^{x-y} = 25, \\ 2 \log_5(x + 2y) + x - y = 4. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} (x - 4)(x + 1) = y(y + 5), \\ \log_{x-2}(y + 2) = \frac{x - 2}{y^2}. \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} 2^{x+y+1} + 7 \cdot 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x + y^2} = x + y. \end{cases}$$

$$\text{е)} \begin{cases} \log_2^2(x + y) + \log_{1/2}(x + y) \log_{1/2}(x - 2y) = 2 \log_2^2(x - 2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

$$\text{ж)} \begin{cases} 5 + \log_y x^2 = -\log_{\sqrt{x}} y, \\ \frac{(\log_5 y)^2}{\log_5 x} = 6 - 3^{x^2 y} - \log_{25} y. \end{cases}$$

$$\text{з)} \begin{cases} 2^{x+y} \cdot 3^y \cdot 6^{x+y} \cdot 9^x = 144, \\ \log_{0,2x+0,1y}(27^x \cdot 9^y + 4^{x+y}) \cdot \log_5(0,2x + 0,1y) = 2. \end{cases}$$

$$\text{и)} \begin{cases} \frac{\log_3(2 - 3x - 4y)}{\log_3(x - 2y - 4)} = \frac{\log_5(2x - y - 5)}{\log_5(1 - 2x - 3y)}, \\ 2y^2 + xy + 2x = x^2 + y + 1. \end{cases}$$

$$\kappa) \begin{cases} x - y + \log_2 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

$$\lambda) \begin{cases} 2^x = 3y - 1, \\ 2^y = 3x - 1. \end{cases}$$

$$\mu) \begin{cases} \sqrt{\log_{4x^2-x} 5} \cdot \log_5 \frac{25}{4x^2-x} = 1, \\ \sin x > \operatorname{ctg} 2x. \end{cases}$$

$$\eta) \begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{3y+1} \right|, \\ (6y^2 + 2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1, \\ |y| \leq 1. \end{cases}$$

$$\omicron) \begin{cases} x^{2/3} = \sqrt[15]{y^8}, \\ y^{2/3} = \sqrt[15]{x^2}, \\ z = \sqrt{x} + \sqrt{y}. \end{cases}$$

$$\pi) \begin{cases} 5^{x+1} \cos y + 5^{1-x} \sin y + 2 = 5^{x+1} \sin y - 5^{1-x} \cos y, \\ 5^{x+1} \sin y - 2 \cdot 5^{1-x} \cos y + 4 = 5^{1-x} \sin y + 2 \cdot 5^{1+x} \cos y. \end{cases}$$

$$\rho) \begin{cases} \log_3 18 \sin x - \log_3 3y + |\log_3 \cos x - \log_3 3y| = 1, \\ \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{3y^2} \leq 1. \end{cases}$$

8. При каких a уравнение

$$16^x + a \cdot 8^x - 5 \cdot 4^x + a \cdot 2^x + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

9. Найдите наибольшее целое a , при котором уравнение

$$\operatorname{arctg}(4^x + 9^x + a\sqrt{2} \cdot 6^x) = 0$$

имеет хотя бы один корень.

10. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_{a-6.5}(x^2 + 1) = \log_{a-6.5}(ax - 5x)$$

имеет ровно два различных корня;

11. Определите количество корней уравнения $\log_a x + 1 = x$ в зависимости от a .

12. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения

$$a(2a - 1) \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{1/2}(3 \operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3 \operatorname{tg} x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

имеют одни и те же корни.

13. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение:

а) $2 \cos^2 2^{2x-x^2} = a + \sqrt{3} \sin 2^{2x-x^2+1}$

имеет хотя бы один корень;

б) $(x^2 - (a+1)x + 3(a-2)) \log_{a-x}(2a-x-1) = 0$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-2; 1]$, а вне этого отрезка не имеет корней.

в) $((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24} - 2(x^2+x) \lg a) \lg \left(\frac{36-9a^2}{35} \right) = 0$

имеет по крайней мере два корня, удовлетворяющие условиям $x_1 \leq -1$, $x_2 \geq 0$.

г) $\log_{1/\pi} \left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a-2\pi)|x-2| + 4\pi a} \right) +$
 $- \sqrt{(x-5a+10\pi-34)(|\pi-x|-a+\pi+2)} = 0$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

14. Найдите все a , при которых система

$$\begin{cases} \log_3(y-3) - 2 \log_9 x = 0, \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

15. Найдите все a , при которых каждое решение системы

$$\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1, \end{cases}$$

удовлетворяет условию $x + y > 1$.

16. Решите систему

$$\begin{cases} 2 \cos x + a \sin y = 1, \\ \log_x \sin y = \log_x a \cdot \log_a(2 - 3 \cos x), \\ \log_a z + \log_a \left(\frac{1}{2a} - 1 \right) = 0. \end{cases}$$

при всех значениях параметра a .

17. Найдите все пары $(a; b)$, при которых система

$$\begin{cases} \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b, \end{cases}$$

(где $x > 0$) имеет только одно решение.

Советы и решения

Р 1. а) Логарифмируя по основанию 10, имеем

$$(x-3) \lg 3 = (x-3)(x-4) \lg 5,$$

откуда либо $x = 3$, либо $\lg 3 = (x-4) \lg 5$.

б) Логарифмирование дает $7^x \lg 5 = 5^x \lg 7$ или $(7/5)^x = \log_5 7$.

в) Если держаться буквы учебника (какого?), то $x > 0$ и тогда после логарифмирования имеем

$$(x^2 - 5x + 8) \lg x = 2 \lg x,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Если же не держаться, то к найденным корням добавляется, во-первых, $x = 0$, поскольку $0^0 = 0^2$, а во-вторых, $x = -1$, поскольку после логарифмирования получается уравнение

$$(x^2 - 5x + 8) \lg |x| = 2 \lg |x|$$

(в случае произвольного ненулевого x действует формула $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$). Оба решения имеют равные права на существование.

г) После логарифмирования по основанию 10, замены $\lg 5 = 1 - \lg 2$ и упрощений получаем уравнение

$$(x-1)(x+1) = (x+1) \lg 2.$$

Корень $x = -1$ не входит в ОДЗ.

д) Если $2 + \sqrt{3} = a$, то

$$2 - \sqrt{3} = a^{-1}, \quad 7 + 4\sqrt{3} = a^2, \quad 15\sqrt{3} + 26 = a^3,$$

поэтому, заменив $(2 + \sqrt{3})^x = y$, получаем уравнение

$$y^3 - 3y^2 - 2y + y^{-1} = 3 \quad \text{или} \quad y^4 - 3y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Это возвратное уравнение имеет корни $y = 2 \pm \sqrt{3}$.

Р 2. а) Имеем

$$4 \left(\frac{1}{2} \log_2 x \right)^2 = 5 \log_2 x - 4.$$

Пусть $\log_2 x = y$, тогда $y^2 - 5y + 4 = 0$.

б) Переходя к основанию 7, имеем уравнение

$$\log_7^2(3-2x) - \log_7 x \log_7(3-2x) - 2 \log_7^2 x = 0,$$

однородное относительно $a = \log_7(3-2x)$ и $b = \log_7 x$. Решая его, получаем либо $a = -b$, либо $a = 2b$. Корни $x = 1$, $x = -3$ не входят в ОДЗ.

в) Переходя к основанию 10, получаем

$$\frac{\lg x}{\lg(x-1)} = \frac{\lg x}{\lg(2x-5)}.$$

Корень $x = 1$ не входит в ОДЗ.

г) Имеем

$$\log_{1-2x}(1-2x)(1-3x) + \log_{1-3x}(1-2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + y - \frac{2}{y} = 2,$$

где $y = \log_{1-2x}(1-3x)$. Корни $x = 0$, $x = 5/6$ не входят в ОДЗ.

д) Поскольку

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 2\sqrt{6},$$

уравнение имеет вид

$$\log_a x + \log_x b = \frac{3}{2} + \log_x ab$$

или

$$\log_a x - \log_x a = \frac{3}{2}, \quad \text{где } a = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \quad b = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}.$$

Тогда $x_1 = a^2$, $x_2 = 1/\sqrt{a}$.

Р 3. а) Если a, b, c — арифметическая прогрессия, то $2b = a + c$, откуда

$$2 \lg(2^x - 1) = \lg 2 + \lg(2^x + 3) \quad \text{или} \quad (y - 1)^2 = 2(y + 3), \quad \text{где } y = 2^x.$$

Подходит только $y = 5$.

б) Если a, b, c — геометрическая прогрессия, то $b^2 = ac$, откуда

$$6 = \log_3(3^x - 1) \log_3 3(3^x - 1).$$

Обозначив $y = \log_3(3^x - 1)$, получим $6 = y(1 + y)$.

Р 4. а) $\dots \Leftrightarrow 3^{-\log_2^2 x - 1} = 3^{4 - 6 \log_2 x} \Leftrightarrow -t^2 - 1 = 4 - 6t$, где $t = \log_2 x$.

б) Логарифмируя по основанию 10, получаем $\lg x + \log_x 5 \cdot \lg 2 = 1$ или, заменив

$$\log_x 5 = \frac{\lg 5}{\lg x}, \quad \lg 5 = 1 - \lg 2$$

и избавившись от знаменателя, $\lg^2 x - \lg x - \lg^2 2 + \lg 2 = 0$ и тогда

$$(\lg x - \lg 2)(\lg x + \lg 2) + (\lg x - \lg 2) = 0.$$

в) Пусть $3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} = y$; тогда

$$\frac{\lg y}{\lg(13 - x^2)} = \frac{\lg y}{\lg(x + 1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg y = 0, \\ 13 - x^2 = x + 1. \end{cases}$$

В первом случае $y = 1$, что дает нам уравнение $3 \cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} = 1$, сводящееся к квадратному. Его корни $x = -2$ и $x = -\log_4 3$, первый из которых не входит в ОДЗ (отрицательно основание второго логарифма). Во втором случае $x = 3$ или $x = 4$. Здесь посторонний корень $x = 4$ (отрицательно основание первого логарифма исходного уравнения).

г) Пусть $y = \log_2 x > 0$; тогда, домножая уравнение на $\log_2 3$, приводим его к виду

$$(\log_2 3)^{2 \log_3 y} + \log_2 3 = \log_2 6 \cdot y^{\log_3(\log_2 3)}.$$

Поскольку

$$(\log_2 3)^{\log_2 y} = y^{\log_2 (\log_2 3)},$$

обозначая

$$(\log_2 3)^{\log_2 y} = y^{\log_2 (\log_2 3)} = z,$$

приходим к уравнению

$$z^2 - z \log_2 6 + \log_2 3 = 0,$$

из которого $z_1 = 1$, $z_2 = \log_2 3$.

Р 5. а) Имеем $x^0 = \cos x = 1$, откуда $x = 2\pi n$, $n > 0$.

б) Поскольку $\sin x \leq 1$, имеем $\lg \sin x \leq 0$ и тогда

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 1. \end{cases}$$

в) Имеем однородное уравнение. После деления на $4^{\cos x}$ получаем $y^2 - 3y + 2 = 0$, где $y = 2^{\sin x - \cos x}$.

г) Страшный на вид показатель степени в правой части после упрощений превращается в $(1/2)(1 - \lg x)$, поэтому, заменив $2^{\lg x} = y$, приходим к уравнению $y^2 + y - 2 = 0$.

д) Перепишем уравнение так:

$$\log_2(17 - 2^{x^2+1}) = 3 - x^2$$

или, обозначив $2^{x^2} = t \geq 1$, $17 - 2t = 8/t$, $2t^2 - 17t + 8 = 0$, откуда $t = 8$ (второй корень меньше 1).

е) Обозначив

$$y = \log_2 \frac{2x-1}{2x+1},$$

преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{4+4y} = -y-1,$$

его единственный корень $y = -1$.

ж) В квадрат возводить не обязательно (хотя этот путь и ведет к цели без осложнений). Если ввести векторы $\vec{a} = (2^x, 4^x, 1)$ и $\vec{b} = (1, 1, 1)$, то уравнение примет вид $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$, что, как мы знаем, означает коллинеарность $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $2^x : 1 = 4^x : 1 = 1 : 1$, откуда $x = 0$.

з) Снимая внешний модуль, заменяем уравнение равносильной совокупностью уравнений $|x - 5 + \lg x| + \lg x - x = \pm 2$, которая в свою очередь, заменяется совокупностью двух совокупностей:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x - 5 + \lg x = 2 + x - \lg x, \\ x - 5 + \lg x = -2 - x + \lg x, \end{cases} \quad \text{при условии } 2 + x - \lg x \geq 0; \\ 2) \quad & \begin{cases} x - 5 + \lg x = -2 - x + \lg x, \\ x - 5 + \lg x = 2 - x + \lg x, \end{cases} \quad \text{при условии } -2 + x - \lg x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{и) } \dots \Leftrightarrow |\lg x|^{\sin x} = |\lg x|^{-\cos x} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \pm 1, \\ \sin x = -\cos x. \end{cases}$$

(В данном случае основание степеней не может равняться 0, так как слева получается не имеющее смысла выражение 0^0).

к) Если $a = \lg x$, $b = \lg x$, то в силу равенства $a^{\lg b} = b^{\lg a}$ уравнение переписывается в виде $a^{\lg b}(\sin^2 b + \cos^2 b) = 1$, откуда $a^{\lg b} = 1$ или $\lg b \cdot \lg a = 0$.

л) Заменяя уравнение совокупностью

$$\begin{cases} 5^{\lg_x 122} - x^{\lg_5 x} + 614 = 636 - 5^{\lg_x 122} - x^{\lg_5 x}, \\ 5^{\lg_x 122} - x^{\lg_5 x} + 614 = -636 + 5^{\lg_x 122} + x^{\lg_5 x}, \end{cases}$$

при условии

$$636 - 5^{\lg_x 122} - x^{\lg_5 x} \geq 0, \quad (1)$$

получаем в первом случае $x^{\lg_5 11} = 122$, откуда $x_1 = 122^{\lg_{11} 5}$; во втором случае

$$x^{\lg_5 x} = 625 \Leftrightarrow \log_5^2 x = 4 \Leftrightarrow \log_5 x = \pm 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{25}, \quad x_3 = 25.$$

Проверим условие (1).

Если $x_1 = 122^{\lg_{11} 5}$, то

$$\log_5 x = \log_5 122 \cdot \log_{11} 5 = \log_{11} 122,$$

поэтому

$$636 - 5^{\lg_x 122} - x^{\lg_5 x} = 636 - 11 - x^{\lg_{11} 122},$$

что отрицательно. Корень не подходит. Если $x_2 = 1/25$, то

$$636 - 5^{\lg_x 122} - x^{\lg_5 x} = 636 - 5^{-\lg_{25} 122} - 25^{\lg_5 25} = 11 - \frac{1}{\sqrt{122}} > 0.$$

Корень подходит. Наконец, если $x_3 = 25$, то

$$636 - 5^{\lg_x 122} - x^{\lg_5 x} = 636 - \sqrt{122} - 625 < 0.$$

м) Имеем $2|x - 2|\sin x = x|\sin x|$. Ясно, что если $\sin x = 0$, то уравнение выполнено. Если $x \geq 2$, $\sin x > 0$, то имеем $2x - 4 = x$ и $x = 4$. Этот корень не подходит, так как $\pi < 4 < 2\pi$ и значит, $\sin 4 < 0$. Если $x < 2$, $\sin x > 0$, получаем $x = 4/3$ — корень уравнения, поскольку

$$0 < \sin \frac{4}{3} < \sin \frac{\pi}{2}.$$

Если $x \geq 2$, $\sin x < 0$, то снова $x = 4/3$. Если $x < 2$, $\sin x < 0$, то $x = 4$; и снова это значение не годится.

н) Имеем:

$$2^{\sqrt{-x}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

при этом необходимо учесть, что правая часть должна быть положительна.

о) Уравнение $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$ имеет две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m.$$

Для первой серии условие $\sin 3x > 0$ выполнено при четных k , поскольку

$$3x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k$$

и мы через раз попадаем в 4-ю четверть. Значит, $x = \pi/4 + 2\pi n$. Если же

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, \quad \text{то} \quad 3x = -\frac{3\pi}{4} + 6\pi m$$

и условие $\sin 3x > 0$ не выполнено.

п) Уравнение

$$\cos^2 x = \sqrt{2} \sin x \cos x + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x$$

приводится к виду

$$1 + \sqrt{2} \sin x = \cos x(1 + \sqrt{2} \sin x),$$

откуда $\sin x = -1/\sqrt{2}$ при условии $\cos x > 0$. (Вариант $\cos x = 1$ невозможен по определению логарифма).

р) Преобразуем уравнение так:

$$1 - 2 \sin^2 x + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sin x}{2} - 2 \cos x \log_2 \sin x = 2 \cos x + 2 \sin^2 x \log_2 \sin x,$$

что после группировки даст

$$2 \cos x (\log_2 \sin x + 1) + 2 \sin^2 x (\log_2 \sin x + 1) = \frac{\log_2 \sin x + 1}{2}.$$

Это уравнение распадается на два: $\sin x = 1/2$ и $2 \cos x + 2 \sin^2 x = 1/2$. Найденные решения должны удовлетворять условию $\sin x > 0$; посторонней оказывается серия $x = -2\pi/3 + 2\pi k$.

с) Уравнение $\sin x - \cos 6x = \sin 3x - \cos 8x$ имеет три серии решений:

$$x_1 = \pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi m}{9}.$$

Условию $-4 < x < -2,5$ из первой серии удовлетворяет только $x = -\pi$, однако этот корень не входит в ОДЗ, поскольку не выполнено неравенство

$$\sin x - \cos 6x + \frac{2}{3} > 0.$$

Решая неравенство

$$-4 < -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < -2,5,$$

находим также единственный корень (при $n = -2$) $x = -9\pi/10$. Условие

$$\sin x - \cos 6x + \frac{2}{3} > 0$$

выполнено, поскольку вся серия x_2 отвечает уравнению

$$\cos\left(\frac{-5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

и, значит,

$$\sin x - \cos 6x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 2 \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Третья серия дает два корня, удовлетворяющие неравенству $-4 < x < -2,5$; это $x = -7\pi/6$ и $x = -13\pi/18$. Первый легко подставляется. Что касается второго, то в этом случае

$$\sin x - \cos 6x = -\sin \frac{13\pi}{18} - \cos \frac{13\pi}{3} = -\sin \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{2}$$

и неравенство $\sin x - \cos 6x + 2/3 > 0$ равносильно условию $\sin(5\pi/18) < 1/6$, что не имеет места, поскольку

$$\sin \frac{5\pi}{18} > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Р 6. а) Пусть

$$(\sqrt{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-9}})^x = y,$$

тогда $y + 4^x/y = 2 \cdot 2^x$ или $(y - 2^x)^2 = 0$, откуда $y = 2^x$. Значит,

$$\lg y = x \lg 2 \quad \text{или} \quad x \lg (\sqrt{x+7} + \sqrt{x-9}) = x \lg 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+7} + \sqrt{x-9} = 4$$

(корень $x = 0$ не принадлежит ОДЗ).

б) Представим уравнение в виде

$$2(2^x + 2^{-x}) = 5 - (x+2)^2. \quad (*)$$

Если x — корень этого уравнения, то, очевидно, $2^x + 2^{-x} \leq 5/2$, т.е. $x \in [-1; 1]$. Но тогда

$$1 \leq x+2 \leq 3 \quad \text{и} \quad -4 \leq 5 - (x+2)^2 \leq 4.$$

Поскольку $2^x + 2^{-x} \geq 2$ (частный случай неравенства $|a + 1/a| \geq 2$), причем равенство возможно только при $x = 0$, равенство $(*)$ невозможно.

в) Решая как квадратное относительно 2^x , приходим к двум уравнениям: $2^x = 1/3$ и $2^x = 3 - x$. Единственный корень второго уравнения (слева возрастающая функция, справа — убывающая) находим подбором.

г) Приводим уравнение к виду

$$\frac{\ln(x-1)}{\ln x} = \frac{\ln 5}{\ln 6}.$$

Функция

$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x} = \log_x(x-1)$$

нами уже исследована: из ее монотонности следует, что $x = 6$ — единственный корень уравнения.

д) Пусть $\sqrt[4]{2x} = y$, тогда уравнение принимает вид

$$\log_{12}(y^2 + y) = \frac{1}{2} \log_3 y^4$$

или

$$\log_{12}(y+1) + \log_{12} y = \log_{12} y \cdot \log_3 12$$

или

$$\log_{12}(y+1) = \log_{12} y \cdot (\log_3 12 - 1),$$

т.е.

$$\log_{12}(y+1) = \log_{12} y \cdot \log_3 4,$$

откуда $\log_y(y+1) = \log_3 4$. Снова явилась на свет та же функция, что и в предыдущем примере, значит, $y = 3$.

е) Заметим, прежде всего, что $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/2$ — корни данного уравнения и, считая, что $x(1-2x) \neq 0$, перепишем уравнение так:

$$\frac{2^{1-2x} - 1}{1-2x} = \frac{2^{x-2x^2} - 1}{x-2x^2}.$$

Очевидна необходимость рассмотрения функции

$$f(t) = \frac{2^t - 1}{t}.$$

Ее производная

$$f'(t) = \frac{2^t \cdot t \cdot \ln 2 - 2^t + 1}{t^2}.$$

Числитель, заменяя 2^t на $e^{t \ln 2}$, преобразовываем к виду

$$e^{t \ln 2}(t \ln 2 - 1) + 1$$

или, если положить $z = t \ln 2$, то $e^z(z - 1) + 1$. Воспользуемся неравенством $e^z > z + 1$, верным при любом $z \neq 0$. Тогда

$$e^z(z - 1) + 1 > (z + 1)(z - 1) + 1 = z^2 > 0.$$

Итак, $f'(t) > 0$, т. е. функция $f(t)$ возрастает, и равенство $f(a) = f(b)$ возможно только при $a = b$. Отсюда $1 - 2x = x - 2x^2$, что дает нам еще один корень $x_3 = 1$.

ж) Приведем уравнение к виду

$$\log_5(2x - 1) \cdot \log_4 \sin \frac{\pi(x - 1)}{2} = \log_7((x - 2)^2 + 1) \cdot \log_5(2x - 1) \cdot \log_6 5.$$

Тогда либо $\log(2x - 1) = 0$ и $x = 1$ (значение, не входящее в ОДЗ), либо

$$\log_4 \sin \frac{\pi(x - 1)}{2} = \log_7((x - 2)^2 + 1) \cdot \log_6 5.$$

Левая часть этого уравнения не больше 0, правая — не меньше. Значит,

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi(x - 1)}{2} = 1, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$$

з) Левая часть не меньше 1, правая — не больше 1. Значит,

$$\begin{cases} x - 4y - 4\sqrt{x} = 0, \\ \frac{y\sqrt{x}}{2} + 1 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Исключая y , приходим к уравнению

$$x\sqrt{x} - 4x + 8 = 0,$$

которое заменой $\sqrt{x} = t \geq 0$ сводится к $t^3 - 4t^2 + 8 = 0$. Его корни $t_1 = 2$, $t_2 = 1 + \sqrt{5}$ (третий корень отрицателен). В первом случае получаем $x = 4$, $y = -1$. Эта пара не годится, так как $x + 4y = 0$ и основание логарифма равно 1. Во втором случае

$$x = 6 + 2\sqrt{5}, \quad y = 1 - \sqrt{5}$$

и сумма $x + 4y = 10 - 2\sqrt{5} > 0$. (Условия существования других корней проверять не надо, так как они равны 0 ввиду системы (*)).

и) Если

$$\sqrt{a} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad b = x^2 - 2x - 2, \quad \text{то} \quad a = 8 + 4\sqrt{3},$$

т. е. уравнение имеет вид

$$\log_{\sqrt{a}} b = \log_{\sqrt{a}-1}(b - 1),$$

что равносильно

$$\log_a(a - 1) = \log_b(b - 1).$$

Функция $f(x) = \log_x(x-1)$ (она же $\log_{x+1} x$) нам знакома. Из ее монотонности следует, что $a = b$, т. е.

$$x^2 - 2x - 2 = 8 + 4\sqrt{3}.$$

к) Если $x^3 = 2$ или $\sin x = 0$, то уравнение удовлетворяется. Если $x^3 > 2$, $\sin x > 0$ или $x^3 < 2$, $\sin x < 0$, то левая часть строго положительна (и корней нет). Если $x^3 > 2$, $\sin x < 0$ или $x^3 < 2$, $\sin x > 0$, то левая часть строго отрицательна (и корней опять нет).

л) Правая часть равна $2(\log_2 x + \log_x 2)$ и в силу неравенства $|a + 1/a| \geq 2$ должна быть (в данном случае) не меньше 4. Но тогда

$$2^{4x-x^2-2} \geq 4 \Leftrightarrow 4x - x^2 - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 0.$$

м) ОДЗ уравнения определяется условиями $\log_5 123 \leq x \leq 3$. Корень $x = 3$ напрашивается. Пусть теперь $x < 3$. Тогда $6\pi/x > 2\pi$, но $4 \arcsin(2^x - 7) < 2\pi$, $\arccos(5^x - 124) > 0$, т. е. левая часть уравнения меньше правой.

н) Функция $y = e^{-(x+1)^2}$ достигает своего наибольшего значения при $x = -1$, и это значение равно 1. Функция

$$y = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x + 8,$$

наоборот, — достигает в точке $x = -1$ своего наименьшего значения (которое также равно 1). Действительно, производная этой второй функции $y' = 12(x+1)(x^2+1)$ меняет знак в точке $x = -1$ с минуса на плюс. Значит, $x = -1$ — единственный корень уравнения.

Р 7. а) Пусть $2^x = a$, $3^y = b$; имеем систему

$$\begin{cases} 3a^2 + 2ab - b^2 = 0, \\ 2a^2 - 5ab + b^2 + 8 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Первое уравнение в ней — однородное. Решая его, получаем

$$\begin{cases} a = -b, \\ a = \frac{b}{3}. \end{cases}$$

Первая возможность исключена, поскольку $a, b > 0$. Вторая после подстановки $b = 3a$ во второе уравнение системы (*) дает $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$.

б) Прологарифмировав первое уравнение по основанию 5 и заменив $x - y = a$, $\log_5(x + 2y) = b$, получим систему

$$\begin{cases} ab = 2, \\ 2b + a = 4, \end{cases}$$

из которой $a = 2$, $b = 1$. Тогда

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

в) Подставив $y = 8x - 1$ в первое уравнение, приведем его к виду

$$\log_2 x \cdot \log_2(8x - 1) + \log_2^2(8x - 1) = 4 + 2 \log_2 x$$

или

$$(\log_2(8x - 1) - 2)(\log_2(8x - 1) + 2) = \log_2 x(2 - \log_2(8x - 1)).$$

Тогда

$$\begin{cases} \log_2(8x-1) = 2, \\ \log_2(8x-1) + 2 = -\log_2 x. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности дает $x = 5/8$, тогда $y = 4$. Второе уравнение приводится к виду $(8x-1)x = 1/4$ или $32x^2 - 4x - 1 = 0$. Положительный корень $x = 1/4$ не входит в ОДЗ (основание второго логарифма в первом уравнении исходной системы оказывается равно 1).

г) Первое уравнение приводится к виду

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2,$$

откуда

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ x = -y - 1. \end{cases}$$

Первый случай даст уравнение $y^2 = y + 2$. При $x = -y - 1$ получаем во втором уравнении слева $\log_{-y-3}(y+2)$, который не определен (должны одновременно выполняться условия $-y - 3 > 0$ и $y + 2 > 0$).

д) Из второго уравнения после возведения в квадрат получается

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 2 - 2y. \end{cases}$$

Подстановка первого значения в первое уравнение дает $y = \log_2(128/71)$. Вторая возможность приводит к уравнению $2^{3-y} + 7 \cdot 2^{y-5} = 4$, из которого $y = 4$ и $y = \log_2(16/7)$. Посторонним является значение $y = 4$: ему отвечает $x = -6$ и эта пара не удовлетворяет второму уравнению системы.

е) Первое уравнение является однородным относительно

$$a = \log_2(x+y) \quad \text{и} \quad b = \log_2(x-2y).$$

Решая это уравнение, получаем

$$\begin{cases} a = b, \\ a = -2b. \end{cases}$$

Первая возможность дает $y = 0$, $x = \pm 2$, но в ОДЗ входит только пара $(2; 0)$. Если $a = -2b$, то мы приходим к равенству

$$(x-2y)^2(x+y) = 1.$$

Вспоминая про второе уравнение системы, преобразуем его к виду $(x+y)(x-2y) = 4$. Из этих двух равенств получаем $x-2y = 1/4$ и тогда $x+y = 16$.

ж) Пусть $\log_y x = a$, тогда первое уравнение имеет вид $5 + 2a = -2/a$. Отсюда $a_1 = -2$, $a_2 = -1/2$. В первом случае $x = 1/y^2$; подставляя во второе уравнение, находим $y = (\log_3 6)^{-1/3}$. Во втором случае $x = 1/\sqrt{y}$ и т.д.

з) Первое уравнение приводится к виду

$$27^x \cdot 9^y \cdot 4^{x+y} = 144,$$

а второе — к виду $27^x \cdot 9^y + 4^{x+y} = 25$. Обозначив $27^x \cdot 9^y = a$, $4^{x+y} = b$, получаем систему

$$\begin{cases} a + b = 25, \\ ab = 144, \end{cases}$$

из которой $a = 16$, $b = 9$ или наоборот $a = 9$, $b = 16$. Решением системы

$$\begin{cases} 27^x \cdot 9^y = 9, \\ 4^{x+y} = 16, \end{cases}$$

служит пара $(-2; 4)$, которая, однако, обращает в 0 основание $0,2x + 0,1y$ логарифма из второго уравнения исходной системы. Решая систему

$$\begin{cases} 27^x \cdot 9^y = 9, \\ 4^{x+y} = 16, \end{cases}$$

находим

$$x = 4 \log_3 2 - 2 \log_2 3, \quad y = 3 \log_2 3 - 4 \log_3 2.$$

В этом случае

$$0,2x + 0,1y = 0,1(4 \log_3 2 - \log_2 3) > 0.$$

и) Второе уравнение приводится к виду $2y^2 + (x-1)y - (x-1)^2 = 0$ и оказывается однородным относительно $a = y$ и $b = x-1$. Решая, получаем

$$\begin{cases} a = -b, \\ a = \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Первая возможность означает $y = -x + 1$. Подставляя в первое уравнение, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \log_3(x-2) \log_3(x-2) &= \log_3(3x-6) \log_3(3x-6) \Leftrightarrow \lg^2(x-2) = \lg^2(3x-6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x-2) = \lg(3x-6), \\ \lg(x-2) = -\lg(3x-6). \end{cases} \end{aligned}$$

Эта совокупность имеет единственный принадлежащий ОДЗ корень $x = 2 + 1/\sqrt{3}$.

Если теперь $a = b/2$, то $x = 2y + 1$. Однако в этом случае $\log(x - 2y - 4)$ не существует.

к) Перепишем первое уравнение в виде

$$x + \log_2 x = y + \log_2 y.$$

Функция $f(t) = t + \log_2 t$ возрастающая, значит, $x = y$. Из второго уравнения тогда получаем $x^2 = 4$ при условии $x > 0$.

л) Исключив y , приходим к уравнению

$$\frac{2^x + 1}{3} = \log_2(3x - 1).$$

Функции, стоящие в левой и правой частях этого уравнения — взаимно обратные. (Действительно: если $t = \log_2(3x - 1)$, то $x = (2^t + 1)/3$). Кроме того, обе они возрастающие. Значит, совпадение их значений возможно только на прямой $y = x$. Таким образом, $2^x = 3x - 1$. Это уравнение решено нами в примере 18 данного параграфа.

м) Обозначив $\log_{4x^2-x} 5 = a$, получим уравнение

$$\sqrt{a} \left(2 - \frac{1}{a} \right) = 1 \quad \text{или} \quad 2a - \sqrt{a} - 1 = 0,$$

откуда $\sqrt{a} = 1$. Тогда $4x^2 - x = 5$ и $x_1 = -1$, $x_2 = 5/4$. Первый корень неравенству $\sin x > \operatorname{ctg} 2x$ не удовлетворяет, поскольку

$$-\sin 1 > -\operatorname{ctg} 2 \Leftrightarrow \sin 1 < \operatorname{ctg} 2,$$

что неверно, так как слева число положительное, а справа — отрицательное. Неравенство же $\sin(5/4) > \operatorname{ctg}(5/2)$ равносильно (поскольку ввиду $0 < 5/2 < \pi$ имеем $\sin(5/2) > 0$) верному неравенству

$$\sin \frac{5}{4} \sin \frac{5}{2} > \cos \frac{5}{2}$$

(здесь левая часть положительна, а правая — отрицательна).

н) Прежде всего, заметим, что $6y^2 + 2y > 0$, поэтому второе уравнение системы можно переписать так:

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = \frac{25y^2 + 6y + 1}{6y^2 + 2y}.$$

Ввиду того, что $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \leq 5$ (действительно, неравенство $a + 4/a \leq 5$ при $a = 4^{\sin^2 x}$ равносильно неравенству $1 \leq a \leq 4$), выясним, при каких условиях

$$\frac{25y^2 + 6y + 1}{6y^2 + 2y} \leq 5.$$

Получаем $y \in (-\infty; -1] \cup [1/5; +\infty)$, что с учетом условия $|y| \leq 1$ означает: либо $y = -1$, либо $1/5 \leq y \leq 1$. Если $y = -1$, то $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 5$, откуда

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

Первая возможность запрещается ОДЗ, вторая дает $|\sin x| = 1$. Тогда первое уравнение принимает вид $-\sin x = \log_2(1/2)$, т.е. $\sin x = 1$. Теперь рассмотрим случай $1/5 \leq y \leq 1$. Оценим величину $y/(3y+1)$. Нетрудно понять, что $y/(3y+1) \leq 1/4$. Но тогда

$$\log_2 \left| \frac{y \sin x}{3y+1} \right| \leq -2,$$

что влечет за собой $y \sin x \leq -2$ или $-10 \leq \sin x \leq -2$, что невозможно. Значит, при $1/5 \leq y \leq 1$ решений нет.

о) Логарифмируя первые два уравнения, получаем вспомогательную систему

$$\begin{cases} 5z \lg x = 8 \lg y, \\ 5z \lg y = 2 \lg x. \end{cases} \quad (*)$$

Случай $z = 0$, $\lg y = 0$ не дают решений системы. Если же $\lg x = 0$, т.е. $x = 1$, то получаем $y = 1$, $z = 2$. Эта тройка удовлетворяет исходной системе. Теперь можно поделить первое уравнение системы (*) на второе; мы получим $\lg^2 x = 4 \lg^2 y$. Если $\lg x = 2 \lg y$, то $x = y^2$ и $z = 4/5$. Уравнение $y + \sqrt{y} = 4/5$ имеет корень

$$y = \frac{13 - \sqrt{105}}{10}.$$

Если $\lg x = -2 \lg y$, то $x = 1/y^2$ и $z = -4/5$, но по ОДЗ должно быть $z \geq 0$ (третье уравнение).

п) Приводим систему к виду

$$\begin{cases} (5^x + 5^{-x}) \cos y + (5^{-x} - 5^x) \sin y = -\frac{2}{5}, \\ 2(5^x + 5^{-x}) \cos y + (5^{-x} - 5^x) \sin y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

и, положив $a = 5^x + 5^{-x}$, $5^{-x} - 5^x = b$, решаем вспомогательную систему

$$\begin{cases} a + b = -\frac{2}{5}, \\ 2a + b = \frac{4}{5}, \end{cases}$$

из которой $a = 6/5$, $b = -8/5$.

Тогда

$$\begin{cases} (5^x + 5^{-x}) \cos y = \frac{6}{5}, \\ (5^{-x} - 5^x) \sin y = -\frac{8}{5}. \end{cases}$$

Возводя в квадрат и складывая, получаем уравнение

$$25t^2 - 100t - 156 = 0,$$

где $t = 5^{2x} + 5^{-2x} > 0$. Положительный корень $t = 26/5$. Тогда $x = \pm 1/2$. Остается найти $y = \pm \arctg 2 + \pi n$ (знаки согласуются: «+» с «+», «-» с «-»).

р) Если $\cos x \geq 3y$, то, раскрывая модуль, приводим уравнение к виду $\sin 2x = 3y^2$. Тогда неравенство переписывается так:

$$\frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{\sin 2x} \leq 1.$$

Поскольку $\sin 2x > 0$, второе слагаемое не меньше 1, значит, неравенство выполнено, только если

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ x - \frac{\pi}{4} = 0. \end{cases}$$

Но в случае $\sin 2x = 1$ мы получаем $y = 1/\sqrt{3}$ (положительности у требует ОДЗ) и тогда условие $\cos x \geq 3y$ приводит к неравенству $\cos x \geq \sqrt{3}$, что невозможно. Пусть теперь $\cos x < 3y$. Раскрывая модуль в этом случае, приходим к уравнению

$$\lg x = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Неравенство

$$\frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{3y^2} \leq 1$$

означает, что должно выполняться и неравенство

$$\frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 < 1,$$

откуда

$$\frac{\pi}{4} - 2 < x < 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Этому условию среди корней уравнения (1) удовлетворяет только $x = \arctg 1/6$. Таким образом, приходим к неравенству

$$\frac{1}{3y^2} \leq 1 - \frac{1}{4} \left(\arctg \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4} \right)^2$$

или, с учетом ОДЗ,

$$y \geq \frac{2}{\sqrt{3(4 - (\arctg(1/6) - \pi/4)^2)}}. \quad (*)$$

Поскольку $\cos(\arctg(1/6)) = 6/\sqrt{37}$ условие $\cos x < 3y$ означает $y > 2/\sqrt{37}$. Это неравенство выполнено, если выполнено (*), поскольку $37 > 3(4 - t^2)$, где

$$t = \arctg \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Итак, решением системы являются $x = \arctg 1/6$ и любой y , удовлетворяющий неравенству

$$y \geq \frac{2}{\sqrt{3(4 - (\arctg(1/6) - \pi/4)^2)}}.$$

Р 8. Обозначив $2^x = y > 0$, имеем возвратное уравнение $y^4 + ay^3 - 5y^2 + ay + 1 = 0$, которое после замены $y + 1/y = t \geq 2$ приводится к виду $t^2 + at - 7 = 0$. Это уравнение имеет два корня разных знаков. Условие задачи выполнено, если положительный корень равен 2. Тогда $a = 3/2$.

Р 9. $4^x + 9^x + a\sqrt{2} \cdot 6^x = 0 \Leftrightarrow (2/3)^x + (3/2)^x = -a\sqrt{2}$; это уравнение имеет корни при $-a\sqrt{2} \geq 2$, т.е. при $a \leq -\sqrt{2}$.

Р 10. Прежде всего: $a - 6,5 \neq 1$, $a - 6,5 > 0$. Уравнение $x^2 + 1 = ax - 5x$ имеет два корня при $D = a^2 - 10a + 21 > 0$.

Р 11. Если $0 < a < 1$, то левая часть уравнения — убывающая функция, правая — возрастающая; их значения совпадают при $x = 1$, т.е. корень один. В случае $a > 1$ графики функций $y = \log_a x$ и $y = x - 1$ пересекаются в одной точке при $x = 1$, если прямая является касательной, что имеет место при $a = e$ (поскольку производная $(\log_a x)' = 1/x \ln a$ при $x = 1$ равна $1/\ln a = 1$ — угловому коэффициенту прямой $y = x - 1$), и в двух при остальных значениях a . (Так, при $a = 10$ второй корень равен примерно 0,13).

Р 12. Решение второго уравнения $\lg x = 1$. Первое приводится к виду $at^3 + 2a^2t - 3 = 0$, где $t = \lg x$. При $t = 1$ получаем два значения параметра: $a_1 = 1$, $a_2 = -3/2$. Если $a_1 = 1$, то уравнение $t^3 + 2t - 3 = 0$ имеет единственный корень $t = 1$, который является корнем второго уравнения, т.е. $a_1 = 1$ удовлетворяет условию. Если $a_2 = -3/2$, то уравнение

$$-\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t - 3 = 0$$

имеет корни $t = 1$ и $t = 2$, тогда как второе уравнение — только $t = 1$. Значит, $a_2 = -3/2$ не годится.

Р 13. а) Пусть $2^{2x-x^2} = y$, причем $y \in (0; 2]$. Уравнение приводится к виду

$$\cos\left(2y + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{(a-1)}{2},$$

откуда $|a-1| \leq 2$, т.е. $-1 \leq a \leq 3$. Находя y , имеем две серии:

$$y_1 = -\frac{\pi}{6} + \alpha + \pi n, \quad y_2 = -\frac{\pi}{6} - \alpha + \pi n, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{a-1}{2}.$$

Проверяем условие $y \in (0; 2]$. Пусть $n = 0$; тогда $y_1 \in (0; 2]$, если $\alpha > \pi/6$, откуда

$$\frac{a-1}{2} < \frac{1}{2},$$

т.е. $a < 2$. Второй корень y_2 при $n = 0$ данному промежутку не принадлежит (получаем неравенство $\alpha < -\pi/6$). Пусть теперь $n = 1$; тогда $y_1 \notin (0; 2]$, поскольку мы приходим к неравенству $\alpha \leq 4 - 5\pi/3 < 0$; проверка показывает, что и $y_2 \notin (0; 2]$. При $n = 2$ или при $n < 0$ сразу видно, что ни один из корней не удовлетворяет условию $y \in (0; 2]$.

б) Уравнение $x^2 - (a+1)x + 3(a-2) = 0$ имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = a-2$. Чтобы первый корень был посторонним, он не должен входить в ОДЗ, т.е. надо потребовать выполнения совокупности

$$\begin{cases} a-3 \leq 0, \\ a-3 = 1, \\ 2a-4 \leq 0, \end{cases}$$

из которой $a \leq 3$ или $a = 4$. Если $a = 4$, то $x_2 = 2 \in [-1; 2]$ и входит в ОДЗ. Если $a \leq 3$, то $x_2 \in [-1; 2]$ только при $1 \leq a \leq 3$. Исходное уравнение имеет еще один корень: $x_3 = 2a-2$. Он входит в ОДЗ при выполнении условий $a-x > 0$, $a-x \neq 1$, что дает $a < -2$, $a \neq 1$. Но при $a < -2$ корень $x_3 \notin [-1; 2]$, т.е. эти значения параметра не годятся.

в) Условие $22a - 4a^2 - 24 \geq 0$ дает $3/2 \leq a \leq 4$. Условие $36 - 9a^2 > 0$ уточняет: $3/2 \leq a < 4$. Если $36 - 9a^2 = 1$, т.е. $a = 5/3$ или $a = 7/3$, то условие задачи выполнено, поскольку решением уравнения является любое значение x . Если $a = 3/2$, то имеем

$$-2(x^2 + x) \lg \frac{3}{2} = 0,$$

откуда $x = 0$ и $x = -1$, т.е. $a = 3/2$ удовлетворяет условию. Рассмотрим уравнение

$$(2x+a)p - 2(x^2+x) \lg a = 0,$$

(где для краткости положено $p = \sqrt{22a - 4a^2 - 24}$) или

$$2 \lg a \cdot x^2 + 2(\lg a - p)x - pa = 0.$$

Поскольку $pa \geq 0$, корни у этого уравнения всегда есть; условия $x_1 \leq -1$, $x_2 \geq 0$ выполнены, если $f(-1) \leq 0$, $f(0) \leq 0$, что дает $a \geq 2$.

г) Если $x \leq 2$, то условие неотрицательности логарифма приводит к неравенству

$$4x - x^2 + 2(a - 2\pi)(x - 2) + 4\pi a \geq a^2 + 4\pi^2 + 4 \Leftrightarrow (x - (2 - 2\pi + a))^2 \leq 0,$$

откуда $x = 2 - 2\pi + a$. При этом как логарифм, так и корень равны 0, значит, имеем совокупность двух систем:

$$1) \begin{cases} x = 2 - 2\pi + a, \\ x = 5a + 34 - 10\pi, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x = 2 - 2\pi + a, \\ |\pi - x| = a - \pi - 2. \end{cases}$$

Из первой системы $a = 2\pi - 8$, $x = -6$; из второй $a = 2\pi$, $x = 2$. Пусть теперь $x > 2$. Тогда аналогично приходим к неравенству $(x - (2 + 2\pi - a))^2 \leq 0$ и к системам:

$$1) \begin{cases} x = 2 + 2\pi - a, \\ x = 5a + 34 - 10\pi, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x = 2 + 2\pi - a, \\ |\pi - x| = a - \pi - 2. \end{cases}$$

Решая, находим еще одно значение параметра $a = 2\pi - 1$.

Р 14. Из первого уравнения $y = x + 3$, тогда второе приводится к виду

$$x^2 + 2(a - 1) + a^2 - 5a - 6 = 0. \quad (*)$$

Условие $D \geq 0$ дает $a \geq -7/3$. ОДЗ требует: $x > 0$, поэтому уравнение (*) должно иметь хотя бы один положительный корень. Подойдем к ответу на этот вопрос с противоположной стороны: выясним, когда оба корня отрицательны или один отрицателен, а второй равен 0. Из теоремы Виета следует, что это будет при $-2(a - 1) < 0$, $a^2 - 5a - 6 \geq 0$, откуда $a \geq 6$. Значит, нам подходят $-7/3 \leq a < 6$. При $a = -7/3$ мы имеем один корень $x = 10/3$.

Р 15. Исключая x , получаем равенство $(a^2 + 3a) \log_3 y = 0$. Если $y = 1$, то $x = 1$ независимо от a , и условие $x + y > 1$ выполнено. Если $a^2 + 3a = 0$, то $a = 0$ или $a = -3$. В первом случае решением системы являются пары вида $(1; y)$, где $y > 0$; условие $x + y > 1$ при этом выполнено. Если $a = -3$, то оба уравнения представляют собой одно и то же уравнение: $x - 1 = 9 \log_3 y$, из которого $x = \log_3(3y^9)$. Тогда условие $x + y > 1$ приводит к неравенству $y^9 \cdot 3^y > 1$. Ясно, что оно не может выполняться при любом $y > 0$; действительно, взяв y достаточно малым, например, $y = 1/2$, придем к неверному неравенству $\sqrt[9]{3} > 512$. Итак, $a = -3$ условию не удовлетворяет.

Р 16. Система равносильна такой:

$$\begin{cases} 2 \cos x + a \sin y = 1, \\ \sin y = (2 - 3 \cos x), \\ z^{-1} = \frac{1 - 2a}{2a}. \end{cases}$$

при дополнительных условиях $a > 0$, $a \neq 1$, $z > 0$, $z \neq 1$, $\sin y > 0$, $0 < 2 - 3 \cos x \leq 1$, $(1 - 2a)/2a > 0$, $(1 - 2a)/2a \neq 1$.

Из первых двух уравнений при $a \neq 2/3$ находим

$$\cos x = \frac{2a - 1}{3a - 2}.$$

Неравенство

$$\left| \frac{2a - 1}{3a - 2} \right| \leq 1$$

выполнено при $a \leq 3/5$, $a \geq 1$. Неравенство $0 < 2 - 3 \cos x \leq 1$ выполнено при $0 < a \leq 1/3$. Тогда $\sin y = 1/(2 - 3a)$. Неравенство $(1 - 2a)/2a > 0$ даст $0 < a < 1/2$, неравенство $(1 - 2a)/2a \neq 1$ — условие $a \neq 1/4$. Итак: при $a \in (0; 1/3] \setminus \{1/4\}$ решением системы будет тройка:

$$x = \pm \arccos \frac{2a - 1}{3a - 2} + 2\pi n, \quad y = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2 - 3a} + \pi k, \quad z = \frac{2a}{1 - 2a}.$$

При других значениях a решений нет.

Р 17. При замене y на $(-y)$ первое уравнение не меняется, так как

$$\left| \frac{x^{-y} - 1}{x^{-y} + 1} \right| = \left| \frac{1 - x^y}{1 + x^y} \right| = \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right|.$$

То же со вторым уравнением. Значит, $y = 0$; тогда $a = 0$.

Система принимает вид

$$\begin{cases} x^y - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

Первое уравнение выполнено в двух случаях: $y = 0$, $x > 0$; $x = 1$, $y \in \mathbb{R}$. В первом случае нам подходит любое $b > 0$. А во втором следует потребовать, чтобы было $b \leq 1$, иначе добавятся еще удовлетворяющие системе значения y .



Ответы

1. а) 3; 4 + log₃ 3. б) log_{7/5}(log₅ 7); в) 0; ±1; 2; 3. г) lg 20. д) ±1; 2. а) 2; 16. б) 1/2; в) 4. г) 1/4; д) (√2 + √3 + √5)²; (√2 + √3 + √5)^{-1/2}; 3. а) log₂ 5; б) log₃ 10; log₃(28/27); 4. а) 2; 32. б) 2; 5. в) -log₄ 3; 3. г) 2; 32; 5. а) $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. б) $\pi/2 + 2\pi n$; в) $2\pi n$, $\pi/2 + 2\pi n$, $\pi/4 + \pi k$. г) πn . д) $\pm\sqrt{3}$. е) 3/2. ж) 0. з) 1,5; 7; 10^{1,5}; 10^{3,5}. и) $\pm\pi/4 + \pi n$. к) 10, $\pi/4 + \pi n$, $n \geq 0$. л) 1/25. м) 4/3; πn . н) $x = -\log_2(\pi/4 + \pi n/2)$, $n \geq 0$. о) $\pi/4 + 2\pi n$. п) $-\pi/4 + 2\pi n$. р) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $2\pi/3 + 2\pi k$. с) $-7\pi/6$, $-9\pi/10$; 6. а) 9. б) ∅. в) -log₂ 3; 1. г) 6. д) 81/2. е) 0; 1/2; 1. ж) 2. з) $(6 + 2\sqrt{5}; 1 - \sqrt{5})$; и) $1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$. к) $\sqrt[3]{2}$; πn . л) 2. м) 3. н) -1; 7. а) $(1/2; \log_3(3\sqrt{2}))$. б) $(3; 1)$. в) $(5/8; 4)$. г) $(3; -1)$, $(6; 2)$. д) $(0; \log_2(128/71))$, $(2 - 2\log_2(16/7); \log_2(16/7))$. е) $(2; 0)$, $(43/4; 21/4)$. ж) $(5; 1/25)$, $(\log_3^{2/3} 6; \log_3^{-1/3} 6)$. з) $(4\log_3 2 - 2\log_2 3; 3\log_2 3 - 4\log_3 2)$. и) $(2 + 1/\sqrt{3}; -1 - 1/\sqrt{3})$. к) $(2; 2)$. л) $(1; 1)$, $(3; 3)$. м) 5/4. н) $(\pi/2 + 2\pi n; -1)$. о) $(1; 1; 2)$, $((274 - 26\sqrt{105})/100; (13 - \sqrt{105})/10; 4/5)$. п) $(\pm 1/2; \pm \arctg 2 + \pi n)$. р) $x = \arctg 1/6$, $y \geq 2/\sqrt{3(4 - (\arctg(1/6) - \pi/4)^2)}$; 8. $a = 3/2$; 9. $a \leq -\sqrt{2}$; 10. $a > 7$, $a \neq 7,5$; 11. При $0 < a < 1$ и $a = e$ один корень; при $1 < a < e$, $a > e$ два корня. При остальных a — ни одного; 12. $a = 1$; 13. а) $-1 \leq a < 2$. б) $1 \leq a \leq 3$, $a = 4$. в) $a = 3/2$, $a = 5/3$, $2 \leq a < 4$. г) $a = 2\pi - 8$, $a = 2\pi - 1$, $a = 2\pi$; 14. $-7/3 \leq a < 6$; 15. $a \neq -3$; 16. Если $a \in (0; 1/3] \setminus \{1/4\}$, то $x = \pm \arccos(2a - 1)/(3a - 2) + 2\pi n$, $y = (-1)^k \arcsin(1/(2 - 3a)) + \pi k$, $z = 2a/(1 - 2a)$. Иначе — ∅; 17. $a = 0$, $0 < b \leq 1$.

§ 18. Неравенства

Ничто не помешает нам повторить здесь, что логарифмические и показательные неравенства находятся в таком же отношении к одноименным уравнениям, что и алгебраические (и тригонометрические) неравенства — к алгебраическим (и тригонометрическим) уравнениям: если мы можем решить уравнение, то — как правило — можем решить и неравенство. Только надо учитывать, что при логарифмировании и потенцировании в неравенствах значение имеет, больше или меньше единицы основание степени или логарифма.

Иными словами, получив в результате преобразований исходного неравенства простейшее неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ или $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, мы в случае $a > 1$ переходим к неравенству $f(x) < g(x)$, а в случае $a < 1$ (для логарифмического неравенства $0 < a < 1$) — к неравенству $f(x) > g(x)$. Плюс стандартные ограничения, связанные с ОДЗ.

Да, раздел «неравенства» мог бы дублировать раздел «уравнения» с заменой знака « $\Rightarrow$ » на « $>$ » или « $<$ », если бы не уже отмечавшееся ранее обстоятельство: есть на свете неравенства, которые нельзя «решить» в обычном смысле, но можно доказать, что они выполнены на всей ОДЗ, либо на какой-либо ее части. И в этом случае отличие неравенства $f(x) > 0$ от уравнения $f(x) = 0$ весьма существенно, поскольку уравнение решений не имеет. (Хотя и это не столь уж уникальная ситуация: уравнение $x^2 + 1 = 0$ решений не имеет, а неравенство $x^2 + 1 > 0$ имеет, но в этом нет ничего необычного.)

Беглый статистический анализ вариантов вступительных экзаменов хотя бы в МГУ в 1970–2005 гг. показывает, что логарифмических и показательных уравнений было предложено (примерно) 175, тогда как неравенств — около 250 (задачи с параметром не учтены этой статистикой, равно как и досрочные экзамены и олимпиады). И попутно хочется указать, что мастера тяготеют к неравенствам, устроенным по матрешечному принципу «всё включено»: чтобы снаружи был вроде бы просто логарифм, однако внутри у него — пара модулей, а под знаком модуля — показательная функция, увенчанная синусом-косинусом, и всё это еще вдобавок является подкоренным выражением.

Были когда-то времена, когда совершенно серьезно предлагалось решить на экзамене неравенство

$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}$$

(мехмат-76) или даже

$$x \leq 3 - \frac{1}{x-1}$$

(мехмат-77), но они, видимо, уже не вернутся. Вот образец 2006-го года:

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}} - \sqrt{1-3^{-x}}} - \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{1-9^{-x}} + 3^{-x} - 1} \geq \frac{1 + \sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}$$

(задача № 2, т. е. вторая по простоте в варианте), еще достаточно щадящий, или даже 1989-го (ВМК):

$$1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3} \log_{|\cos x|} \left(\frac{1+2\sqrt{3} \sin x}{4(1-2 \cos^2 x)} \right)}.$$

Удивляться не приходится: все мы знаем, насколько и в связи с чем возросли требования к математической подготовке современного специалиста! Как сказал поэт, «умчался век эпических поэм...»

Но приступаем...

1. Решить неравенство $0,4^{3x-1} \geq 6,25^{x+3}$.

◀ Да, с десятичными дробями нужно быть знакомыми не понаслышке. В переводе на язык дробей обыкновенных неравенство можно записать так:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+6} \quad \text{или} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2x-6},$$

что влечет за собой $3x - 1 \leq -2x - 6$ и $x \leq -1$. ▶

☞ **Ответ:** $x \in (-\infty; -1]$.

2. Решить неравенство

$$0,008^x + 5^{1-3x} + 0,04^{1,5(x+1)} < 30,04.$$

◀ Поскольку

$$0,008 = \frac{1}{125} = 5^{-3}, \quad 0,04 = \frac{1}{25} = 5^{-2},$$

мы имеем

$$5^{-3x} + 5 \cdot 5^{-3x} + 5^{-3} \cdot 5^{-3x} < 30,04$$

или

$$5^{-3x} \left(6 + \frac{1}{125}\right) = 30,04,$$

т. е.

$$6,008 \cdot 5^{-3x} < 30,04,$$

откуда $5^{-3x} < 5$ и $-3x < 1$, $x > -1/3$. ▶

☞ **Ответ:** $x \in (-1/3; +\infty)$.

3. Решить неравенство $15 \cdot 81^x - 7 \cdot 16^x \geq 5 \cdot 4^{2x+1} - 3^{4x+1}$.

◀ Орлиным взором сразу усматриваем, что задействованы два основания: 2 и 3, и преобразовываем к виду

$$18 \cdot 3^{4x} \geq 27 \cdot 2^{4x} \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{4x} \geq \frac{3}{2},$$

откуда $4x \geq 1$ и $x \geq 1/4$. ▶

☞ **Ответ:** $x \in [1/4; +\infty)$.

4. Решить неравенство

$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}$$

(не пропадать же добру).

◀ Заменяя $3^x = y > 0$, имеем $7/(y^2 - 2) \geq 2/(y - 1)$ и, после преобразований

$$\frac{(y - 3)(y - 1/2)}{(y - 1)(y - \sqrt{2})} \leq 0$$

(множитель $y + \sqrt{2}$ отбрасываем как положительный), откуда методом интервалов, $y \in [1/2; 1) \cup (\sqrt{2}; 3]$. Для нахождения x остается решить два двойных неравенства: $1/2 \leq 3^x < 1$ и $\sqrt{2} < 3^x \leq 3$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [-\log_2 3; 0) \cup ((1/2) \log_3 2; 1]$.

5. Решить неравенство

$$3^{(x+2)^2} + \frac{1}{27} \leq 3^{x^2-3} + 9^{2x+2}.$$

◀ Все показательные функции можно привести к основанию 3, однако показатели никак между собой не связаны, значит, скорее всего, понадобится разложение на множители. Перепишем неравенство так:

$$3^{x^2} \cdot 3^{4x} \cdot 3^4 + 3^{-3} \leq 3^{x^2} \cdot 3^{-3} + 3^{4x} \cdot 3^4$$

и сгруппируем попарно крайние и средние слагаемые. Получим

$$3^{x^2} \cdot 3^{4x} \cdot 3^4 - 3^{4x} \cdot 3^4 \leq 3^{x^2} \cdot 3^{-3} - 3^{-3}$$

или

$$3^{4x} \cdot 3^4 (3^{x^2} - 1) \leq 3^{-3} (3^{x^2} - 1),$$

откуда

$$(3^{x^2} - 1)(3^{4x+4} - 3^{-3}) \leq 0.$$

Так как $x^2 \geq 0$, то $3^{x^2} - 1 \geq 0$ и неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = 0, \\ 3^{4x+4} - 3^{-3} \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \leq \frac{7}{4}. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; -7/4) \cup \{0\}$.

6. Решить неравенство

$$|4^{3x} - 2^{4x+2} \cdot 3^{x+1} + 20 \cdot 12^x \cdot 3^x| \geq 8 \cdot 6^x \cdot (8^{x-1} + 6^x).$$

◀ Как мы знаем, неравенство $|a| \geq b$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} a \geq b, \\ a \leq -b. \end{cases}$$

В нашем случае первое неравенство совокупности после приведения подобных и разложения оснований степеней на простые множители принимает вид $2^{6x} - 13 \cdot 2^{4x} \cdot 3^x + 12 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x} \geq 0$ или, после деления на

$$2^{2x} \cdot 3^{2x} > 0, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 12 \geq 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq 12, \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 1, \end{cases}$$

т. е. $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_{4/3} 12; +\infty)$.

Второе неравенство совокупности аналогичным образом приводится к виду

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 11 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 28 \leq 0,$$

откуда $x \in [\log_{4/3} 4; \log_{4/3} 7]$. ▶

✎ **Ответ:** $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_{4/3} 4; \log_{4/3} 7] \cup [\log_{4/3} 12; +\infty)$.

7. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}} - \sqrt{1-3^{-x}}} - \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{1-9^{-x}} + 3^{-x} - 1} \geq \frac{1 + \sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}$$

(и это творение рук человеческих не должно пропасть).

◀ В сущности, это пример на упрощение с радикалами и присутствие показательной функции чисто номинальное: о ней приходится вспомнить, когда большая часть работы уже выполнена. Пусть $3^{-x} = a > 0$, тогда левая часть

неравенства переписывается в виде

$$\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} - \frac{a-1}{\sqrt{1-a^2}+a-1}$$

или, после разложения знаменателя второй дроби на множители,

$$\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a}(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})} = \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}},$$

что после уничтожения иррациональности в знаменателе даст нам

$$\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Но ровно тому же равна и правая часть неравенства. Таким образом, неравенство выполнено на всей ОДЗ, которая определяется условием $a < 1$ (вот это опасное место: надо не забыть, что мы сократили вторую дробь на $\sqrt{1-a}$, т.е. считаем, что $a \neq 1$). Итак, $3^{-x} < 1$, откуда $x > 0$. ►

✎ **Ответ:** $x \in (0; +\infty)$.

Кажется, назрел момент для перехода от чисто показательных неравенств к логарифмическим...

8. Решить неравенство $(x^2 - x + 1)^{|2x-3|} \leq (x^2 - x + 1)^{|3x-2|}$.

◀ Прологарифмировав неравенство по любому основанию, сохраняющему знак, например 10, получим

$$(|2x-3| - |3x-2|) \lg(x^2 - x + 1) \leq 0.$$

Решаем методом интервалов. Первая скобка обращается в нуль при $x = \pm 1$, вторая добавляет к этому еще $x = 0$. ОДЗ определяется условием $x^2 - x + 1 > 0$ и состоит из всех действительных x . Знаки в четырех полученных интервалах расставляются. ►

✎ **Ответ:** $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

9. Решить неравенство $2^{\log_{0.5} x} + x^{\log_{0.5} x} > 2,5$.

◀ Поскольку

$$2^{\log_{0.5} x} = (0,5)^{-\log_{0.5} x} = x^{-1},$$

неравенство переписывается в виде $y^{-1} + y > 2,5$, где $y = x^{\log_{0.5} x} > 0$. Оно выполнено, если $y \in (0; 1/2) \cup (2; +\infty)$. Чтобы решить неравенство $x^{\log_{0.5} x} > 2$,

прологарифмируем его по основанию 2, мы получим $-\log_2^2 x > 1$, что невозможно. Логарифмируя неравенство $x^{\log_2 x} < 1/2$ (также по основанию 2), получим

$$-\log_2^2 x > -1 \quad \text{или} \quad \log_2^2 x < 1.$$

Тогда $-1 < \log_2 x < 1$ и $1/2 < x < 2$. ►

☛ **Ответ:** $x \in (1/2; 2)$.

10. Решить неравенство $\log_{3^x-2} 16 \leq 4$.

◀ Мы помним, что желательно избегать логарифмов с основанием, зависящим от x . Перейдем к основанию 2. Мы получим

$$\frac{\log_2 16}{\log_2(3^x - 2)} \leq 4 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\log_2(3^x - 2)} \leq 1.$$

Пусть

$$\log_2(3^x - 2) = y;$$

неравенство $1/y \leq 1$ выполнено, если: 1) $y < 0$; 2) $y \geq 1$.

$$1) \log_2(3^x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < 3^x - 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < 3^x < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 2 < x < 1.$$

$$2) \log_2(3^x - 2) \geq 1 \Leftrightarrow 3^x - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x > \log_3 4. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $\log_3 2 < x < 1, x > \log_3 4$.

11. Решить неравенство

$$\frac{\log_4(x+1) - \lg(x+1)}{\lg(1-x) - \log_{25}(1-x)} \leq \log_4 25.$$

◀ Переходим, прежде всего, к десятичным логарифмам:

$$\frac{\lg(x+1)/(2 \lg 2) - \lg(x+1)}{\lg(1-x) - \lg(1-x)/(2 \lg 5)} \leq \frac{\lg 5}{\lg 2} \Leftrightarrow \frac{\lg(x+1)(1-2 \lg 2)}{\lg(1-x)(2 \lg 5 - 1)} \leq 1.$$

Но

$$1 - 2 \lg 2 = 1 - 2(1 - \lg 5) = 2 \lg 5 - 1,$$

поэтому имеем

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg(1-x)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg((x+1)/(1-x))}{\lg(1-x)} \leq 0.$$

ОДЗ определяется условиями $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ и других интервалов нет, так как числитель равен 0 только при $x = 0$ (и то же со знаменателем). Подстановка пробной точки из каждого интервала показывает, что это же объединение и будет решением неравенства. ►

☛ **Ответ:** $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

12. Решить неравенство

$$\log_{2/3} \frac{x}{x+1} + \log_{1/2} \frac{x+1}{3x} \geq 2.$$

◀ Заменяем $x/(x+1) = y$ и перейдем к десятичным логарифмам. Мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\lg y}{\lg(2/3)} - \frac{\lg(3y)}{\lg(1/2)} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{\lg y}{\lg(2/3)} + \frac{\lg 3 + \lg y}{\lg 2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\lg y}{\lg(2/3)} + \frac{\lg y}{\lg 2} \geq \\ &\geq 2 - \frac{\lg 3}{\lg 2} \Leftrightarrow \frac{\lg y \lg(4/3)}{\lg(2/3) \lg 2} \geq \frac{\lg(4/3)}{\lg 2}, \end{aligned}$$

откуда $\lg y \leq \lg(2/3)$ или $0 < y \leq 2/3$. Остается решить неравенство

$$0 < \frac{x}{x+1} \leq \frac{2}{3}.$$

☛ **Ответ:** $x \in (0; 2]$.

13. Решить неравенство $\log_2 \sqrt{3x-2} \cdot \log_x 2 \leq 1$.

◀ Воспользуемся методом интервалов. ОДЗ определяется условиями

$$3x - 2 > 0, \quad x > 0, \quad x \neq 1,$$

т. е. $x \in (2/3; 1) \cup (1; +\infty)$.

Перепишем неравенство так:

$$\frac{\log_2(3x-2)}{\log_2 x} \leq 2 \quad \text{или} \quad \frac{\log_2(3x-2) - 2 \log_2 x}{\log_2 x} \leq 0.$$

Нули числителя находятся из уравнения $x^2 = 3x - 2$, что с учетом ОДЗ дает единственное значение $x = 2$. Нуль знаменателя $x = 1$ — выколотая точка. Имеем три интервала: $(2/3; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$, на которых обычным методом расставляем знаки. ►

☛ **Ответ:** $x \in (2/3; 1) \cup [2; +\infty)$.

14. Решить неравенство

$$\log_{2|x|+1}(3x+2) - \log_{3x+2}(2|x|+1) > 0.$$

◀ Пусть $\log_{2|x|+1}(3x+2) = y$, тогда

$$y - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 1}{y} > 0 \Leftrightarrow y \in (-1; 0) \cup (1; +\infty).$$

Решим сначала неравенство

$$\log_{2|x|+1}(3x+2) > 1.$$

Поскольку при условии $x \neq 0$ основание логарифма больше 1, мы имеем

$$3x+2 > 2|x|+1,$$

откуда $x \in (-1/5; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пусть теперь

$$-1 < \log_{2|x|+1}(3x+2) < 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{2|x|+1} < 3x+2 < 1.$$

Неравенство $3x+2 < 1$ выполнено при $x < -1/3$, поэтому, решая левое неравенство, рассматриваем только случай $x < 0$, что дает нам

$$6x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right). \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x \in (-1/2; -1/3) \cup (-1/5; 0) \cup (0; +\infty)$.

15. Решить неравенство

$$\frac{1}{|7 - \log_3 3x|} + \frac{1}{|4 - \log_9 9x^2|} \leq \frac{1}{|\log_9 81x|}.$$

◀ Обозначив $\log_3 x = y$, приведем неравенство к виду

$$\frac{1}{|y-6|} + \frac{1}{|y-3|} \leq \frac{2}{|y+4|}.$$

Выглядит оно довольно уныло, но, оказывается, рутинный перебор случаев можно немного сократить, если использовать естественные ограничения.

Пусть $y > 6$, тогда имеем

$$\frac{1}{y-6} + \frac{1}{y-3} \leq \frac{2}{y+4} \quad (*).$$

При данных условиях

$$\frac{1}{y-6} > \frac{1}{y+4} \quad \text{и} \quad \frac{1}{y-3} > \frac{1}{y+4},$$

а потому левая часть неравенства (*) больше правой, и решений нет.

Пусть теперь $3 < y < 6$. Неравенство принимает вид

$$\frac{1}{6-y} + \frac{1}{y-3} \leq \frac{2}{y+4}.$$

И снова

$$\frac{1}{6-y} > \frac{1}{y+4}$$

(это неравенство равносильно неравенству $y+4 > 6-y$ или $y > 1$, что выполнено в данном случае),

$$\frac{1}{y-3} > \frac{1}{y+4},$$

так что решений нет и в данном интервале.

Если $-4 < y < 3$, мы имеем

$$\frac{1}{6-y} + \frac{1}{3-y} \leq \frac{2}{y+4},$$

и здесь уже придется решать по-честному. Поскольку все знаменатели положительны, избавляемся от них и приводим неравенство к виду $4y^2 - 19y \geq 0$, откуда $-4 < y \leq 0$. Значит,

$$-4 < \log_3 x \leq 0 \quad \text{и} \quad x \in \left(\frac{1}{81}; 1\right].$$

Если, наконец, $y < -4$, то неравенство принимает вид

$$\frac{1}{y-6} + \frac{1}{y-3} \geq \frac{2}{y+4}$$

и выполнено на всем интервале, поскольку опять

$$\frac{1}{y-6} > \frac{1}{y+4}, \quad \frac{1}{y-3} > \frac{1}{y+4}.$$

Тогда

$$\log_3 x < -4 \quad \text{и} \quad x \in \left(0; \frac{1}{81}\right).$$

☛ **Ответ:** $x \in (0; 1/81) \cup (1/81; 1]$.

Мы почти везде пользуемся методом интервалов, который, как известно, особенно эффективен при решении «многосоставных» неравенств смешанного

характера, в которых при решении иными способами пришлось бы рассматривать большое число случаев.

16. Решить неравенство

$$\frac{(3^{x+1} - 1)(|2x + 1| + x)}{(3x^2 + 10x + 3)(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2x)} \geq 0.$$

◀ Находим нули числителя и знаменателя:

$$3^{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow x = -1;$$

$$|2x + 1| + x = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = -\frac{1}{3};$$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3, \quad x = -\frac{1}{3};$$

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - 2x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Методом подстановки пробных значений из каждого интервала расставляем знаки. ▶

☛ **Ответ:** $x \in (-3; -1] \cup (-1/3; 1).$

17. Решить неравенство

$$\frac{\log_x(\pi) \cdot \arcsin(x/2)}{\sqrt{x} \cdot \sin(x - \pi/2)} \geq 0.$$

◀ Поскольку в ОДЗ входят только те x , для которых $x > 0$, неравенство равносильно такому:

$$\frac{\log_x(\pi) \cdot \arcsin(x/2)}{\cos x} \leq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\arcsin(x/2)}{\lg x \cdot \cos x} \leq 0.$$

Поскольку область определения арксинуса сужает ОДЗ до промежутка $(0; 2]$, на котором $\arcsin(x/2) > 0$, неравенство равносильно еще более упрощенному, а именно $\lg x \cdot \cos x < 0$ (знак строгий, потому что равенство нулю невозможно). Наконец включаем метод интервалов. Нули левой части: $x = 1$ и $x = \pi/2$, а для того чтобы расставить знаки, можно представить себе два стандартных графика: $y = \lg x$ и $y = \cos x$, и посмотреть, как они ведут себя на интервале $(0; 2]$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in (0; 1) \cup (\pi/2; 2].$

Теперь рассмотрим несколько примеров *экстремальных* случаев при решении неравенств.

18. Решить неравенство $3^x + 5^x + 7^x - 3 \cdot 10^x < 0$.

◀ Мы помним: поскольку фигурируют четыре существенно разных основания (ни одно из которых не является степенью другого и ни одно не раскладывается в произведение двух других), надо угадывать корень (уравнения) и делить. Корень достаточно очевиден: $x = 0$; после деления на $10^x > 0$ получаем

$$(0,3)^x + (0,5)^x + (0,7)^x < 3.$$

Слева стоит убывающая функция

$$f(x) = (0,3)^x + (0,5)^x + (0,7)^x,$$

принимаяющая значение 3 при $x = 0$, поэтому неравенство $f(x) < 3$ выполнено при $x > 0$. ▶

☞ **Ответ:** $x \in (0; +\infty)$.

19. Решить неравенство $3 \cdot 81^x - 2 \cdot 64^x < 11$.

◀ Замечая, что $x = 1/2$ является корнем уравнения $3 \cdot 81^x - 2 \cdot 64^x = 11$, приводим уравнение к виду $3 \cdot (81/64)^x - 2 = 11 \cdot 64^{-x}$ и убеждаемся, что найденный корень единственный, поскольку слева стоит возрастающая функция (основание степени больше 1), справа — убывающая. Значит, неравенство выполнено при $x < 1/2$. ▶

☞ **Ответ:** $x \in (-\infty; 1/2)$.

20. Найти положительные решения неравенства

$$2^{6x^2-7x-2} + 2^{3x^2-5x} > 9.$$

◀ Здесь найти корень уравнения

$$2^{6x^2-7x-2} + 2^{3x^2-5x} = 9$$

уже не так легко, как в предыдущем примере. Всё же попробуем это сделать. Представим уравнение в виде

$$2^{3x^2-5x}(2^{3x^2-2x-2} + 1) = 9, \quad (*)$$

и посмотрим, не возможно ли одновременное выполнение равенств

$$3x^2 - 5x = 0 \quad \text{и} \quad 3x^2 - 2x - 2 = 3.$$

На наше счастье, общим корнем этих уравнений является $x = 5/3$. Итак, корень найден, но нет ли других? Если $x > 5/3$, то

$$2^{3x^2-5x} = 2^{3x(x-5/3)} > 1$$

и, значит,

$$2^{3x^2-2x-2} = 2^{3x^2-2x-5} \cdot 2^3 > 8.$$

Таким образом, левая часть равенства (*) больше правой. Если же $0 < x < 5/3$, то левая часть меньше правой.

Завершить решение неравенства можно методом интервалов. Поскольку при $x = 1$ левая часть равна $2^{-3} + 2^{-2} < 9$, а при $x = 2$ имеем $2^8 + 2^2 > 9$, неравенство выполнено при $x > 5/3$. ►

✎ **Ответ:** $x \in (5/3; +\infty)$.

21. Решить неравенство $\log_{x-1}(2x^4 - x^6 + 1) < 0$.

◀ Логарифм отрицателен, если основание и логарифмируемое выражение лежат по разные стороны от единицы; иными словами, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1-1)(2x^4 - x^6 + 1 - 1) < 0, \\ x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ 2x^4 - x^6 + 1 > 0. \end{cases}$$

Первое неравенство дает $x \in (1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$.

Если $x > 2$, то неравенство

$$2x^4 - x^6 + 1 > 0,$$

оно же $x^6 - 2x^4 < 1$, оно же $x^4(x^2 - 2) < 1$ не выполняется, поскольку левая часть больше 32.

Если $1 < x < \sqrt{2}$, то неравенство

$$2x^4 - x^6 + 1 > 0,$$

оно же $x^6 < 2x^4 + 1$, оно же $x^2 < 2 + 1/x^4$ выполняется. ►

✎ **Ответ:** $x \in (1; \sqrt{2})$.

22. Решить неравенство $\log_2(2 - 3x) > 4x + 1$.

◀ Нарисуем графики функций $y = \log_2(2 - 3x)$ и $y = 4x + 1$ (рис. 36). Они пересекаются в точке $(0; 1)$, и из рисунка ответ очевиден: $x < 0$.

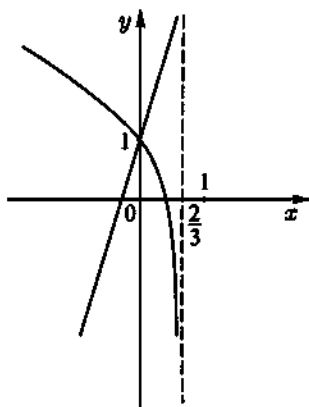


Рис. 36

«Строгое» решение выглядит, например, так.

ОДЗ определяется неравенством $2 - 3x > 0$, т. е. $x < 2/3$. Если $x < 0$, то

$$\log_2(2 - 3x) > 1, \quad 4x + 1 < 1$$

и неравенство верно. Если $0 \leq x < 2/3$, то, наоборот,

$$\log_2(2 - 3x) \leq 1, \quad 4x + 1 \geq 1$$

и неравенство не выполнено.

И, конечно, можно было бы сослаться на то, что правая часть — возрастающая функция, а левая — убывающая (доказав это). ▶

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; 0)$.

23. Решить неравенство

$$\frac{9}{3x+2} > \frac{\log_3(x+6)+1}{x}.$$

«Идеологически» это неравенство вполне аналогично предыдущему — только похуже, поскольку здесь, во-первых, нельзя угадать корень соответствующего уравнения, а во-вторых, не совсем ясно, какие графики нужно строить: график левой части построить можно, а вот график правой... Как-то не хочется. Попробуем выйти из положения, рассмотрев две возможности изменения неизвестного: 1) $x > 0$; 2) $-6 < x < 0$, $x \neq -2/3$.

При $x > 0$ неравенство можно переписать так:

$$\frac{9x}{3x+2} - 1 > \log_3(x+6) \quad \text{или} \quad \frac{6x-2}{3x+2} > \log_3(x+6).$$

Имея в виду построение графика, выделим из дроби целую часть и перепишем неравенство в виде

$$2 - \frac{6}{3x+2} > \log_3(x+6).$$

Соответственно при $-6 < x < 0$, $x \neq -2/3$ имеем

$$2 - \frac{6}{3x+2} < \log_3(x+6).$$

Для того чтобы угадать... не корни, но интервалы, на которых выполняется или не выполняется неравенство (а это необходимо), построим графики левой и правой части преобразованного неравенства (рис. 37).

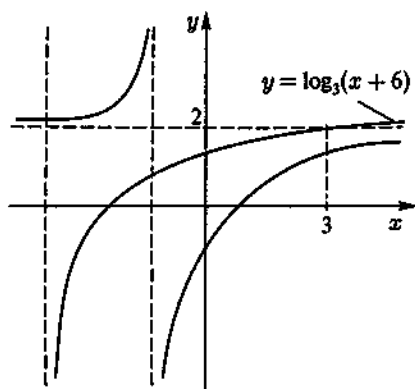


Рис. 37

Из картинки видно, что при $-6 < x < -2/3$ левая ветвь гиперболы расположена выше логарифма, т. е. в этой области решений нет. При $-2/3 < x < 0$ правая ветвь гиперболы находится ниже логарифма; таким образом, на данном интервале неравенство выполнено. При $x > 0$ неравенство снова не выполнено. Остается обосновать полученные выводы аналитически, т. е. без апелляции к графикам. Итак:

Если $-6 < x < -2/3$, то неравенство имеет вид

$$2 - \frac{6}{3x+2} < \log_3(x+6).$$

При данных условиях

$$2 - \frac{6}{3x+2} > 2, \quad \text{а} \quad \log_3(x+6) < \log_3 6 < 2,$$

т. е.

$$2 - \frac{6}{3x+2} > \log_3(x+6),$$

и решений нет.

Если $-2/3 < x < 0$, то

$$0 < 3x+2 < 2, \quad \frac{6}{3x+2} > 3,$$

поэтому

$$2 - \frac{6}{3x+2} < 0.$$

Что до логарифма, то $\log_3(x+6) > \log_3 5 > 0$. Итак, при $-2/3 < x < 0$ имеем

$$2 - \frac{6}{3x+2} < \log_3(x+6),$$

т. е. неравенство выполнено.

Пусть теперь $x > 0$. Неравенство принимает вид

$$2 - \frac{6}{3x+2} > \log_3(x+6).$$

Докажем, что в этом случае решений нет.

Если $0 < x < 4/3$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} < 1,$$

тогда как $\log_3(x+6) > \log_3 6 > 1$.

На интервале $[4/3; 2)$ функции разделяет число $5/4$, поскольку

$$2 - \frac{6}{3x+2} < \frac{5}{4},$$

в то время как

$$\log_3(x+6) > \log_3 6 > \frac{5}{4}$$

(это последнее неравенство равносильно условию $4 \log_3 6 > 5$ или $4 \log_3 2 > 1$, $\log_3 16 > 1$).

Если $2 \leq x < 3$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} < \frac{15}{11}.$$

Докажем, что

$$\log_3(x+6) > \frac{15}{11}.$$

В самом деле: прежде всего, $\log_3(x+6) \geq \log_3 8$. Но неравенство $\log_3 8 > 15/11$ равносильно неравенству $\log_3 2 > 5/11$, а это очевидно верно, поскольку

$$\log_3 2 = \frac{1}{2} \log_3 4 > \frac{1}{2}.$$

Что касается последнего случая $x \geq 3$, то здесь решений быть не может, поскольку $\log_3(x+6) \geq 2$, тогда как

$$2 - \frac{6}{3x+2} < 2.$$

☛ **Ответ:** $x \in (-2/3; 0)$.

Заметим, что в этом примере потеть нам пришлось только ради «строгого обоснования». Если понизить уровень строгости, то решение можно было закончить семью абзацами раньше. ►

После такого напряжения неплохо расслабиться на тройке изяшных трехходовок.

24. Решить неравенство $\log_4(x^2 - x - 2 + 2^{3x^2-3x-4}) \geq 1$.

◀ Пусть $x^2 - x - 2 = y$, тогда выражение под логарифмом равно $y + 4 \cdot 2^{3y}$ и является возрастающей функцией. При $y = 0$ это выражение равно 4 и, значит, логарифм равен 1. При $y > 0$ имеем $y + 4 \cdot 2^{3y} > 4$ и, значит,

$$\log_4(y + 4 \cdot 2^{3y}) > 1,$$

т. е. неравенство удовлетворяется. При $y < 0$ наоборот, $y + 4 \cdot 2^{3y} < 4$ и такие значения не годятся.

Итак,

$$y \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

25. Решить неравенство

$$\sqrt{7+8x-16x^2} \geq 2^{\cos^2 \pi x} + 2^{\sin^2 \pi x}.$$

◀ Из того, что $7 + 8x - 16x^2 = 8 - (4x - 1)^2 \leq 8$, следует неравенство

$$\sqrt{7 + 8x - 16x^2} \leq 2\sqrt{2},$$

причем равенство имеет место только при $x = 1/4$. С другой стороны,

$$2^{\cos^2 \pi x} + 2^{\sin^2 \pi x} = 2^{\cos^2 \pi x} + \frac{2}{2^{\cos^2 \pi x}} \geq 2\sqrt{2}$$

в силу неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Здесь равенство возможно только при $a = b$, откуда $2^{\cos^2 \pi x} = 1$, что при $x = 1/4$ выполнено. ▶

☞ **Ответ:** $x = 1/4$.

26. Решить неравенство

$$2x \cdot 2^x + 3x \cdot 3^x + 1 \geq \sqrt{4x + 9x^2 + 1} \cdot \sqrt{13x^2 + 1}.$$

◀ Используем скалярное произведение. Введем векторы

$$\vec{a} = (2x; 3x; 1) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (2^x; 3^x; 1).$$

Тогда неравенство имеет вид $\vec{a}\vec{b} \geq |\vec{a}||\vec{b}|$, но, поскольку всегда $\vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$, неравенство обращается в равенство $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$. В этом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, т. е. должно выполняться двойное равенство

$$\frac{2x}{2^x} = \frac{3x}{3^x} = 1.$$

Нетрудно видеть, что это возможно только при $x = 1$. Данное значение действительно является корнем уравнения. ▶

☞ **Ответ:** $x = 1$.

А закончим мы еще одним шедевром своего рода, в котором торжествует симметрия:

27. Решить неравенство

$$\frac{2^x - \sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} + \frac{x^2 - \sqrt{x}}{8 - \sqrt{x}} + \frac{8 - \sqrt{x}}{2^x - \sqrt{x}} \geq \frac{x^2 - \sqrt{x}}{2^x - \sqrt{x}} + \frac{8 - \sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} + \frac{2^x - \sqrt{x}}{8 - \sqrt{x}}.$$

◀ Если обозначить $2^x - \sqrt{x} = a$, $x^2 - \sqrt{x} = b$, $8 - \sqrt{x} = c$, то неравенство примет вид

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

и после перенесения всех дробей в левую часть и приведения к общему знаменателю преобразуется к виду

$$\frac{a^2c + b^2a + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b}{abc} \geq 0.$$

Раскладывая числитель на множители (см. пример 26 §2), имеем

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \geq 0.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получаем неравенство

$$\frac{(2^x - x^2)(x^2 - 8)(8 - 2^x)}{(2^x - \sqrt{x})(x^2 - \sqrt{x})(8 - \sqrt{x})} \geq 0$$

или, раскладывая на множители всё, что раскладывается, и, отбрасывая заведомо положительные скобки,

$$\frac{(2^x - x^2)(x - 2\sqrt{2})(2^x - 8)}{(2^x - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 8)} \geq 0.$$

Решение этого неравенства методом интервалов дает ответ

$$x \in (0; 1) \cup [2; 2\sqrt{2}] \cup [3; 4] \cup (64; +\infty).$$

При этом приходится доказывать, что уравнение $2^x = x^2$ имеет ровно два корня: $x = 2$ и $x = 4$, а уравнение $2^x = \sqrt{x}$ — ни одного. Остановимся на этих моментах.

Из рассмотрения графиков, конечно, очевидно, что $2^x > \sqrt{x}$, но если держаться того мнения, что график не аргумент, то придется вначале рассмотреть случай $0 < x \leq 1$ и тогда

$$2^x > 1 \geq \sqrt{x}.$$

Если же $x > 1$, то $2^x > x > \sqrt{x}$, причем для доказательства неравенства $2^x > x$ вводится функция $f(x) = 2^x - x$, производная которой

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0,$$

поскольку $2^x \ln 2 > 2 \ln 2 = \ln 4 > 1$. Положительность $f'(x)$ означает возрастание $f(x)$, т.е. $f(x) > f(1)$ или $2^x - x > 2 - 1 = 1 > 0$. Всё!

Уравнение $2^x = x^2$ не может иметь более трех корней (это доказывается так же, как то, что уравнение $ax^2 = kx + b$ не может иметь более двух корней), причем один из них отрицателен (и нам не подходит), а два других мы подобрали. Отрицательный же корень уравнение $2^x = x^2$ имеет потому, что непрерывная функция $y = 2^x - x^2$ положительна в точке $x = 0$ и отрицательна в точке $x = -1$, стало быть, обращается в нуль на интервале $(-1; 0)$. ►

● **Ответ:** $x \in (0; 1) \cup [2; 2\sqrt{2}] \cup [3; 4] \cup (64; +\infty)$.

Переходя к параметрам, начнем с примера, который позволит нам раз и навсегда усвоить внутреннюю сущность показательной функции.

28. Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$\left| \left(\frac{5}{8} \right)^x - a \right| < \frac{1}{2}$$

имеет ровно два целочисленных решения.

◀ Перепишем неравенство в виде

$$a - \frac{1}{2} < \left(\frac{5}{8} \right)^x < a + \frac{1}{2}$$

и сделаем предварительный качественный анализ графика функции $y = (5/8)^x$. Ясно, что если $a - 1/2 \leq 0$, то неравенство либо вообще не имеет никаких решений (если еще и $a + 1/2 \leq 0$), либо имеет их бесконечно много (в частности, и целочисленных), поскольку выполняется при

$$x > \log_{5/8} \left(a + \frac{1}{2} \right).$$

Итак, $a > 1/2$. Далее.

Если a чуть больше $1/2$, то диапазону $(a - 1/2; a + 1/2)$ отвечает почти вся нижняя часть графика (вправо от точки $(0; 1)$). И тогда целочисленных решений более двух. С другой стороны, если a много больше $1/2$, то, в силу быстроты роста показательной функции $y = (5/8)^x$ при $x < 0$, интервалу $(a - 1/2; a + 1/2)$ отвечает все меньший участок графика, так что целочисленных решений может и не быть более одного (а одно может попасть и в самый малый интервал). Осталось реализовать эти соображения.

Пусть $a \in (1/2; 3/2)$. Тогда решением неравенства заведомо является $x = 0$. Посмотрим, при каких значениях a решением будет также и $x = 1$ (а других целочисленных не будет). Ясно, что для этого нужно потребовать выполнения двух неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{8} \right)^0 < a + \frac{1}{2} \leq \left(\frac{5}{8} \right)^{-1}, \\ \left(\frac{5}{8} \right)^2 \leq a - \frac{1}{2} < \left(\frac{5}{8} \right)^1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 1 < a + \frac{1}{2} \leq \frac{8}{5}, \\ \frac{25}{64} \leq a - \frac{1}{2} < 1, \end{cases}$$

откуда $a \in [57/64; 9/8)$.

Таким же образом целочисленными решениями будут только $x = 0$ и $x = -1$, если выполнены неравенства

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{8}\right)^{-1} < a + \frac{1}{2} \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{-2}, \\ \left(\frac{5}{8}\right)^1 \leq a - \frac{1}{2} < \left(\frac{5}{8}\right)^0, \end{cases}$$

что дает $a \in [9/8; 3/2)$.

Пусть теперь $a \geq 3/2$. Тогда $x = 0$ не является решением неравенства, а числа $x = -1$ и $x = -2$ будут его единственными целыми решениями, если

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{8}\right)^{-2} < a + \frac{1}{2} \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{-3}, \\ \left(\frac{5}{8}\right)^0 \leq a - \frac{1}{2} < \left(\frac{5}{8}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Система выполнена при $a \in (103/50; 105/50)$. Диапазон крайне мал, как мы и предсказывали. Всё же рассмотрим еще один случай: $x = -2$ и $x = -3$ будут единственными целыми решениями неравенства при выполнении условий

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{8}\right)^{-3} < a + \frac{1}{2} \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{-4}, \\ \left(\frac{5}{8}\right)^{-1} \leq a - \frac{1}{2} < \left(\frac{5}{8}\right)^{-2}. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

Пора переходить к решительным действиям. Докажем, что система

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{8}\right)^n < a + \frac{1}{2} \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}, \\ \left(\frac{5}{8}\right)^{n+2} \leq a - \frac{1}{2} < \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}, \end{cases} \quad (*)$$

или

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{8}\right)^n - \frac{1}{2} < a \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{5}{8}\right)^{n+2} + \frac{1}{2} \leq a < \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

не имеет решений при целых $n \leq -3$. Для ее совместности необходимо выполнение неравенства

$$\left(\frac{5}{8}\right)^n - \frac{1}{2} < \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1} + \frac{1}{2},$$

(а также $(5/8)^{n+2} + 1/2 < (5/8)^{n-1} - 1/2$, чтобы интервалы пересекались), которое равносильно неравенству

$$\left(\frac{5}{8}\right)^n < \frac{8}{3} \quad \text{или} \quad n > \log_{5/8} \left(\frac{8}{3}\right).$$

Но $\log_{5/8}(8/3) > -3$ (поскольку это неравенство эквивалентно $8/3 < (5/8)^{-3}$ или $125 < 192$).

❖ **Ответ:** $a \in [57/64; 3/2) \cup (103/50; 105/50)$.

Разумеется, можно было сразу составить и проанализировать систему (*), умолчав о пути, которым приходит к ней робкий ученик. ►

29. При всех $a \in [-1; 0]$ решить неравенство

$$\log_{x+a}(x^2 - (a+1)x + a) \geq 1.$$

◀ Чтобы подчеркнуть принципиальную возможность решать такие задачи двумя способами, продемонстрируем в работе оба.

Первый способ (графический, более предпочтительный). Действие на плоскости $(x; a)$ происходит в полосе между горизонтальными прямыми $a = -1$ и $a = 0$ (осью Ox). Переменные $(x; a)$ должны удовлетворять условиям: $x + a > 0$, $x + a \neq 1$, откуда $a > -x$, $a \neq 1 - x$. Кроме того, нужно изобразить решение уравнения

$$\log_{x+a}(x^2 - (a+1)x + a) = 1 \quad \text{или} \quad x + a = x^2 - (a+1)x + a,$$

откуда $x = 0$ или $x = a + 2$; при этом должно быть выполнено условие $x^2 - (a+1)x + a > 0$, что даст $x < a$, $x > 1$. В результате первоначальная полоса оказывается ограничена прямой $x = 1$ и решением могут служить только точки, расположенные справа от нее, исключая лежащие на прямой $a = 1 - x$. Имеем четыре области (рис. 38), в каждой из которых неравенство либо выполнено, либо нет (аналогично методу интервалов).

Беря из каждой области по точке, определяем, что неравенство выполняется в областях 1 и 2, а также на прямых $a = -1$ и $a = 0$. Теперь для записи ответа нам нужно медленно пройти промежуток между $a = -1$ и $a = 0$. Таким образом: если $a = -1$, то решением будет $x > 2$. Если $-1 < a < -1/2$, то решением будут два интервала: $1 < x \leq a + 2$, $x > 1 - a$. При $a = -1/2$ решением будет $x > 1$, кроме точки, для которой $x = 3/2$. Если $-1/2 < a < 0$, то $1 < x < 1 - a$, $x \geq a + 2$. Наконец, при $a = 0$ решением будет $x \geq 2$.

Второй способ (аналитический, более трудоемкий). Имеем два случая.

$$1. \begin{cases} x + a > 1, \\ x^2 - (a+1)x + a \geq x + a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - a, \\ x(x - (a+2)) \geq 0. \end{cases}$$

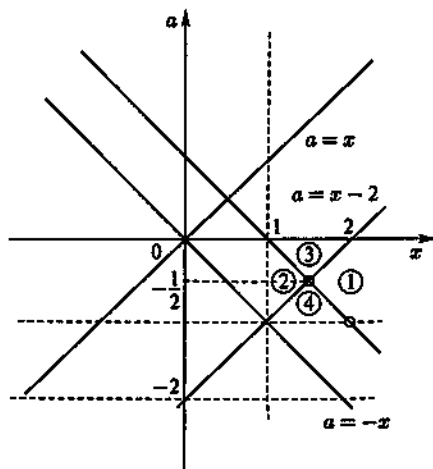


Рис. 38

Если $a + 2 > 1 - a$, т.е. $a > -1/2$, то решение системы: $x \geq a + 2$.

Если $a + 2 < 1 - a$, т.е. $a < -1/2$, то $x > 1 - a$.

Если $a = -1/2$, то $x > 1 - a = 3/2$.

$$2. \begin{cases} 0 < x + a < 1, \\ 0 < x^2 - (a + 1)x + a \leq x + a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < x < 1 - a, \\ x(x - a - 2) \leq 0, \\ (x - a)(x - 1) > 0. \end{cases}$$

Если $a = -1$, система имеет вид

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x(x - 1) \leq 0, \\ (x + 1)(x - 1) > 0. \end{cases}$$

Решений у нее нет. Аналогичная ситуация при $a = 0$.

При $-1 < a < 0$ имеем:

Если $1 - a < a + 2$, т.е. $a > -1/2$, то решение системы: $1 < x < 1 - a$.

Если $1 - a > a + 2$, т.е. $a < -1/2$, то $1 < x \leq a + 2$.

Если $a = -1/2$, то $1 < x < 1 - a = 3/2$. Таким образом: ответ: если $a = -1$, то $x > 2$; если $-1 < a < -1/2$, то $1 < x \leq a + 2$, $x > 1 - a$; если $a = -1/2$, то $1 < x < 3/2$, $x > 3/2$; если $-1/2 < a < 0$, то $1 < x < 1 - a$, $x \geq a + 2$; если $a = 0$, то $x \geq a + 2$. ►

⦿ **Ответ:** Если $a = -1$, то $x > 2$; если $-1 < a < -1/2$, то $1 < x \leq a + 2$, $x > 1 - a$; если $a = -1/2$, то $1 < x < 3/2$, $x > 3/2$; если $-1/2 < a < 0$, то $1 < x < 1 - a$, $x \geq a + 2$; если $a = 0$, то $x \geq a + 2$.

30. Найти все a , такие, что при любом b неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \log_6 \frac{x}{36} + \frac{10a + 3b + 31}{5} x^2 - 9b^2 - 9b - 1 \right| \leq \\ & \leq \log_6 \frac{36}{x} + \frac{10a + 3b + 41}{5} - (6b + 2)x + 9b^2 + 15b + 3 \end{aligned}$$

имеет хотя бы одно решение.

◀ Мы понимаем, что обилие буквенных выражений к делу не относится: оно призвано скрыть суть и отпугнуть людей робкого десятка. Поэтому для краткости обозначим

$$\frac{10a + 3b + 31}{5} = c$$

и, раскрыв модуль, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \log_6 x \leq x^2 - (3b + 1)x + (3b + 2)^2, \\ (c + 1)x^2 - (3b + 1)x + 3b + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Подставляя во второе неравенство удобное значение $b = -1/3$, имеем неравенство $(c + 1)x^2 \geq 0$, которое имеет решение при условии $c + 1 \geq 0$ (поскольку по ОДЗ $x > 0$), откуда

$$\frac{10a + 3b + 31}{5} \geq -1.$$

Подставляя $b = -1/3$, находим $a \geq -7/2$. Для начала неплохо. Что дальше? Вот вопрос.

Рассматривая первое неравенство системы, понимаем, что парабола

$$y = x^2 - (3b + 1)x + (3b + 2)^2$$

либо всегда расположена выше логарифмической кривой, либо становится выше при $x > x_0$, где $x_0 > 0$. Посмотрим внимательнее.

Итак, пусть $a \geq -7/2$; тогда

$$c + 1 \geq \frac{3b + 1}{5}$$

и если $3b + 1 \geq 0$, то первое неравенство системы заведомо выполняется при $x > x_0$, а второе — при $x > x_2$ (где x_2 — либо больший корень трехчлена, либо просто 0, если корней нет). Если же $3b + 1 < 0$, то второе неравенство опять же заведомо имеет решения (если $c + 1 \geq 0$, то все $x > 0$, если $c + 1 < 0$, то в интервале $(0; x_2)$, поскольку дискриминант положителен). Что до неравенства

$$\log_6 x \leq x^2 - (3b + 1)x + (3b + 2)^2,$$

то оно выполнено при всех $x > 0$. Действительно: левые и правые его части разделяются величиной x , т. е.

$$\log_6 x < x < x^2 - (3b + 1)x + (3b + 2)^2.$$

Неравенство $\log_6 x < x$ «очевидно из графика» (который построит читатель); а вот неравенство

$$x^2 - (3b+1)x + (3b+2)^2 > x \quad \text{или} \quad x^2 - (3b+2)x + (3b+2)^2 > 0$$

выполнено при $3b+2 \neq 0$ в силу отрицательности дискриминанта, но и при $3b+2 = 0$ тоже выполнено, поскольку в ОДЗ неравенства $x > 0$. ►

☛ **Ответ:** $a \geq -7/2$.

Примеров (особенно с параметрами) на этот раз не слишком много, но это и естественно: книга идет к концу, и пищеварение читателя уже хорошо разработано. Наша задача раздражить его и дать опытное поле для применения. Кажется, это в какой-то мере достигнуто.



Причал неразочарованных охотников

1. Решите показательные неравенства:

- а) $75 - 25^{x^2+6x-15} \geq 2 \cdot 5^{x^2+6x-14}$;
- б) $4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$;
- в) $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 150^x$;
- г) $(\sqrt{2}-1)^{x/(x+2)} > (\sqrt{2}+1)^{(x+2)/x}$;
- д) $(1/2)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{x^3+x^2-21x-45} \leq 1$;
- е) $3^{(x+3)/(5x-2)} - 4 \geq 5 \cdot 3^{(9x-7)/(5x-2)}$;
- ж) $3^{x^2+1} > 16^{x/2}$;
- з) $x^x > 2^x$.

2. Решите логарифмические неравенства:

- а) $\log_{2x-1} 2 \leq \log_{2x+1} 4$;
- б) $\log_{x^2}(x^2 + x - 1) < 0$;
- в) $\log_{x^2-2x+1}(3-x) < 1$;
- г) $\log_{x+1}(2-x) \log_{3x}(2x-1) \geq 0$;
- д) $\log_{2+\sqrt{3}}(4-x) - \log_{9-4\sqrt{3}}(4x^2+28x+49) + \log_{\sqrt{3}-2}(x^2+x-6) \leq 0$;
- е) $\log_3(1+x) > (1 - \log_x(1-x)) \log_3 x$.

3. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_4(6x+1) + |\log_{1/8}(7x+1)|}.$$

4. Сравните

$$\log_{1/2} \frac{x-1}{x} \quad \text{и} \quad \log_{2010} 1.$$

5. Решите показательно-логарифмические неравенства:

а) $\log_5(4^x - 2^{x+2} - 11)^2 \geq \log_{11}(4^x - 2^{x+2} - 11)^3;$

б) $x \geq \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2x+2}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{x+2} \cdot 2^{2x+2});$

в) $\frac{1}{x} \log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x} \right) > 1;$

г) $x \cdot 3^{\log_{1/8}(16x^4 - 8x^2 + 1)} < \frac{1}{3}.$

6. Решите неравенства смешанного типа:

а) $(5^x - 2)(7x^2 - 10x + 3) < 0;$

б) $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} - 4 \geq 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x;$

в) $2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1};$

г) $\log_3 \log_2(2 - |x+1|) < 2;$

д) $(\sqrt{17})^{1/|x|} \leq (\sqrt{18 + \sqrt{68}} - 1)^{1/x};$

е) $\sqrt{\lg \sin x} < x - 13\pi;$

ж) $\log_{|\cos x|} |x| < 0;$

з) $|3^{\lg x} - 3^{1-\lg x}| > 2;$

и) $(1 + 3 \sin 2x + 8 \cos^2 x) \log_2 \frac{2 \sin x + 1}{3} \geq 0;$

к) $2 \log_{\pi} \sin x \cdot \log_{\pi} \sin 2x - \log_{\pi}^2 \sin 2x \leq \log_{\pi}^2 \sin x;$

л) $\lg(1+y) + \arcsin(2^{|x|} + y) \geq \frac{\pi}{2};$

м) $||3^x + 4x - 9| - 8| \leq 3^x - 4x - 1;$

н) $|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leq 3^x + 4x - x^2 - 7;$

о) $(x^2 - 8x - 20) \log_{1/2} |\lg x - 2| > (8x + 20 - x^2) \log_2(\lg^2 x).$

7. Решите пятерку страшилок от Физтеха 2000-х:

$$а) \sqrt{\log_{4-x} \left(x^2 + \frac{1}{4} \right)} < \log_{(x-4)^2} \left(4x^2 - \frac{x}{4} + 1 - x^3 \right);$$

$$б) \log_8 \left(\frac{1}{3} - x \right) \log_{|2x+1/3|} \left(\frac{1}{3} - x \right) > \log_2 \frac{1/3 - x}{\sqrt[3]{(2x+1/3)^2}};$$

$$в) \sqrt{3 \ln^2(x-1)^2 + \ln^2(x+1)} > \ln(x-1)^2 + \ln(x+1);$$

$$г) \sqrt{\log_{((2|x|-x)/3)}(2x^2+3) + \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}} \leq \log_{((2|x|-x)/3)}(2x^2+3);$$

$$д) \frac{\log_{x^2} 4}{\sqrt{1/6 + \log_{x^6}(1-x)} - \sqrt{1/2}} \geq \frac{\sqrt{6}}{\log_2(1-x) - \log_4 x^4}.$$

8. Решите неравенства, используя оценки и исследования.

$$а) \log_{0,5}(x^2 - 2x - 3 + 2^{-(x-1)^2}) \leq 4;$$

$$б) \log_5(9 - 2x) < 3x - 5;$$

$$в) (8 - x)^{\log_2(8-x)} \leq 2^{3x-4};$$

$$г) \log_5(1 + \sqrt{4x}) > \log_{16}(4x);$$

$$д) x > \log_{0,5}(4 - x) + \log_2(6^x + (x-1)2^x);$$

$$е) 2^{1/\cos^2 x} \cdot \sqrt{y^2 - y + \frac{1}{2}} \leq 1;$$

$$ж) 4 \operatorname{arctg}(3 - \log_2(x+3)) \geq \pi^x;$$

$$з) 12 \cdot 2^x > 5x^2 + 9x + 10;$$

$$и) \log_2^2 x < 13 - 12|x-1|;$$

$$к) 2^{-|x-3|} \log_3(6x - x^2 - 6) \geq 1;$$

$$л) \log_6((4 + \sqrt{5})^x - (\sqrt{5} - 2)^x) \geq 1;$$

$$м) \left(x - x^2 - \frac{5}{4} \right) \log_{\sqrt{3}}(2 + 2 \cos^2 x - \cos 2x + 3 \cos^2 \pi x) \geq -2.$$

9. Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 < 0, \\ \frac{2}{x} < 2 + \frac{3}{x-1}. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0, \\ \log_3^3 x + 4 \log_3 x + 5 \geq 0. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} f'(x) < \frac{2}{5-2x}, \\ e^{f(x)} \leq \sqrt{x/2}, \end{cases} \quad \text{где } f(x) = \ln(3-x).$$

$$г) \begin{cases} 3^{2x+y-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} \leq 2, \\ 4x + y \geq 2 - \log_3 4. \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} 2^{-x} \cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

10. Найдите все пары действительных чисел (x, y) , для которых

$$\log_{|x|} \cos 1 > \log_y \cos 1.$$

11. Докажите неравенство

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\sqrt{2}/2}.$$

и определите, при каком значении x оно обращается в равенство.

12. Найдите целочисленные решения неравенства:

$$а) 3^{(5/2) \log_3(12-3x)} - 3^{\log_3 x} > 83;$$

$$б) \log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) + \\ + \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

13. Решите при всех значениях параметра a неравенства:

$$а) \log_{2a} \log_3 x^2 > 1;$$

$$б) \log_a(3a^x - 5) < x + 1.$$

14. Найдите все a , при которых неравенство:

$$а) 9^x < 20 \cdot 3^x + a \text{ не имеет ни одного целочисленного решения};$$

$$б) \log_{1/2}(x^2 + ax + 1) < 1 \text{ выполнено при всех отрицательных } x;$$

$$в) \log_{a^x-1} 9 \geq 2 \text{ имеет ровно одно целочисленное решение};$$

$$г) \log_{x+a}(ax - x^2) < \log_{x+a} x \text{ имеет хотя бы одно решение};$$

$$д) \log_{x-a} x^2 < 2 \text{ имеет хотя бы одно решение, для которого } |x| < 0,01;$$

е) $\log_{|x-a|}(x^2 + ax) \leq 2$ выполнено для всех $x \in [2; 5/2]$;

ж) $\log_2(x - 100) - \log_{1/2} \frac{|x - 101|}{105 - x} + \log_2 \frac{|x - 103|(105 - x)}{x - 100} > a$

имеет только одно целочисленное решение;

15. Найдите все $a > 0$, $a \neq 1$, при которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{a^{x+2} + a^2 - a}{a^x + 1}$$

не содержит ни одного целого числа, кратного 3.

16. Найдите все a , при которых имеет решения система

$$\begin{cases} 25^x - 5^{x+y} \leq \frac{24a - 15}{3a - 2}, \\ 3 \cdot 5^{x+y} - 4 \cdot 25^y \geq 8. \end{cases}$$

17. Найдите все a , при которых система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{4} - \frac{\pi}{16} \right) - x^2 - y^2 \right) \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

18. Найдите все a , при которых неравенство

$$\log_{1/a}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет единственное решение.

Советы и решения

Р 1. а) Обозначив $5^{x^2+6x-15} = a > 0$, получаем неравенство

$$75 - a^2 \geq 10a \Rightarrow a \in (0; 5].$$

б) Обозначив $2^x = a > 0$, $2^{\sqrt{x}} = b > 0$, решаем однородное неравенство

$$a^2 - 3ab - 4b^2 \leq 0,$$

из которого $a - 4b \leq 0$.

в) Группируем и раскладываем на множители:

$$5^{2x}(5 - 6^x) > 6(5 - 6^x), \quad (6^x - 5)(25^x - 6) < 0,$$

после чего применяем метод интервалов. При этом устанавливаем, что $\log_{25} 6 < \log_6 5$, поскольку

$$\log_{25} 6 < \frac{2}{3} < \log_6 5$$

(левое неравенство равносильно верному $\log_{25} 216 < \log_{25} 625 = 2$, правое — также верному $\log_6 125 > \log_6 36 = 2$).

г) Поскольку $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$, неравенство равносильно

$$-\frac{x}{x+2} > \frac{x+2}{x} \quad \text{или} \quad a + \frac{1}{a} < 0,$$

где $a = (x+2)/x$. Отсюда $a < 0$, т. е. $(x+2)/x < 0$.

д) Переписав неравенство в виде

$$2^{-\sqrt{(x-5)^3(x+3)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1$$

и прологарифмировав по основанию 10, получим

$$(x+3)^2(x-5) \lg 7 - (x-5)^{3/2}[x+3]^{3/2} \lg 2 \leq 0.$$

ОДЗ определяется условиями $x \in (-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$. Если $x = -3$ или $x = 5$, то неравенство выполнено. При $x > 5$ имеем

$$(x+3)^{3/2}(x-5)(\lg 7 \cdot \sqrt{x+3} - \lg 2 \cdot \sqrt{x-5}) \leq 0$$

и решений нет, поскольку все множители положительны (третий — в силу того, что $\lg 7 > \lg 2$, $x+3 > x-5$). При $x < -3$ имеем

$$(-x-3)^{3/2}(x-5)(\lg 7 \cdot \sqrt{-x-3} - \lg 2 \cdot \sqrt{x-5}) \leq 0$$

и неравенство выполнено, поскольку $x-5 < 0$, а два других множителя положительны.

е) С такой ситуацией мы уже встречались: сумма показателей равна 2, а потому имеем $3^a - 4 \geq 5 \cdot 3^{2-a}$. Решая это неравенство, получаем $a \geq \log_3 5$. Остается решить неравенство

$$\frac{x+3}{5x-2} \geq \log_3 5,$$

для чего приходится сравнивать числа

$$\frac{3+2\log_3 5}{5\log_3 5-1} \quad \text{и} \quad \frac{2}{5}$$

(первое больше: достаточно рассмотреть их разность).

ж) Логарифмируя по основанию 10, приходим к квадратному неравенству

$$x^2 - 2x \log_3 2 + 1 > 0 \quad \text{или} \quad (x - \log_3 2)^2 > \log_3^2 2 - 1,$$

которое выполнено, поскольку $0 < \log_3 2 < 1$.

з) ОДЗ: $x > 0$. Логарифмируя, получаем

$$x \lg x > x \lg 2 \quad \text{или} \quad \lg x > \lg 2 \Rightarrow x > 2.$$

Р 2. а) ОДЗ определяется условиями: $x > 1/2$, $x \neq 1$. Приводим неравенство к виду

$$\frac{\lg(2x+1) - 2 \lg(2x-1)}{\lg(2x-1)} \leq 0$$

(положительный множитель $\lg(2x+1)$ в знаменателе отбрасываем) и решаем методом интервалов.

$$б) \dots \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)(x^2 + x - 2) < 0, \\ x^2 \neq 0, \quad x^2 \neq 1, \\ x^2 + x - 1 > 0. \end{cases}$$

в) Приводим неравенство к равносильному виду

$$\lg \frac{3-x}{(x-1)^2} \lg |x-1| < 0$$

и решаем методом интервалов.

г) ОДЗ такова: $1/2 < x < 2$. Каждый множитель обращается в нуль при $x = 1$. Знаки на интервалах $(1/2; 1)$ и $(1; 2)$ отрицательные.

д) ОДЗ определяется условиями $x \in (-\infty; -3) \cup (2; 4)$, $x \neq -3,5$. Поскольку

$$9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 2)^2, \quad 2 + \sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^{-1},$$

неравенство приводится к виду

$$\log_{\sqrt{5}-2} \frac{x^2 + x - 6}{|2x + 7|(4-x)} \leq 0,$$

откуда

$$\frac{x^2 + x - 6}{|2x + 7|(4-x)} \geq 1$$

(основание логарифма меньше 1). Если $x \in (-3,5; -3) \cup (2; 4)$, то неравенство равносильно неравенству

$$x^2 + x - 6 \geq (4-x)(2x+7),$$

из которого находим

$$x \in \left(-3,5; -\sqrt{\frac{34}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{34}{3}}; 4\right).$$

При решении приходится доказывать, что $-3,5 < -\sqrt{34/3}$. Это неравенство равносильно верному неравенству $132 < 147$. При $x < -3,5$ имеем

$$x^2 + x - 6 \geq (x-4)(2x+7),$$

откуда $1 - \sqrt{23} \leq x \leq 1 + \sqrt{23}$, т.е. $1 - \sqrt{23} \leq x < -3,5$.

е) Перейдем к основанию 3 и преобразуем неравенство к виду

$$\log_3 \frac{1-x^2}{x} > 0,$$

откуда $(1-x^2)/x > 1$. При решении надо учесть ОДЗ: $0 < x < 1$.

Р 3. Имеем

$$\log_4(6x+1) + |\log_8(7x+1)| \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(7x+1) \geq -\log_4(6x+1), \\ \log_8(7x+1) \leq \log_4(6x+1). \end{cases}$$

ОДЗ определяется условием $x > -1/7$. Первое неравенство приводится к виду

$$(7x+1)^2(6x+1)^3 \geq 1.$$

Если $x < 0$, то левая часть меньше 1, если $x \geq 1$ — больше 1 и неравенство выполнено. Второе неравенство приводится к виду $(7x+1)^2 \leq (6x+1)^3$ и решается обычным порядком.

Р 4. Надо выяснить: когда выполнено неравенство

$$\log_{1/2} \frac{x-1}{x} < 0, \quad \text{когда} \quad \log_{1/2} \frac{x-1}{x} > 0 \quad \text{и когда} \quad \log_{1/2} \frac{x-1}{x} = 0.$$

Первое неравенство означает $(x-1)/x > 1$, откуда $x < 0$. Второе неравенство равносильно двойному $0 < (x-1)/x < 1$ и тогда $x > 1$. Равенство имеет место, если $(x-1)/x = 1$, но это невыполнимо.

Р 5. а) Пусть $4^x - 2^{x+2} - 11 = a$; неравенство можно привести к виду

$$\lg a \cdot (2 \log_5 10 - 3 \log_{11} 10) \geq 0.$$

Выражение в скобке отрицательно, поэтому $\lg a \leq 0$, т.е. $0 < a \leq 1$.

б) Заменяя $101 \cdot 2^x - 100 \cdot 5^x \cdot 2^{2x} = y$, перепишем неравенство в виде

$$x \geq \log_2(5^x y) - \log_5 y \Leftrightarrow \log_5(5^x y) \geq \log_2(5^x y) \Leftrightarrow \log_5(5^x y) \cdot \log_5 2 \geq \log_5(5^x y).$$

Отсюда

$$\log_5(5^x y) \leq 0 \quad \text{или} \quad 0 < 5^x y \leq 1,$$

т.е. $0 < 101 \cdot 10^x - 10^{2x} \cdot 100 \leq 1$.

в) Приведем неравенство к виду

$$\frac{1}{x} \log_5 \left(\frac{10}{3} \cdot 5^{-x} - 5^{-2x} \right) > 0$$

и решим методом интервалов.

г) Неравенство приводится к виду

$$\frac{x}{|4x^2 - 1|} < \frac{1}{3}.$$

Р 6. а) Решаем методом интервалов, по ходу доказывая, что $\log_5 2 > 3/7$ (поскольку это неравенство равносильно верному $\log_5 128 > 3 = \log_5 125$).

б) Неравенство раскладывается на множители:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x}(4^x + 1) - 4(4^x + 1) &\geq 5 \cdot 2^x(\sqrt{x} - 2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x(\sqrt{x} - 2) - 5 \cdot 2^x(\sqrt{x} - 2) &\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(2 \cdot 2^x - 5) \geq 0. \end{aligned}$$

Далее — метод интервалов без осложнений с учетом ОДЗ $x \geq 0$.

в) Решаем неравенство по схеме

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, \\ a \geq 0, \\ a < b^2. \end{cases}$$

Неравенство $2^{x+1} - 3^x > 0$ выполнено при $x < \log_{2/3}(1/2)$. Неравенство

$$5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x \geq 0$$

однородное относительно $2^x = u$ и $3^x = v$; оно приводится к виду

$$(2^x - 3^x)(3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x) \leq 0$$

и выполнено при $x \in [0; 1]$. Третье неравенство системы в тех же обозначениях приводится к виду $(4u - 3v)^2 > 0$ и выполнено при всех x , кроме $x = \log_{2/3}(3/4)$.

г) Последовательно избавляемся от логарифмов:

$$0 < \log_2(2 - |x + 1|) < 9 \Leftrightarrow 1 < 2 - |x + 1| < 512 \Leftrightarrow |x + 1| < 1.$$

д) Поскольку

$$\sqrt{18 + \sqrt{68}} = \sqrt{(1 + \sqrt{17})^2} = 1 + \sqrt{17},$$

неравенство равносильно $1/|x| \leq 1/x$.

е) Прежде всего, необходимо потребовать выполнения условий

$$\begin{cases} x > 13\pi, \\ \lg \sin x \geq 0, \end{cases}$$

откуда $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \geq 7$. Тогда неравенство выполнено, поскольку левая его часть равна 0, а правая положительна.

ж) Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x \neq \pm 1, \\ \cos x \neq 0, \\ |x| > 1. \end{cases}$$

з) Неравенство $|y - 3/y| > 2$, где $y = 3^{x/2} > 0$, выполнено при $y \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.

и) Решением уравнения $2 \sin x + 1 = 3$ является серия $x = \pi/2 + 2\pi n$, поэтому при данных значениях x неравенство выполнено. Если $x \neq \pi/2 + 2\pi n$, то логарифм строго отрицателен и неравенство сводится к $(1 + 3 \sin 2x + 8 \cos^2 x) \leq 0$, что равносильно $\sin(2x + \phi) \leq -1$, где $\phi = \arctg(4/3)$. Отсюда

$$x = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{4}{3} + \pi k.$$

Остается учесть ОДЗ, т. е. неравенство $\sin x > -1/2$. Это дает коррекцию ответа:

$$x = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{4}{3} + \pi + 2\pi k.$$

к) Не так страшно, как кажется: просто $(\log_x \sin 2x - \log_x \sin x)^2 \geq 0$, т. е.

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin 2x > 0. \end{cases}$$

л) Из условий $2^{|x|} + y \leq 1$ (область определения арксинуса), $2^{|x|} \geq 1$ следует, что $y = 0$, но тогда и $x = 0$. Подстановка в уравнение (а она нужна, поскольку первое слагаемое вообще пока не участвовало) показывает, что эта пара значений является решением.

м) Прежде всего снимаем внешний модуль:

$$\begin{cases} |3^x + 4x - 9| - 8 \leq 3^x - 4x - 1, \\ |3^x + 4x - 9| - 8 \geq -3^x + 4x + 1. \end{cases}$$

Первое неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3^x + 4x - 9 \leq 3^x - 4x + 7, \\ 3^x + 4x - 9 \geq -3^x + 4x - 7, \end{cases}$$

откуда $0 \leq x \leq 2$. Второе неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} 3^x + 4x - 9 \geq -3^x + 4x + 9, \\ 3^x + 4x - 9 \leq 3^x - 4x - 9, \end{cases}$$

решение которой $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. Пересечением служат две точки: 0 и 2.

н) Пусть $3^x - 4 = a$, $x^2 - 4x + 3 = b$; тогда неравенство имеет вид $|a| + |b| \leq a - b$. Методично разбираем 4 случая. Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то имеем $b \leq 0$, откуда $b = 0$, т.е. $x = 3$ (так как $a \geq 0$). Если $a \geq 0$, $b < 0$, то $a - b \leq a - b$, т.е.

$$\begin{cases} 3^x - 4 \geq 0, \\ x^2 - 4x + 3 < 0, \end{cases}$$

откуда $\log_3 4 \leq x < 3$. Если $a < 0$, $b \geq 0$, то $a - b \geq 0$ или $a \geq b$. Но это при рассматриваемых a и b невозможно. Наконец, при $a < 0$, $b < 0$ получаем $a \geq 0$. Противоречие.

о) Приводим неравенство к виду

$$(x - 10)(x + 2) \log_2 \frac{\lg^2 x}{|\lg x - 2|} > 0$$

и применяем метод интервалов. Поскольку по ОДЗ $x > 0$, множитель $x + 2$ можно отбросить. При расстановке знаков для удобства вычисления логарифмов в качестве пробных точек берем числа вида 10^a , например (справа налево), 10^3 , $10^{3/2}$, $10^{1/2}$, 10^{-1} и 10^{-3} .

Р 7. а) ОДЗ определяется условиями $x < 4$, $x \neq 3$ и неравенствами

$$4x^2 - \frac{x}{4} + 1 - x^3 > 0$$

(решение которого снова $x < 4$) и

$$\log_{4-x} \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) \geq 0,$$

что выполнено при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}/2] \cup [\sqrt{3}/2; 3)$. Теперь, преобразовав исходное неравенство к виду

$$\sqrt{\log_{4-x}(4x^2 + 1) - \log_{4-x} 4} < \frac{1}{2}(\log_{4-x}(4x^2 + 1) - \log_{4-x} 4)$$

и обозначив

$$y = (\log_{4-x}(4x^2 + 1) - \log_{4-x} 4),$$

решаем неравенство $2\sqrt{y} < y + 1$ или $(\sqrt{y} - 1)^2 > 0$. Оно выполнено при всех $y \geq 0$, кроме $y = 1$, что дает нам дополнительное ограничение

$$\log_{4-x}(4x^2 + 1) \neq \log_{4-x} 4,$$

откуда $x \neq -5/2$, $x \neq 3/2$.

б) Переходя к основанию 2, переписываем неравенство в виде

$$\frac{(1/3) \log_2^2(1/3 - x)}{\log_2 |2x + 1/3|} > \log_2 \left(\frac{1}{3} - x \right) - \frac{2}{3} \log_2 \left| 2x + \frac{1}{3} \right|.$$

Теперь ясно, что оно сводится к однородному, если положить $\log_2(1/3 - x) = a$, $\log_2 |2x + 1/3| = b$. Тогда если $b > 0$, т. е. $x \in (-\infty; -2/3) \cup (1/3; +\infty)$, то имеем $a^2 - 3ab + 2b^2 > 0$, откуда

$$\begin{cases} a > 2b, \\ a < b. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{3} - x > \left(2x + \frac{1}{3}\right)^2, \\ 0 < \frac{1}{3} - x < \left|2x + \frac{1}{3}\right|. \end{cases}$$

Это решаемо. Получаем часть ответа:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right).$$

При $b < 0$, т. е. при $x \in (-2/3; 1/3) \setminus \{-1/6\}$, переходим к неравенству

$$2b < a < b \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < \frac{1}{3} - x < \left|2x + \frac{1}{3}\right|, \\ \frac{1}{3} - x > \left|2x + \frac{1}{3}\right|. \end{cases}$$

откуда $x \in (0; 1/12)$.

в) Переписав неравенство в виде

$$\sqrt{12 \ln^2 |x-1| + \ln^2(x+1)} > 2 \ln |x-1| + \ln(x+1),$$

выясним, когда правая часть отрицательна (и неравенство выполнено). Решив неравенство $2 \ln |x-1| + \ln(x+1) < 0$, получим

$$x \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad x \neq 1.$$

(ОДЗ определяется условиями $x > -1$, $x \neq 1$). В случае

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

неравенство можно возвести в квадрат, привести к виду

$$\ln |x-1| \ln \frac{(x-1)^2}{x+1} > 0$$

и решить методом интервалов.

г) Пусть

$$\frac{2|x|-x}{3} = a, \quad 2x^2 + 3 = b, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}} = c.$$

Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_a b \geq 0, \\ \log_a b + c \leq \log_a^2 b. \end{cases}$$

Решая первое неравенство, получаем $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Второе неравенство преобразуем к совокупности

$$\begin{cases} \log_a b \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}, \\ \log_a b \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}. \end{cases}$$

Поскольку $c > 0$, второе неравенство решений не имеет (логарифм отрицателен). Значит, остается решить неравенство $\log_a b \geq 1/2 + \sqrt{1/4 + c}$.

Пусть $x > 3$; Докажем, что тогда неравенство выполнено. Имеем, заменив

$$\frac{x}{3} = t > 1; \quad \log_{x/3}(2x^2 + 3) = \log_t(18t^2 + 3) > \log_t 18t^2 = \log_t 18 + 2 > 2.$$

Правая часть ввиду неравенства $1/\sqrt[3]{3} < 1$ оценивается так:

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}} < \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\sqrt[3]{3}}} \right) < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) < 2.$$

Пусть теперь $x < -1$; тогда имеем

$$\log_{(-x)}(2x^2 + 3) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}.$$

Докажем, что и это неравенство выполнено при рассматриваемых значениях x . Имеем

$$\log_{(-x)}(2x^2 + 3) = \log_t(2t^2 + 3) > \log_t 2t^2 = \log_t 2 + 2 > 2,$$

где $t = -x > 1$. С другой стороны,

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}} < \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}} \right) < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) < 2.$$

д) Переносим все в левую часть, преобразовываем неравенство к виду

$$\frac{\log_{|x|}(1-x) - 2 - \sqrt{1 + \log_{|x|}(1-x) + \sqrt{3}}}{(\sqrt{1 + \log_{|x|}(1-x) + \sqrt{3}})(\log_2(1-x) - 2 \log_2 |x|)} \geq 0.$$

Нет, здесь мы не станем говорить: «применяем метод интервалов» и, дескать, всё. Нет. Обозначим

$$\sqrt{1 + \log_{|x|}(1-x)} = t;$$

тогда $\log_{|x|}(1-x) = t^2 - 1$ и дробь наша (без второй скобки знаменателя) принимает вид

$$\frac{t^2 - t + \sqrt{3} - 3}{t - \sqrt{3}} = \frac{(t^2 - 3) - (t - \sqrt{3})}{t - \sqrt{3}} = t + \sqrt{3} - 1,$$

если $t \neq \sqrt{3}$ (что выполняется по ОДЗ). Таким образом, неравенство сводится к

$$\frac{\sqrt{1 + \log_{|x|}(1-x) + \sqrt{3}} - 1}{(\log_2(1-x) - 2 \log_2 |x|)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \log_{|x|}(1-x) \geq 0, \\ \log_2(1-x) - 2 \log_2 |x| > 0. \end{cases}$$

Это уже решаемо.

Р 8. а) ... $\Leftrightarrow (x-1)^2 + 2^{-(x-1)^2} \geq 4 + 1/16$. Равенство достигается при $x = 3$. Функция $f(t) = t + 2^{-t}$ при $t = (x-1)^2 \geq 0$ является возрастающей, поскольку

$$f'(t) = 1 - 2^{-t} \ln 2 > 0$$

(неравенство $1 > 2^{-t} \ln 2$ равносильно $2^t > \ln 2$, что верно, так как $2^t > 1 = \ln e > \ln 2$). Значит, $x = 3$ — единственный корень уравнения $(x-1)^2 + 2^{-(x-1)^2} = 4 + 1/16$, поэтому неравенство выполнено при $x \geq 3$.

б) При $x = 2$ левая часть равна правой части и равна 1. При $x > 2$ левая часть меньше 1, правая — больше 1. При $x < 2$ — наоборот.

в) Логарифмируя по основанию 2, получаем

$$\log_2^3(8-x) \leq 3x-4.$$

Левая часть — убывающая функция, правая — возрастающая. Их значения совпадают при $x = 4$. ОДЗ: $x < 8$.

г) Пусть $\sqrt{4x} = y > 0$; неравенство приводится к виду $\log_y(1+y) > \log_4 5$. Как мы знаем, функция $f(t) = \log_t(t+1)$ убывающая, поэтому $0 < y < 4$.

д) Неравенство преобразуется к виду $3^x < 5 - 2x$, откуда $x < 1$. ОДЗ требует $3^x + x - 1 > 0$, значит, $x > 0$.

е) Поскольку

$$2^{1/\cos^2 x} \geq 2, \quad \sqrt{y^2 - y + \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{2},$$

неравенство удовлетворяется только при $\cos^2 x = 1$, $y = 1/2$.

ж) При $x = 1$ левая часть равна правой. При $x > 1$ левая часть меньше π , правая — больше. При $-3 < x < 1$ — наоборот.

з) Уравнение $12 \cdot 2^x = 5x^2 + 9x + 10$ имеет не более трех корней, которые необходимо найти подбором. Удачи!

и) Если $x \geq 1$, то имеем $\log_2^2 x \leq 25 - 12x$. При $1 \leq x \leq 2$ левая часть не больше 1, а правая — не меньше 1. Неравенство выполнено. При $x > 2$ роли сторон меняются — неравенство не выполнено. Если $0 < x < 1$, то имеем

$$\log_2^2 x \leq 12x + 1.$$

При $0 < x < 1/4$ левая часть больше 4, правая — меньше 4, т. е. решений нет. При $1/4 \leq x < 1$ неравенство выполнено.

к) Поскольку

$$2^{-|x-3|} \leq 2^0 = 1, \quad 6x - x^2 - 6 = 3 - (x-3)^2 \leq 3 \Rightarrow \log_3(6x - x^2 - 6) \leq 1,$$

левая часть неравенства не больше 1. Значит, $x - 3 = 0$.

л) ... $\Leftrightarrow (4 + \sqrt{5})^x - (\sqrt{5} - 2)^x > 6$. Уравнение

$$(4 + \sqrt{5})^x = 6 + (\sqrt{5} - 2)^x$$

имеет единственный корень $x = 1$ (левая часть возрастает, так как $4 + \sqrt{5} > 1$, а правая убывает, так как $\sqrt{5} - 2 < 1$). Метод интервалов дает $x > 1$.

м) Преобразуем неравенство к виду $(4x^2 - 4x + 5) \log_3(3 + 3 \cos^2 \pi x) \leq 4$. Поскольку

$$4x^2 - 4x + 5 = (2x - 1)^2 + 4 \geq 4, \quad \log_3(3 + 3 \cos^2 \pi x) \geq 1,$$

неравенство выполняется, только если одновременно $2x - 1 = 0$, $\cos \pi x = 0$.

$$\text{Р 9. а) } \dots \Leftrightarrow \begin{cases} (3^x - 1)(3^x - 9) \leq 0, \\ \frac{2x^2 - x + 2}{x(x-1)} < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполнено при $x \in [0; 2]$, второе — при $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

б) Первое неравенство приводится к виду $(3^x + 10)(3^x - 9) > 0$, откуда $x > 2$. При этих значениях x второе неравенство заведомо выполнено, так как $\log_3 x > 0$ и остальные слагаемые также положительны.

в) Поскольку $f'(x) = 1/(x-3)$, мы имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} < \frac{2}{5-2x}, \\ 0 < 3-x \leq \sqrt{\frac{x}{2}}. \end{cases}$$

Решением первого неравенства служит $x \in (-\infty; 5/2) \cup (11/4; 3)$, второго — $x \in [2; 4,5]$.

г) Первое неравенство переписывается в виде $3^{2x-1}(3^y + 4) \leq 2$, откуда

$$3^{2x-1} \leq \frac{2}{3^y + 4}.$$

С другой стороны, из второго неравенства следует, что

$$2x - 1 \geq -\log_3 2 - \frac{y}{2}$$

и таким образом,

$$3^{2x-1} \geq 3^{-\log_3 2 - y/2} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-y/2}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2} \cdot 3^{-y/2} \leq \frac{2}{3^y + 4},$$

откуда $(3^{y/2} - 2)^2 \leq 0$, т. е. $y/2 = \log_3 2$. Для нахождения x имеем систему

$$\begin{cases} 3^{2x-1} \leq \frac{1}{4}, \\ 4x \geq 2 - 2\log_3 4. \end{cases}$$

д) Здесь достигается своего рода рекорд: система равносильна системе из восьми неравенств: $2-y > 0$, $4-y > 0$, $4-y \neq 1$, $(1-x)(1-y) > 0$, $(3-y)(2x-3) > 0$, $2x-2 > 0$, $2-x > 0$, $2-x \neq 1$. Учесть все эти условия удобнее всего, глядя на координатную плоскость.

е) Домножив неравенство на 2^x , получим $y^4 - 2y^2 \cdot 2^x + 4^x \leq 0$ или $(y^2 - 2^x)^2 \leq 0$. Отсюда $y^2 = 2^x$. Подставим это в уравнение, получим

$$8^x - 4^x + 2^x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (4^x + 1)(2^x - 1) = 0.$$

Р 10. Формулировка задачи (матмех ЛГУ, 1980) может ввести в заблуждение. На самом деле, предлагается изобразить множество решений неравенства графически. Неравенство преобразуется к виду

$$\frac{\lg(y/|x|)}{\lg y \lg |x|} < 0$$

и после разбора всех случаев что-нибудь, надо полагать, получится. Предоставляем читателю завершить решение самостоятельно.

Р 11. По неравенству Коши,

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x + \cos x}} \geq 2 \cdot (2^{\sqrt{2} \sin(x + \pi/4)})^{1/2} \geq 2^{1 - \sqrt{2}/2},$$

так как $\sin(x + \pi/4) \geq -1$. Равенство возможно при выполнении условий

$$\begin{cases} \sin x = \cos x, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \end{cases}$$

т.е. при $x = 5\pi/4 + 2\pi n$.

Р 12. а) ОДЗ: $0 < x < 4$, поэтому имеется всего три кандидата на ответ: 1, 2 и 3. При $x = 1$ получаем явно верное неравенство $3^5 - 1 > 83$. При $x = 2$ надо убедиться в справедливости неравенства $36\sqrt{6} > 86$, что можно сделать возведением в квадрат. При $x = 3$ имеем явно неверное неравенство $9\sqrt{3} - 3^{\log_2 3} > 83$, поскольку уже $9\sqrt{3} < 83$.

б) Сумма чисел, стоящих под логарифмами, равна 3. Что это означает? Поскольку числа натуральные, имеется единственная возможность: каждое из них равно 1, (и вся сумма, как следствие, равна 0). Итак, во-первых,

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z + 3 = 1, \\ 3x - 5y + 2z - 2 = 1, \\ 2y + 4z - 5x + 2 = 1, \end{cases}$$

а во-вторых, $z^2 - 9z + 17 < 0$. Этому неравенству удовлетворяют четыре целых числа: 3, 4, 5 и 6. Идем дальше. Нет, не следует пытаться решить систему — ведь в ней только два уравнения независимы, а третье является их следствием. Домножая второе уравнение на 2 и вычитая из него третье, получим $11x - 12y = 7$. Это уравнение в целых числах можно переписать так: $11(x - y) - y = 7$, откуда очевидно частное решение $y = 4$, $x - y = 1$, т.е. $x = 5$. Общее решение $x = 5 + 12t$, $y = 4 + 11t$. Тогда

$$z = \frac{3 - 3x + 5y}{2} = \frac{8 + 19t}{2}.$$

Учитывая полученный ранее диапазон для z , имеем $4 < 8 + 19t < 14$. Это возможно только при $t = 0$.

Р 13. б) Имеем два случая.

$$1) \begin{cases} a > 1, \\ 0 < 3a^x - 5 < a^{x+1}, \end{cases}$$

откуда при $1 < a < 3$ получаем $\log_a(5/3) < x < \log_a(5/(3-a))$, при $a \geq 3$ имеем $x > \log_a(5/3)$.

$$2) \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 3a^x - 5 > a^{x+1}, \end{cases}$$

откуда $x < \log_a(5/(3-a))$.

Р 14. а) Условие $D \leq 0$, при котором решений вообще нет, дает $a \leq -100$. При остальных a имеем

$$10 - \sqrt{a+100} < 3^x < 10 + \sqrt{a+100}.$$

Поскольку $10 + \sqrt{a+100} > 10$, условие задачи выполнено, если $10 - \sqrt{a+100} \geq 9$, т.е. $a \leq -99$.

б) Имеем $x^2 + ax + 1/2 > 0$. Если $D < 0$, т.е. $|a| < \sqrt{2}$, то условие задачи выполнено. Если $D \geq 0$, то надо добавить два условия: $y(0) > 0$ и $x_* > 0$. Это дает $a < 0$.

в) При $a > 1$ решением неравенства является промежуток $(\log_a 2; \log_a 4]$; при $0 < a < 1$ — промежуток $[\log_a 4; \log_a 2)$. При $a > 1$ условие задачи выполнено в двух случаях:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \log_a 2 < 1, \\ 1 \leq \log_a 4 < 2, \end{cases} \quad (\text{и тогда } 2 < a \leq 4); \\ \text{б) } & \begin{cases} 1 \leq \log_a 2 < 2, \\ 2 \leq \log_a 4 < 3, \end{cases} \quad (\text{и тогда } \sqrt[3]{4} < a \leq 2). \end{aligned}$$

Если же $1 < a \leq \sqrt[3]{4}$, то $\log_a 2 \geq 3/2$, $\log_a 4 \geq 3$ и в промежуток попадает более одного целого x . Симметричную картину имеем и при $0 < a < 1$.

г) ... $\Leftrightarrow \log_{a+x} x(a-x) < \log_{a+x} x \Leftrightarrow \log_{a+x}(a-x) < 0$, что при условии $x > 0$ дает две системы:

$$1) \begin{cases} a+x > 1, \\ 0 < a-x < 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} 0 < a+x < 1, \\ a-x > 1. \end{cases}$$

Первая равносильна системе

$$\begin{cases} x > 1-a, \\ a-1 < x < a, \end{cases}$$

которая имеет решение только если $1-a < a$, откуда $a > 1/2$. Вторая система приводится к виду

$$\begin{cases} -a < x < 1-a, \\ 0 < x < a-1. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $a > 1$, но тогда из первого $x < 0$, что невозможно.

д) Неравенство распадается на две системы:

$$1) \begin{cases} x-a > 1, \\ 0 < |x| < x-a, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} 0 < x-a < 1, \\ |x| > x-a. \end{cases}$$

Решим их графически, при этом не поленимся и нарисуем для каждой свою картинку (рис. 39 а, б).

Тогда легко установим: в первом случае годится $a < -0,99$, во втором $-0,02 < a < 0$ и $0 < a < 0,01$.

е) Заменяем неравенство равносильной парой систем:

$$1) \begin{cases} |x-a| > 1, \\ 0 < x^2 + ax \leq (x-a)^2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 < |x-a| < 1, \\ x^2 + ax \geq (x-a)^2. \end{cases}$$

Решаем каждую из них графически. В первом случае нужное нам условие получается при $a \geq 15/2$; во втором — при $-2 < a \leq 0$, $3/2 < a < 2$, $5/2 < a < 3$.

ж) Пусть $2^a = b > 0$; тогда неравенство равносильно такому:

$$|(x-101)(x-103)| > b,$$

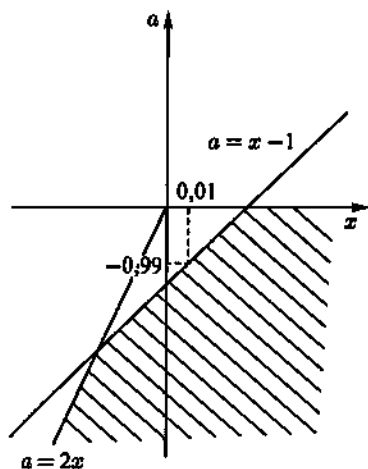


Рис. 39а

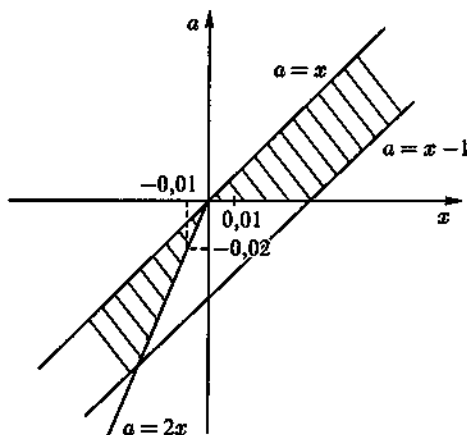


Рис. 39б

при этом $100 < x < 105$. Построив график (отраженная вверх парабола) видим, что единственным целочисленным решением должно быть $x = 104$, для чего требуем выполнения условия $1 \leq b < 3$.

Р 15. Имеем:

$$f(x) = a^2 - \frac{a}{a^x + 1}.$$

Так как $a^x + 1 > 1$, то $a^2 - a < f(x) < a^2$, причем к обеим границам функция приближается сколь угодно близко. Значит, множество значений данной функции — интервал $(a^2 - a; a^2)$. Если $0 < a < 1$, то $a^2 - a < 0$, т.е. этому интервалу принадлежит число 0, кратное трем. Итак, $a > 1$. Длина интервала $(a^2 - a; a^2)$ равна a , поэтому при $a > 3$ в него обязательно попадет число, кратное трем. Если $a = 3$, то имеем интервал $(6; 9)$, в котором чисел, кратных трем, нет. Пусть теперь $1 < a < 3$; тогда $1 < a^2 < 9$, $0 < a^2 - a < 6$. Имеется только два кратных трем числа, которые могут в данных условиях оказаться в интервале $(a^2 - a; a^2)$, это 3 и 6. Значит, надо определить, при каких a не выполнено ни одно из двойных неравенств $a^2 - a < 3 < a^2$ и $a^2 - a < 6 < a^2$. Решение первого

$$a \in \left(\sqrt{3}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right),$$

значит, нам подходит $a \in (1; \sqrt{3}]$. Решение второго $a \in (\sqrt{6}; 3)$; значит,

$$a \in \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \sqrt{6} \right].$$

Р 16. Пусть $5^x = u$, $5^y = v$, $u, v > 0$; $(24a - 15)/(3a - 2) = b$. Система переписывается в виде

$$\begin{cases} u^2 - uv \leq b, \\ 4v^2 - 3uv + 8 \leq 0 \end{cases}$$

или, благодаря условиям

$$u, v > 0, \quad \begin{cases} v \geq u - \frac{b}{u}, \\ u \geq \frac{4v}{3} + \frac{8}{3v}, \end{cases}$$

что позволяет интерпретировать ее графически. На плоскости $(u; v)$ второе неравенство задает внутреннюю часть графика функции $u = 4v/3 + 8/3v$, который имеет асимптоты $v = 0$ и $u = 4v/3$. График функции $v = u - b/u$ может пересекаться с предыдущим только при $b > 0$; он состоит из одной ветви, пересекающей ось Ou в точке $u = \sqrt{b}$ (рис. 40).

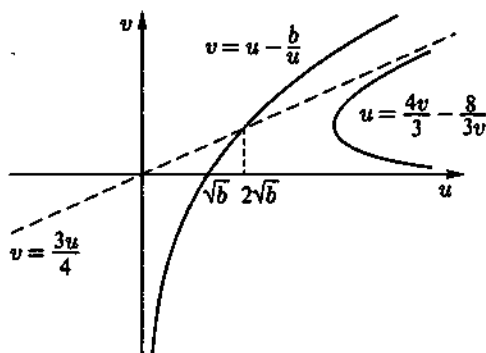


Рис. 40

Эта функция монотонно возрастает, поскольку $v' = 1 + b/u^2 > 0$. Неравенство $v \geq u - b/u$ выполнено в области над графиком (и на нем самом). Ясно, что при малых b графики не пересекаются (например, при $b = 2$), а при увеличении b кривая $v = u - b/u$ постепенно приближается к кривой $u = 4v/3 + 8/3v$ и при некотором $b = b_0$ коснется его. Начиная с этого значения, система уже будет иметь решения. Остается найти b_0 . Прежде всего, бросается в глаза, что при сложении неравенств исходной системы мы получаем неравенство $(u - 2v)^2 = b - 8$, откуда сразу следует, что $b \geq 8$. Возникает подозрение, что $b_0 = 8$ (найти b_0 иначе тоже можно, но возиться придется дольше). Проверим его. Касание кривых означает, что система

$$\begin{cases} u^2 - uv = 8, \\ 4v^2 - 3uv + 8 = 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение. Подставляя в любое из уравнений $u = 2v$, убеждаемся, что $u = 4$, $v = 2$ — единственная пара, удовлетворяющая системе. Итак, $b \geq 8$. Осталось решить неравенство

$$\frac{24a - 15}{3a - 2} \geq 8.$$

Теперь мы в состоянии предложить и *чисто аналитическое* решение исходной задачи. А именно: докажем, что при $b \geq 8$ система

$$\begin{cases} u^2 - uv \leq b, \\ 4v^2 - 3uv \leq -8, \end{cases}$$

имеет решения. Действительно: если имеет решение уравнение $u^2 - uv = 8$, то выполнено и неравенство $u^2 - uv \leq b$ (ведь $b \geq 8$). И если имеет решение уравнение $4v^2 - 3uv = -8$, то выполнено и неравенство $4v^2 - 3uv \leq -8$. Но систему уравнений

$$\begin{cases} u^2 - uv = 8, \\ 4v^2 - 3uv = -8, \end{cases}$$

мы уже решили: $u = 4$, $v = 2$.

Отметим, для будущего историка, что задача эта (ВМК, 2003) — римейк (как теперь говорят) более старой задачи (Мехмат, 1978), а именно: найти все a , при которых имеет решения система

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{(1-a)}{(1+a)}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2. \end{cases}$$

О чем это свидетельствует? Читатель делает выводы сам.

Р 17. Пусть $\pi a/4 - \pi/16 = b$; неравенство сводится к системе

$$\begin{cases} 4 \sin^2 b > x^2 + y^2 - 1, \\ 4 \sin^2 b \leq x^2 + y^2 + \sqrt{2} - 1, \end{cases} \quad (1)$$

из которой следует, что $x^2 + y^2 - 1 < 4$, т.е. $x^2 + y^2 < 5$.

Теперь удвоим второе уравнение исходной системы и вычтем из первого; мы получим равенство

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y + 1 = 2 \cos \pi x y - \cos^2 \pi x y \quad \text{или} \quad \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y + 1 = 1 - (\cos \pi x y - 1)^2.$$

Оно выполнено, только если

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ \sin \pi y = 0, \\ \cos \pi x y = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда $\operatorname{tg} \pi a = 1$, откуда $a = 1/4 + n$. Решая систему (2), находим $x = k$, $y = m$, $xy = 2t$ ($k, m, t \in \mathbb{Z}$). С учетом условия $x^2 + y^2 < 5$ находим возможные пары решений: $(0; 0)$, $(0; \pm 1)$, $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 2)$, $(\pm 2; 0)$. Теперь занимаемся системой (1). Если $a = 1/4 + n$, то она принимает вид

$$\begin{cases} 4 \sin^2 \frac{\pi n}{4} > x^2 + y^2 - 1, \\ 4 \sin^2 \frac{\pi n}{4} \leq x^2 + y^2 + \sqrt{2} - 1, \end{cases}$$

Если $n = 0$, то системе удовлетворяет только одна пара: $(0; 0)$. Если $n = 1$, то решений нет. Если $n = 2$, то система имеет 4 решения: $(0; \pm 2)$, $(\pm 2; 0)$. Другие целые значения n повторяют три разобранных случая. Итак, $\sin^2(\pi n/4) = 1$, откуда $\pi n/4 = \pi/2 + \pi k$, т.е. $n = 2 + 4k$ и, значит, $a = 9/4 + 4k$.

Р 18. Пусть

$$\sqrt{x^2 + ax + 5} = y; \quad y \geq 0.$$

Перепишем неравенство так:

$$\log_a 3 \geq \log_a(y+1) \log_3(y^2+1)$$

и рассмотрим три случая в зависимости от знака выражения $\log_a(y+1)$. После деления на $\log_a(y+1)$ получим три системы:

$$1) \begin{cases} \log_a(y+1) > 0, \\ \log_{y+1} 3 \geq \log_3(y^2+1). \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \log_a(y+1) < 0, \\ \log_{y+1} 3 \leq \log_3(y^2+1). \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \log_a(y+1) = 0, \\ \log_a 3 \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение

$$\log_{y+1} 3 = \log_3(y^2+1) \quad (*)$$

имеет единственный корень $y = 2$. Действительно, перепишем (*) так:

$$\log_3 5 = \log_3(y+1) \log_3(y^2+1);$$

правая часть — при $y \geq 0$ — возрастающая функция, поэтому корней не более одного.

Теперь решаем системы. Первая выполнена при условиях

$$\begin{cases} a > 1, \\ 0 < y \leq 2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a > 1, \\ 0 < \sqrt{x^2+ax+5} \leq 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > 1, \\ x^2+ax+1 \leq 0, \\ x^2+ax+5 > 0. \end{cases}$$

Чтобы второе неравенство этой системы имело единственное решение (для третьего это невозможно), потребуем выполнения условий

$$\begin{cases} a > 1, \\ D = 0, \end{cases}$$

что дает нам $a = 2$.

Вторая система равносильна такой:

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ y \geq 2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x^2+ax+1 \geq 0, \end{cases}$$

и второе неравенство выполнено при всех x , поскольку $D = a^2 - 4 < 0$.

Система

$$\begin{cases} \log_a(y+1) = 0, \\ \log_a 3 \geq 0. \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} y+1 = 1, \\ a > 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+ax+5 = 0, \\ a > 1. \end{cases}$$

Здесь единственное решение (а именно $x = -\sqrt{5}$) имеем при $a = 2\sqrt{5}$, однако это значение не удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $a = 2\sqrt{5}$ мы, как и в первом случае, приходим к системе

$$\begin{cases} a > 1, \\ x^2+ax+1 \leq 0, \\ x^2+ax+5 > 0, \end{cases}$$

что в данном случае означает

$$\begin{cases} x^2+2\sqrt{5} \cdot x+1 \leq 0, \\ x^2+2\sqrt{5} \cdot x+5 > 0. \end{cases}$$

Но эта система имеет более одного решения.

 Ответы

1. а) $-8 \leq x \leq 2$. б) $0 \leq x \leq 4$. в) $\log_{25} 6 < x < \log_6 5$. г) $-2 < x < 0$. д) $x \leq -3$, $x = 5$.
 е) $x < 2/5$, $x \geq (3 + 2 \log_3 5)/(5 \log_3 5 - 1)$. ж) $x \in \mathbb{R}$. з) $x > 2$; 2. а) $1/2 < x < 1$,
 $x \geq 3/2$. б) $-2 < x < -(\sqrt{5} + 1)/2$. в) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3)$. г) 1.
 д) $[1 - \sqrt{23}; -3,5) \cup (-3,5; -\sqrt{34/3}] \cup [\sqrt{34/3}; 4)$. е) $0 < x < (\sqrt{5} - 1)/2$;
 3. $x \in (-1/7; -1/8] \cup [0; +\infty)$; 4. Если $x < 0$, то первое число меньше; если
 $x > 1$, то первое число больше; 5. а) $\log_2(2 + \sqrt{15}) < x \leq \log_2 6$. б) $x \leq -2$,
 $0 \leq x < \lg 1,01$. в) $\log_5(0,3) < x < -\log_5 3$, $0 < x < \log_5 3$. г) $x < -1/2$,
 $-1/2 < x < 1/4$, $x > 1$; 6. а) $x < 3/7$, $\log_5 2 < x < 1$. б) $0 \leq x \leq \log_2(5/2)$, $x \geq 4$.
 в) $x \in [0; 1]$, $x \neq \log_{2/3}(3/4)$. г) $-2 < x < 0$. д) $x > 0$. е) $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \geq 7$.
 ж) $x < -1$, $x > 1$, $x \neq \pi n/2$. з) $\pi n - \pi/2 < x < \pi n$, $\pi/4 + \pi k < x < \pi/2 + \pi k$.
 и) $x = \pi/2 + 2\pi n$, $x = 3\pi/4 - (1/2) \arctg(4/3) + 2\pi k$. к) $(2\pi n; \pi/2 + 2\pi n)$. л) $(0; 0)$.
 м) 0; 2. н) $\log_3 4 \leq x \leq 3$. о) $x > 0,01$, $x \neq 1$, $x \neq 10$, $x \neq 100$;
 7. а) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}/2] \cup [\sqrt{3}/2; 3)$, $x \neq -5/2$, $x \neq 3/2$. б) $x < -2/3$, $0 < x < 1/12$.
 в) $x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$. г) $x < -1$, $x > 3$.
 д) $x \in ((-1 - \sqrt{5})/2; -1) \cup ((-1 - \sqrt{5})/2; 0) \cup (0; (\sqrt{5} - 1)/2)$; 8. а) $x \geq 3$.
 б) $2 < x < 4,5$. в) $4 \leq x < 8$. г) $0 < x < 4$. д) $0 < x < 1$. е) $x = \pi n$, $y = 1/2$.
 ж) $-3 < x \leq 1$. з) $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 2$. и) $1/4 \leq x \leq 2$. к) 3. л) $x > 1$. м) $1/2$;
 9. а) $1 < x < 2$. б) $x > 2$. в) $2 \leq x < 5/2$, $11/4 < x < 3$. г) $x = \log_3(3/4)/2$, $y = \log_3 4$.
 д) $3/2 < x < 2$, $1 < y < 2$. е) $(0; \pm 1)$; 11. $5\pi/4 + 2\pi n$; 12. а) 1; 2. б) $(5; 4; 4)$;
 13. а) Если $0 < a < 1/2$, то $1 < x < 3^a$, $-3^a < x < -1$; если $a > 1/2$, то $x < -3^a$,
 $x > 3^a$. В остальных случаях решений нет. б) Если $0 < a < 1$, то $x < \log_a(5/(3 - a))$;
 если $1 < a < 3$, то $\log_a(5/3) < x < \log_a(5/(3 - a))$; если $a \geq 3$, то $x > \log_a(5/3)$.
 Иначе — $\emptyset$; 14. а) $a \leq -99$. б) $a < \sqrt{2}$. в) $1/4 \leq a < 1/\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{4} < a \leq 4$.
 г) $a > 1/2$. д) $a < -0,99$, $-0,02 < a < 0$, $0 < a < 0,01$. е) $-2 < a \leq 0$, $3/2 < a < 2$,
 $5/2 < a < 3$, $a \geq 15/2$. ж) $0 \leq a < \log_2 3$; 15. $a \in (1; \sqrt{3}]$, $a \in [(1 + \sqrt{13})/2; \sqrt{6}]$,
 $a = 3$; 16. $a > 2/3$; 17. $a = 9/4 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$; 18. $a = 2$.

Глава 5

Тематическая смесь, или Ресторан господина Септима

§ 19. Только параметры, или Привет от Тристрама Шенди

Читатель, ты здесь? Странно. Я был уверен, что нормальный школьник обойдет этот раздел за несколько километров. Но раз уж ты тут, тебя ждет награда. Никаких задач с параметром здесь нет. Их и так уже довольно разбросано по параграфам (по скромным подсчетам на предыдущих страницах мы решили и разобрали не менее 200 задач с параметрами, что, кажется, не так мало в рассуждении краткости жизни — абитуриентской, конечно). И впереди еще будут...

Важная тема?.. Надо тренироваться?.. Время монстров?

Нет! Нет! Не стоит обольщаться — эти мухобойные задачи, условие которых не помещается на странице, никто не решает!.. Пыль в глаза!.. Высокий уровень требований? Никто и не спорит... Но тренироваться на решении этих ужасиков?.. Напрасная трата времени!

Что нового мог бы привнести этот параграф? Основательную разработку темы? Но она, тема эта заслуживает отдельного семестра, о ней написаны книги большого объема. Может быть, дать хотя бы последнее напутствие, какие-то жизнеутверждающие установки, которыми, как панцирем, можно снабдить будущего абитуриента, чтобы он не сразу сдался врагу-параметру при встрече с ним? Но ведь сказано же, что в математике нет царской дороги...

Правда, при современной манере (системе?) оценивания работ поступающему вовсе не обязательно доводить решение (трудной) задачи до ответа: достаточно как можно более обстоятельно поделиться своими соображениями, и это будет оценено далеко не нулевым количеством баллов. А что еще нужно?

Примерно такой методике мы и следовали, разбирая задачи с параметрами, и если посвящали свое время экземплярам, не оставляющим шансов середняку решить их, то не просто излагали самую суть в сжатом виде, а напротив — шаг за шагом исследовали все (или хотя бы некоторые) зацепки, ведущие (может быть) к решению. И старались отвечать на вопрос: а что еще можно сделать, не будучи мозговым аристократом?

Итак, «Гербарий» близок к насыщению, чего, видимо, нельзя сказать о читателе, который чего-то очень важного для себя не нашел. Ничего не поделаешь:

«Никто не обнимет необъятного, и нельзя бранить глобус за то, что на него не нанесена река Клязьма» (М. Л. Гаспаров). Все же загляните в §§ 20–23. Может быть, обнаружите потерянное...

§ 20. Хитрые задачи, или Голь¹⁾ на выдумки быстра

Хочется начать этот параграф словами Ариосто, которые Байрон поставил эпиграфом к 4-й песне поэмы «Паломничество Чайльд Гарольда»: «Visto ho Toscana, Lombardia, Romagna» Ибо я видел задачи, которые предлагаются на вступительных экзаменах, и написал эту книгу...

Как принято в математике, прежде всего — определение.

«Хитрые» задачи означают: не столько по-настоящему трудные, сколько неожиданные, непривычные — по формулировке, постановке вопроса и т. д. Эти задачи еще не убивают наповал (как те, что предлагаются в следующем параграфе), но временно лишают дара речи. Вместе с тем это также и задачи, для которых не нашлось места в рамках строгих параграфов...

1. Функция f такова, что для всех рациональных x и y имеет место равенство $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Кроме того, известно, что $f(10) = -\pi$. Найти $f(-2/7)$.

◀ Свойство $f(x+y) = f(x) + f(y)$ называется свойством *линейности* и, что вполне логично, обладает им только *линейная* функция вида $f(x) = kx$. Условие $f(10) = -\pi$ дает нам равенство $10k = -\pi$, т. е. $k = -\pi/10$. Значит,

$$f(x) = -\frac{\pi}{10}x \quad \text{и} \quad f\left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{\pi}{10}\right)\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{\pi}{35}.$$

Решение, не апеллирующее к математической культуре, может быть, например, таким.

Поскольку $f(10) = f(10+0) = f(10) + f(0)$, отсюда следует, что $f(0) = 0$. Значит,

$$f(0) = f(-x+x) = f(-x) + f(x),$$

т. е. $f(-x) = -f(x)$. Кроме того, при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$f(kx) = f(\underbrace{x+x+\dots+x}_k) = kf(x).$$

Тогда

$$f(10) = f\left(35 \cdot \frac{2}{7}\right) = 35f\left(\frac{2}{7}\right),$$

¹⁾ Эвфемизм. Задачи для вступительных экзаменов сочиняют состоятельные, уважающие себя аристократы духа. А вовсе не голодранцы-разнорабочие.

откуда

$$f\left(-\frac{2}{7}\right) = -f\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{1}{35}f(10) = \frac{\pi}{35}.$$

☞ **Ответ:** $\pi/35$.

- 2.** Найдите наименьшее значение выражения $2x - 4y$ на множестве переменных x, y , удовлетворяющих условию $4x^2 + 9y^2 = 36$.

◀ Условие $4x^2 + 9y^2 = 36$ задает на плоскости эллипс $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Если сделать замену переменных по формулам $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, то задача сведется к нахождению наименьшего значения выражения

$$2x - 4y = 6 \cos t - 8 \sin t.$$

По формуле вспомогательного угла $6 \cos t - 8 \sin t = 10 \cos(t + \phi)$, где $\operatorname{tg} \phi = 4/3$. Наименьшее значение величины $10 \cos(t + \phi)$ равно -10 (и оно достигается, например, при $t + \phi = \pi$, т. е. при

$$x = 3 \cos t = 3 \cos\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right) = -3 \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right) = -\frac{9}{5}, \quad y = \frac{8}{5}.$$

☞ **Ответ:** -10 .

- 3.** Решить в целых числах уравнение

$$\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}.$$

◀ ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 2x - y - 3 \geq 0, \\ 2y - x + 3 \geq 0, \\ 3 - x - y \geq 0, \end{cases}$$

которая приводится к виду

$$\begin{cases} y \leq 2x - 3, \\ y \geq \frac{x-3}{2}, \\ y \leq 3 - x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} \leq y \leq 2x - 3, \\ \frac{x-3}{2} \leq y \leq 3 - x. \end{cases} \quad (*)$$

Отсюда следует, что должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} \leq 2x - 3, \\ \frac{x-3}{2} \leq 3 - x. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x \in [1; 3]$. Тогда условие $y \leq 2x - 3$ дает нам $y \in [-1; 3]$, условие $y \geq (x - 3)/2$ накладывает ограничения $y \in [-1; 0]$, а условие $y \leq 3 - x$ требует $y \in [0; 2]$. Этим трем условиям удовлетворяет только $y = 0$.

Таким образом, приходим к уравнению

$$\sqrt{2x - 3} + \sqrt{3 - x} = 2\sqrt{3 - x} \quad \text{или} \quad \sqrt{2x - 3} = \sqrt{3 - x},$$

откуда $x = 2$.

Отметим, что требование целочисленности корней лишнее. Хотя оно и позволяет решить задачу графически: построить треугольник, задаваемый системой (*), и увидеть, что внутри него находится всего одна целочисленная точка (2; 0) (и три вершины, координаты которых, однако, уравнению удовлетворять не могут, поскольку обращаются в нуль только два радикала из трех). ►

☛ **Ответ:** $x = 2, y = 0$.

4. Найти сумму всех целых значений, которые принимает функция

$$y = \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{x^2}{20} + 6$$

при $x \in [2; 12]$.

◀ Нет, не бездумная подстановка всех точек отрезка $[2; 12]$, подобная вычерпыванию океана, требуется от нас: полный квадрат — вот что спасает. Это универсальное средство позволяет представить функцию в виде

$$y = 7 - \left(\frac{x}{2\sqrt{5}} - 1 \right)^2.$$

Так как $x \in [2; 12]$, то для величины $m = (x/(2\sqrt{5}) - 1)^2$ (а точнее $5m$) получаем оценку

$$6 - 2\sqrt{5} \leq 5m \leq 41 - 12\sqrt{5}.$$

Поскольку m должно быть целым числом, имеются только три значения: $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, которым соответствуют $y = 7$, $y = 6$ и $y = 5$. Искомая величина равна, таким образом $7 + 6 + 5 = 18$. ►

☛ **Ответ:** 18.

5. Вычислить $\cos 7^\circ + \cos 79^\circ + \cos 151^\circ + \cos 223^\circ + \cos 295^\circ$.

◀ Здесь хитрость состоит в том, что углы образуют арифметическую прогрессию с разностью 72° . Таким образом, если отметить на тригонометрическом круге точки, соответствующие данным углам, то эти точки будут вершинами правильного пятиугольника. Их можно рассматривать как концы соответствующих векторов, и задача, тем самым, состоит в том, чтобы найти сумму проекций этих пяти векторов на ось абсцисс (ибо косинус и есть такая проекция). Но эта сумма равна нулю, поскольку равна нулевому вектору сумма указанных пяти векторов. (Доказательство: повернем пятиугольник вокруг центра на угол 72° . Пятиугольник совпадет сам с собой, значит, не изменится и сумма рассматриваемых векторов. Но единственный вектор, который не меняется при повороте на 72° , это нулевой вектор.)

В данный момент нам даже не интересно, что эту задачу вполне можно решить путем обычных тригонометрических преобразований. (И это сделано в аналогичном примере 6 б) задач для самостоятельного решения к § 10) Не то у нас теперь в предмете. ▶

🔍 **Ответ:** 0.

6. Решить уравнение

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2 - x\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

◀ Что-то подобное уже встречалось нам в конце раздела, посвященного тригонометрическим уравнениям. Геометрия! Намеком служит число $\sqrt{3}$ — «геометрического происхождения». Строим равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC = 1$ с углом при вершине 120° и проводим к стороне AC отрезок $BD = x$ («чевиану», как говорят геометры), т. ч. $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle DBC = 90^\circ$. Тогда согласно теореме косинусов,

$$AD = \sqrt{1+x^2 - x\sqrt{3}}, \quad AC = \sqrt{3},$$

а по Пифагору, $DC = \sqrt{1+x^2}$. Таким образом, геометрически наше уравнение состоит в том, что $AD + DC = AC$.

Теперь, поскольку углы при основании треугольника ABC оказываются равными 30° (угол при вершине 120°), мы видим, что в прямоугольном треугольнике DBC катет x противолежит углу в 30° , т. е. он равен половине гипотенузы $DC = \sqrt{1+x^2}$. Имеем уравнение $2x = \sqrt{1+x^2}$, откуда $x = 1/\sqrt{3}$. ▶

🔍 **Ответ:** $1/\sqrt{3}$.

Это уравнение, конечно, можно решить и традиционным способом — двукратным возведением в квадрат. Но иногда хочется и вскрыть природу уравнения — не просто решить его. Прошу прощения у княгини Марьи Алексеевны...

7. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

◀ Задача, идейно близкая к предыдущей. Здесь использована формула для расстояния между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на координатной плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нам предлагается найти наименьшее значение, которое может принимать длина ломаной $AM + MB$, где $A(0; 1)$, $M(x; y)$, $B(1; 0)$. Но это произойдет, если точка M будет лежать на отрезке AB . И тогда сумма $AM + MB$ будет равна длине отрезка AB , т. е. $\sqrt{2}$. ▶

🔍 **Ответ:** $\sqrt{2}$.

8. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2x^2 - 1) = 1. \end{cases}$$

◀ Первое уравнение вызывает недвусмысленную ассоциацию с основным тригонометрическим тождеством. Поэтому положим $x = \cos t$, $y = \sin t$. Тогда второе уравнение примет вид

$$4 \cos t \sin t (2 \cos^2 t - 1) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2t \cos 2t = 1 \Leftrightarrow \sin 4t = 1.$$

Отсюда $t = \pi/8 + \pi n/2$. Тогда

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right), \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нет, мы не получаем здесь бесконечного множества пар. Учитывая периодичность и формулы приведения, находим четыре пары решений.

🔍 **Ответ:** $x_1 = \cos(\pi/8)$, $y_1 = \sin(\pi/8)$; $x_2 = -\sin(\pi/8)$, $y_2 = \cos(\pi/8)$; $x_3 = -\cos(\pi/8)$, $y_3 = -\sin(\pi/8)$; $x_4 = \sin(\pi/8)$, $y_4 = -\cos(\pi/8)$.

Можно подставить сюда значения

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}. \quad \blacktriangleright$$

9. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \frac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \frac{3x}{z} - 3xz = 2. \end{cases}$$

◀ Несмотря на подготовку в предыдущих примерах, заподозрить незримое присутствие Тригонометрии и здесь способен не каждый. Не-голь постаралась замести следы, и всё-таки... Перепишем систему так:

$$\begin{cases} y(1 - 9x^2) = 2x, \\ z(1 - 9y^2) = 6y, \\ 3x(1 - z^2) = 2z, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x = \frac{2z}{1 - z^2}, \\ 3y = \frac{6x}{1 - 9x^2}, \\ z = \frac{6y}{1 - 9y^2}, \end{cases}$$

Мы поставили на первое место уравнение, которое заставляет вспомнить формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Заменяя $3x = u$ и $3y = v$, мы получаем во все стороны аккуратную систему

$$\begin{cases} u = \frac{2z}{1 - z^2}, \\ v = \frac{2u}{1 - u^2}, \\ z = \frac{2v}{1 - v^2}, \end{cases}$$

которая после подстановки $u = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$ предстает в своем истинном виде, а именно

$$\begin{cases} u = \operatorname{tg} \alpha, \\ v = \operatorname{tg} 2\alpha, \\ z = \operatorname{tg} 4\alpha, \\ u = \operatorname{tg} 8\alpha. \end{cases}$$

Решением уравнения $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$ является серия $\alpha = \pi n/7$, из которой нужно исключить те значения, которые соответствуют $n = 0, \pm 7, \pm 14, \dots$

Поскольку

$$x = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 2\alpha, \quad z = \operatorname{tg} 4\alpha,$$

теперь нам остается посмотреть, сколько различных значений могут принимать данные тангенсы. С учетом того, что

$$\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}, \quad \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7},$$

для x получаем следующие значения:

$$\pm \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}, \quad \pm \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}, \quad \pm \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}.$$

Им отвечают такие значения y :

$$\pm \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}, \quad \mp \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}, \quad \mp \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}.$$

Тогда для z получаем:

$$\mp \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}, \quad \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}, \quad \mp \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}. \quad \blacktriangleright$$

☛ **Ответ:** $x = (1/3) \operatorname{tg} \alpha$, $y = (1/3) \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = \operatorname{tg} 4\alpha$, где $\alpha = \pm\pi/7$, $\pm 2\pi/7$, $\pm 3\pi/7$.

А теперь предлагаем вниманию читателя «хитрую задачу» от журнала «Квант». В № 10 за 1992 г. на с. 56 был помещен следующий пример (публикацию «Вычисления в тригонометрии» подготовил Б. Рудой).

10. Вычислить $\frac{96 \sin 80^\circ + \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}$.

◀ Нет, даже не пытайтесь, поскольку имеется в виду, конечно,

$$\frac{96 \sin 80^\circ \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}.$$

И, поскольку знаменатель

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ + 2 \sin 80^\circ \cos 30^\circ &= 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ + \sqrt{3} \cos 10^\circ = \\ &= 2 \cos 10^\circ \left(\sin 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \cos 10^\circ (\sin 10^\circ + \sin 60^\circ) = \\ &= 4 \cos 10^\circ \sin 35^\circ \cos 25^\circ = 4 \sin 80^\circ \sin 35^\circ \sin 65^\circ, \end{aligned}$$

вся дробь равна 24. ▶

Хитрость задачи усилена неправильным ответом (помещенном в № 11 за тот же год, стр. 78): 42. Привет, мол, из Зазеркалья, друзья-абитуриенты (опечатки нет: сознательное написание). Исправляю недочет любимого журнала — пусть и через 20 с лишним лет. Лучше поздно. (Кстати: в той публикации есть

и другие неточности: ответы к №№ 46 и 47 перепутаны по методу Панаева—Скабичевского из «Мастера и Маргариты».)

Скажу еще пару слов о единственном в своем роде журнале, чтобы больше к этому не возвращаться, не злопыхательствовать. Ибо «писание математических текстов — сложное искусство», как сказал классик.

Вспоминаются еще случаи: космической важности заметка в № 11 за 1977 «Как решить кубическое уравнение» — в значении: «руками разведу». Вот, мол, «подстановки», которые я случайно нашел. А? И ведь редакция еще продолжает глумиться: «Вот какой изящный способ обнаружил наш читатель». Что ж это за 400 лет никто этого не сделал?

Бесконечно уважаю «Квант» и люблю его, но, мне кажется, иногда он намеренно позволяет высказаться каким-то злым шутникам; видимо, редакции скучно без кучи ругательных писем, которые неизбежно должны следовать за такими заметками. Но опровержения никогда не печатаются. На скидку припоминаю: 1) уравнение 4-й степени в 1975 (упоминал об этом в § 4). 2) трансцендентное уравнение $\lg(x-2) = 2x - x^2 + 5$ в № 9 за 1989 г. На это уравнение я сам послал недоуменное письмо в редакцию, но ответа не получил. Ладно, закроем тему.

11. Найти все значения x , $x \in [0; \pi]$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 2 \sin 3x + 2 \cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2 \sin 7x - 2 \sin x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

◀ Преобразовывая разность синусов во втором уравнении в произведение, приходим к системе

$$\begin{cases} \sin 3x + \cos 4x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \\ \sin 3x \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Для решения составляем вспомогательное квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.$$

Его корни $t_1 = \sqrt{2}/2$, $t_2 = 1/2$. Система распадается на две:

$$1) \begin{cases} \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos 4x = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} \sin 3x = \frac{1}{2}, \\ \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Если $x \in [0; \pi]$, то $3x \in [0; 3\pi]$, $4x \in [0; 4\pi]$ и нетрудно найти решение, не выписывая общие формулы. Так, в первом случае $3x$ может принимать

значения $\pi/4$, $3\pi/4$, $9\pi/4$, $11\pi/4$, а $4x$ — значения $\pi/3$, $5\pi/3$, $7\pi/3$, $11\pi/3$. Решением служат $x_1 = \pi/12$ и $x_2 = 11\pi/12$. Во втором случае общих решений не получается. ►

☛ **Ответ:** $\pi/12$, $11\pi/12$.

Раздел «Хитрые задачи» кажется специально предназначенным для темы «Целые числа» (не говоря про числа рациональные и иррациональные). Однако достаточно хитрые задачи на делимость не столь часты в практике вступительного экзамена (в отличие от олимпиад, которых мы почти не касаемся). Поэтому добавим еще пару образчиков к тому, что было рассмотрено в §§ 1–3.

12. Доказать, что положительный корень уравнения $x^5 + x = 10$ может быть только иррациональным.

◄ Попробуйте найти изъян в следующем рассуждении.

Если данное уравнение имеет рациональный корень, то он неизбежно является целым, поскольку уравнение приведенное. Целый корень обязан быть делителем свободного члена. Поскольку числа 1, 2, 5, 10 при подстановке не подходят, уравнение рациональных корней не имеет.

Почему это уравнение вообще имеет корни? Без помощи математического анализа строго утверждать это невозможно, однако, поскольку при $x = 1$ левая часть меньше правой, а при $x = 2$ — уже намного больше, где-то между 1 и 2 находится значение, при котором обе части равны: ведь левая часть меняется непрерывно, без скачков, не правда ли? (Интервал (1; 2) можно, конечно, несколько сузить — хотя бы до (1,5; 1,6), но принципиального значения это не имеет.)

Итак, рационального корня нет, а какой-то есть. Значит, корень иррационален. (Если изъяна нет, мне непонятно, почему Г. Штейнгауз, из книги которого «Сто задач» взят этот пример, не воспользовался именно таким рассуждением, а привел доказательство, не использующее правила нахождения целого корня, которое потом повторил в своем труде и В. В. Ткачук.) ►

13. Решить уравнение

$$\left[\frac{x^2 - 2}{3} \right] = [x],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

◄ Пусть $[x] = n$. Тогда $n \leq x < n + 1$ и уравнение имеет вид $[(x^2 - 2)/3] = n$. Отсюда следует, что

$$0 \leq \frac{x^2 - 2}{3} - n < 1 \quad \text{или} \quad 3n + 2 \leq x^2 < 3n + 5.$$

Значит, целое число n должно прежде всего удовлетворять неравенству $3n+5 > 0$, откуда $n \geq -1$.

Если $n = -1$, т. е. $-1 \leq x < 0$, то неравенство $x^2 < 2$ выполнено и, таким образом, указанные значения x являются решениями уравнения.

Пусть теперь $n \geq 0$. Тогда и $x \geq 0$. Для того чтобы уравнение имело решение, должна выполняться система

$$\begin{cases} n \leq x < n+1, \\ \sqrt{3n+2} \leq x < \sqrt{3n+5}. \end{cases}$$

Ясно, что если $n+1 \leq \sqrt{3n+2}$, то решений у системы нет. Это неравенство равносильно неравенству $(n+1)^2 \leq 3n+2$ или $n^2 - n - 1 \leq 0$. Значит, $n = 0$ и $n = 1$ исключаются.

Нет решений у системы и в случае $\sqrt{3n+5} < n$, т. е. $n(n-3) > 5$. Это неравенство показывает, что нужно исключить и $n \geq 5$. Значит, допустимыми являются только $n = 2, 3, 4$.

Если $n = 2$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2 \leq x < 3, \\ \sqrt{8} \leq x < \sqrt{11}. \end{cases}$$

Ее решение $x \in [\sqrt{8}; 3)$. В случае $n = 3$ имеем аналогичную систему

$$\begin{cases} 3 \leq x < 4, \\ \sqrt{11} \leq x < \sqrt{14}, \end{cases}$$

решение которой $x \in [\sqrt{11}; \sqrt{14})$. При $n = 4$ находим $x \in [4; \sqrt{17})$. ►

☛ **Ответ:** $x \in [-1; 0) \cup [\sqrt{8}; 3) \cup [\sqrt{11}; \sqrt{14}) \cup [4; \sqrt{17})$.

И в заключение краткого набег на дикую прерию. Поскольку собственно Геометрия осталась вне рассмотрений данного «Гербария», закончим раздел парой примеров, находящихся, так сказать, на стыке школьных математических дисциплин.

14. Найти параллельный перенос, отображающий параболу $y = x^2$ на параболу $y = x^2 - 6x + 11$.

◀ Хитрость этой задачи ограничивается ее шокирующей непосвященных формулировкой. Но если заняться выделением полного квадрата, который спасает нас почти везде, то, получив $y = (x-3)^2 + 2$ или $y-2 = (x-3)^2$, мы, видимо, догадаемся, что от нас требуется определить сдвиги по осям координат, и ответом, скорее всего, является вектор $(3; 2)$. ►

☛ **Ответ:** $(3; 2)$.

15. Найти уравнение параболы $y = x^2 + bx + c$, касательная к которой в точке $(1; 1)$ перпендикулярна прямой $y = 2x + 1$.

◀ Хитрости здесь нет никакой, но если не знать условия перпендикулярности двух прямых (хотя во всех лицах и прочих школах усиленного математического режима это теперь проходят), то... придется прибегнуть к геометрии. Прямая $y = 2x + 1$ пересекает оси координат в точках $A(-1/2; 0)$ и $B(0; 1)$. Пусть через точку B проходит прямая, перпендикулярная данной, которая пересекает ось абсцисс в точке $C(x; 0)$. Тогда $BO = \sqrt{AO \cdot OC}$ в силу прямоугольности треугольника ABC , т. е.

$$1 = \sqrt{\frac{1}{2}x},$$

откуда $x = 2$. Таким образом, угловой коэффициент данной в условии касательной (ясно, что он должен быть отрицательным) равен $-BO/OC = -1/2$.

С другой стороны, угловой коэффициент касательной к данной параболы в точке $(1; 1)$ равен $y'(1)$, т. е. $2 + b$. Значит, $2 + b = -1/2$ и $b = -5/2$. Так как парабола проходит через точку $(1; 1)$, то $1 = 1 + b + c$, откуда $c = 5/2$. ►

☛ **Ответ:** $y = x^2 - (5/2)x + 5/2$.



Приют отдохновения

0. Упростите

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

(Трудно было удержаться и не включить в корпус эту классическую хитрую задачу. В чем хитрость? Увидите, когда решите, если зададите себе некий вопрос...)

1. Решите систему

$$\begin{cases} x + \sqrt{1-y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 3xy - 10y = 3, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 16y + 89} = 5. \end{cases}$$

4. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + t^2 = 9, \\ xt + yz \geq 6, \end{cases}$$

найдите такие, для которых сумма $x + z$ максимальна.

5. Решите уравнение

$$16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1 = 0.$$

6. Решите уравнение

$$x^4 - 2\sqrt{2} \cdot x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0.$$

7. Решите систему

$$\begin{cases} 4x + 3y = y^3, \\ y + 6z = 8z^3, \\ z + 6x = 32x^3. \end{cases}$$

8. Решите уравнения с несомненной тригонометрической подоплекой:

а) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} (\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}) = 2 + \sqrt{1 - x^2}.$

б) $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$

в) $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1) = 1.$

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2-6x+10}}.$$

10. Найдите сумму $x + y + z$, если

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ y^2 + yz + z^2 = 3, \\ z^2 + xz + x^2 = 4, \end{cases} \quad x, y, z > 0.$$

11. Решите уравнение

$$3|x^3 - 3x + 1| + 3|x^3 - x^2 - 3| + 10x^2 = 6x + 10.$$

12. Решите уравнение

$$\sqrt{x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16} = x^2 - 2.$$

13. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{2x - x\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{1 - 2x} \leq 0.$$

14. Разложите на множители: $1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

15. Решите уравнение

$$\int_{-3}^3 \frac{3^x - 1}{3^x + 1} dx = \log_3(2x - 7) + x - 6.$$

16. Найдите n , если

$$\frac{1}{1/(\frac{1}{\sqrt{3}-2n} + 4) + 4} + 4 = \sqrt{5} + 2.$$

17. Докажите, что из 10 целых чисел всегда можно выбрать несколько так, что их сумма будет делиться на 10.

18. Найдите уравнение образа параболы $y = x^2 + 2x + 2$ при параллельном переносе $\vec{p} = \vec{i} - \vec{j}$.

19. Найдите вектор параллельного переноса, если прямая $y = 3x - 2$ переходит в прямую $y = 3x + 4$, а прямая $3x + 2y = 2$ переходит в прямую $6x + 4y = 3$.

20. Найдите положительные решения системы

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right), \\ xy + yz + zx = 1. \end{cases}$$

Советы и решения

Р 0. Подставив в данное выражение $x = a$, $x = b$, $x = c$, видим, что всякий раз получается 1. Но само выражение — квадратный трехчлен. Может ли эта функция принимать одно и то же значение в трех разных точках? Только в том случае, когда она сводится к этой константе. (Если читателю кажется, что его обманули, пусть упростит это выражение обычным порядком. Никаких проблем не возникнет.)

Р 1. Задачу можно решать в лоб: возвести уравнения в квадрат и прийти к системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ x^2 - 2y\sqrt{3} + y^2 + 2 = 0, \end{cases}$$

выразить $x = y\sqrt{3} - 1$ и после подстановки получить $(2y - \sqrt{3})^2 = 0$.

Можно, заменив $x = \cos u$, $y = \cos v$, $0 < u, v < \pi$, получить систему

$$\begin{cases} \cos u + \sin v = 1, \\ \cos v + \sin u = \sqrt{3}, \end{cases}$$

и после возведения в квадрат получить следствие

$$\sin\left(v + \frac{\pi}{3}\right) = 1,$$

откуда $v = \pi/6$. Можно, наконец, заметив, что первое уравнение задает левую полуокружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$, а второе — нижнюю полуокружность $x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, убедиться в том, что они имеют единственную точку пересечения.

Р 2. Вспоминая скалярное произведение, вводим векторы

$$\vec{a} = (2; x), \quad \vec{b} = (\sqrt{x-1}; 5).$$

Тогда уравнение имеет вид $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$, т.е. векторы коллинеарны

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x\sqrt{x-1} = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x - 100 = 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Единственный корень $x = 5$ вполне можно подобрать.

Р 3. См. пример 33 § 6.

Р 4. Заменим $x = 2 \cos \alpha$, $y = 2 \sin \alpha$, $z = 3 \cos \beta$, $t = 3 \sin \beta$. Из неравенства получаем тогда $\sin(\alpha + \beta) \geq 1$, т.е. $\alpha + \beta = \pi/2 + 2\pi n$. С учетом этого,

$$x + z = 2 \cos \alpha + 3 \cos \beta = 2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha \leq \sqrt{13},$$

причем равенство достигается при условии $\sin(\alpha + \phi) = 1$, где $\phi = \arctg(2/3)$. Значит,

$$\alpha + \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2}{3} = \operatorname{arccotg} \frac{2}{3}.$$

Отсюда

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Аналогично находим $z = 9/\sqrt{13}$, $t = 6/\sqrt{13}$.

Р 5. Имеем

$$4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Исследовав функцию

$$y = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

видим, что все ее нули (а их три) лежат на отрезке $[-1; 1]$, значит, законна замена $x = \cos t$, сводящая уравнение к

$$\cos 3t = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = -\sin 18^\circ = \cos 108^\circ.$$

Отсюда

$$x_1 = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad x_2 = \cos 156^\circ = -\cos 24^\circ, \quad x_3 = \cos 84^\circ = \sin 6^\circ.$$

Р 6.

$$\sqrt{2} = y \Rightarrow y^2 - y(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ y = x^2 - x. \end{cases}$$

Р 7. Заменим $2x = u$, $y = 2v$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} u = 4v^3 - 3v, \\ v = 4z^3 - 3z, \\ z = 4u^3 - 3u. \end{cases} \quad (1)$$

Теперь положим

$$u = \cos \alpha, \quad v = \cos \beta, \quad z = \cos \gamma, \quad (*)$$

 $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \pi]$; получим

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos 3\beta, \\ \cos \beta = \cos 3\gamma, \\ \cos \gamma = \cos 3\alpha. \end{cases}$$

Учитывая ограничения на углы, видим, что первое уравнение выполняется в двух случаях: 1) $\alpha = 3\beta$; 2) $\alpha = 2\pi - 3\beta$. То же и со вторым и третьим уравнениями. Разбор всех случаев приводит к ответу. Например, если взять такую комбинацию:

$$\alpha = 3\beta, \quad \beta = 3\gamma, \quad \gamma = 2\pi - 3\alpha,$$

найдем $\alpha = 9\pi/14$, $\beta = 3\pi/14$, $\gamma = \pi/14$, и т.д. Для полноты изложения необходимо убедиться в том, что решениями системы (1) могут быть только такие тройки (u, v, z) , для которых

$$|u|, |v|, |z| \leq 1$$

(иначе замены $(*)$ неправомерны). Пусть $u > 1$; тогда и $z = u(4u^2 - 3) > 1$, из чего следует, что и $v > 1$. Сложив уравнения системы (1), получим

$$u^3 + v^3 + z^3 = u + v + z.$$

Но при данных условиях $u^3 > u$, $v^3 > v$, $z^3 > z$. Аналогично, если предположить, что $u < -1$, получим и $v, z < -1$ и тогда

$$u^3 < u, \quad v^3 < v, \quad z^3 < z.$$

Р 8. б) Замена $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$, преобразует уравнение к тригонометрическому уравнению

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \cos 2t + \sin 2t \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

В силу ограничений на t имеем три возможности:

$$1) \frac{t}{2} = 2t + \frac{\pi}{4}; \quad 2) \pi - \frac{t}{2} = 2t + \frac{\pi}{4}; \quad 3) \frac{t}{2} + 2\pi = 2t + \frac{\pi}{4}.$$

Только второй случай дает корень $t = 3\pi/10$.в) Если $|x| > 1$, то уравнение не выполнено, так как

$$2x^2 - 1 > 1, \quad 8x^4 - 8x^2 = 8x^2(x^2 - 1) + 1 > 1$$

и тогда левая часть уравнения по модулю больше 1. Значит, $|x| \leq 1$ и можно заменить $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$. Тогда уравнение приводится к виду

$$-8 \cos t \cos 2t \cos 4t = 1$$

и после домножения на $\sin t$ сворачивается:

$$\sin t + \sin 8t = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{9t}{2}\right) \cos\left(\frac{7t}{2}\right) = 0.$$

Осталось отобрать корни, удовлетворяющие условию $t \in (0; \pi)$.

Р 9. При $x \neq 5/8$ имеем

$$y = \frac{8x - 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}} = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$$

(мы домножили на сопряженное). Заменяя $x - 1 = t$, получим

$$y = \sqrt{(t+2)^2 + 4} + \sqrt{(t-2)^2 + 1}.$$

Данная сумма есть длина ломаной BAC , где точки имеют координаты: $A(t; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(2; 1)$. Если отразить точку B относительно оси абсцисс, станет ясно, что данная длина минимальна при $A \in B'C$, где $B'(-2; -2)$. Уравнение прямой $B'C$ легко пишется — это $y = (3/4)t - 1/2$. Эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $t = 2/3$. Это и есть искомое значение аргумента. Тогда $y = 5$. И, поскольку $y(5/8) = 0$, $y_{\min} = 5$.

Р 10. Рассмотрим треугольник со сторонами 1, $\sqrt{3}$ и 2. Тогда x , y и z — длины отрезков, соединяющих точку O (из которой каждая сторона видна под углом 120°) с вершинами. Угол, лежащий против стороны длиной $\sqrt{3}$ равен (по теореме косинусов) 60° ; тогда площадь треугольника равна $\sqrt{3}/2$. Но с другой стороны, эта площадь равна

$$\frac{1}{2}(xy + yz + xz) \sin 120^\circ.$$

Таким образом, $xy + yz + xz = 2$. Сложив все уравнения системы, получим

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2 = 8,$$

откуда $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Значит,

$$(x + y + z)^2 = 3 + 4 = 7.$$

Р 11. Имеем

$$3|x^3 - 3x + 1| + 3|x^3 - x^2 - 3| = -(10x^2 - 6x - 10),$$

откуда прежде всего $10x^2 - 6x - 10 \leq 0$, что дает

$$\frac{3 - \sqrt{109}}{10} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{109}}{10}$$

или примерно $-0,8 \leq x \leq 1,4$ (*) (с запасом). Поскольку нули подмодульных выражений не находятся, раскроем модули формально по определению, а потом сделаем проверку найденных корней.

Если $x^3 - 3x + 1 \geq 0$, $x^3 - x^2 - 3 \geq 0$, получаем уравнение $6x^3 + 7x^2 - 15x - 16 = 0$, имеющее корни

$$x = -1, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{385}}{12},$$

ни один из которых не удовлетворяет условию.

Если $x^3 - 3x + 1 \geq 0$, $x^3 - x^2 - 3 < 0$, получаем уравнение

$$13x^2 - 15x + 2 = 0$$

с корнями $x = 1$ и $x = 2/13$. Первый корень не удовлетворяет условию $x^3 - 3x + 1 \geq 0$, а второй подходит.

Если $x^3 - 3x + 1 < 0$, $x^3 - x^2 - 3 < 0$, то имеем $6x^3 - 13x^2 - 3x + 4 = 0$, откуда

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6}.$$

Первый корень удовлетворяет всем условиям, второй (большой) не подходит, поскольку он больше 2, третий (явно заключенный в интервале $(-1; 0)$) не удовлетворяет условию

$$x^3 - 3x + 1 < 0.$$

Наконец, если

$$x^3 - 3x + 1 < 0, \quad x^3 - x^2 - 3 \geq 0, \quad \text{то} \quad 7x^2 + 3x - 22 = 0,$$

откуда $x = -2$ (не подходит) или $x = 11/7 > 1,5$ (не подходит). Пример не ахти что такое, но вы никогда не сможете переоценить хитроумие составителей экзаменационных задач, что показывает и уравнение примера 12.

Р 12. Под радикалом стоит $(x^2 - 2)^4$, поэтому имеем $(x^2 - 2)^2 = x^2 - 2$.

Р 13. Переписанное в виде

$$\sqrt{x} \leq \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x\sqrt{x}-2x+1}$$

неравенство можно представить коротко так:

$$\sqrt[3]{a+b} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}, \quad (*)$$

причем $a+b \geq 0$, что еще не означает

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \geq 0.$$

Однако, предположив, что имеет место $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} < 0$, получим $a < -b$, т. е.

$$2x-1 < -x\sqrt{x}+2x-1 \quad \text{или} \quad x\sqrt{x} < 0,$$

что невозможно. Таким образом, мы имеем право возвести неравенство (*) в куб, что даст нам $ab \geq 0$, т. е.

$$(2x-1)(x\sqrt{x}-2x+1) \geq 0 \quad \text{или} \quad (2x-1)(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}-1) \geq 0.$$

Р 14. Имеем вначале

$$4\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

но поскольку требуется, видимо, что-то иное, продолжаем так:

$$4(\sin 54^\circ + \sin 60^\circ) = 2 \sin 57^\circ \cos 3^\circ.$$

Р 15. Хитрость в том, что интеграл равен нулю — как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. Остальное, как говорится, дело техники: уравнение

$$\log_3(2x-7) = 6-x$$

имеет не более одного корня, поскольку левая часть — функция возрастающая, правая — убывающая. Подбор дает $x = 5$, но... Неожиданно открывается тема для дискуссии. Не забудем, что интеграл берется по отрезку $[-3; 3]$, стало быть, данный корень не входит в ОДЗ. Это уже не говоря о том, что логарифм определен только при $x > 3,5$, т. е. с самого начала вроде бы ясно, что решений нет. (Или вы не согласны?..) Такие дискуссии иногда возникают во вступительной практике... Решите сами, какой ответ вам более по душе.

Р 16. Переноса 4 в правую часть, получим справа

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}.$$

Это позволяет нам уменьшить дробь слева на 1 этаж. Снова переноса 4 вправо и повторяя операцию дважды, получим $\sqrt{5} - 2n = \sqrt{5} + 2$, откуда $n = -1$.

Р 17. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ — данные числа. Рассмотрим числа

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad b_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}.$$

Если среди чисел b_k хотя бы одно делится на 10, утверждение доказано. Если же нет ни одного делящегося на 10, то найдутся хотя бы два, например b_m и b_n , дающие одинаковые остатки при делении на 10 (поскольку разных ненулевых остатков 9, а чисел 10). Их разность делится на 10 и представляет собой сумму нескольких a_k , поскольку (пусть $b_m > b_n$)

$$b_m - b_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m.$$

Р 18. Параллельный перенос на вектор $\vec{p} = (a, b)$ — это преобразование (плоскости), при котором точка с координатами (x, y) переходит в точку (x', y') , причем

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Поскольку $\vec{p} = (1; -1)$, мы имеем $x' = x + 1$, $y' = y - 1$, т.е. данная парабола $y - 1 = (x + 1)^2$ становится параболой $y' = (x')^2$, т.е. параболой $y = x^2$.

Р 19. Пусть $\vec{p} = (a, b)$ — искомый вектор, тогда $x' = x + a$, $y' = y + b$. По условию, прямая $y = 3x - 2$ переходит в прямую $y' = 3x' + 4$, откуда

$$y + b = 3x + 3a + 4.$$

Значит, $3a - b = -6$. Аналогично из второго условия получаем $3a + 2b = -1/2$. Решая данные два уравнения как систему, находим $a = -25/18$, $b = 11/6$.

Р 20. Числа 3, 4, 5 наводят на мысль о прямоугольном треугольнике, а второе уравнение вызывает в памяти тождество

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1,$$

верное в случае $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$. Эти соображения оправдывают введение новых переменных по формулам $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, $z = \operatorname{tg} \gamma$. Тогда $x + 1/x = 2/\sin 2\alpha$, $y + 1/y = 2/\sin 2\beta$, $z + 1/z = 2/\sin 2\gamma$ и первое уравнение принимает вид

$$\frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma}.$$

Поскольку $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$, имеем теорему синусов для «египетского» треугольника, т.е. $2\gamma = 90^\circ$, откуда $z = 1$;

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{5} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

откуда $x = \operatorname{tg} \alpha = 1/3$, аналогично $\sin 2\beta = 4/5$, откуда $y = 1/2$.

Ответы

0. 1; 1. $(1/2; \sqrt{3}/2)$; 2. 5; 3. $(3, 5; 6)$; 4. $(4/\sqrt{13}; 6/\sqrt{13}; 9/\sqrt{13}; 6/\sqrt{13})$;
 5. $-\cos 24^\circ; \sin 6^\circ; \cos 36^\circ$; 6. $(-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3})/2, (1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 1})/2$;
 7. $((1/2) \cos(\pi n/13); 2 \cos(9\pi n/13); \cos(3\pi n/13))$, $n = 0, 1, \dots, 13$;
 $((1/2) \cos(\pi k/14); 2 \cos(9\pi k/14); \cos(3\pi k/14))$, $k = 0, 1, \dots, 13$; 8. а) $\sqrt{2}/2$.
 б) $\cos(3\pi/10)$. в) $\cos(\pi n/9)$, $n = 2, 4, 6, 8$; $\cos(\pi k/7)$, $k = 1, 3, 5$; 9. 5; 10. $\sqrt{7}$;
 11. $2/13, 1/2$; 12. $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$; 13. $x = 0, 1/2 \leq x \leq 1, x \geq (3 + \sqrt{5})/2$;
 14. $2 \sin 57^\circ \cos 3^\circ$; 15. $\emptyset$; 16. -1 ; 18. $y = x^2$; 19. $(-25/18; 11/6)$;
 20. $(1/3; 1/2; 1)$.

§ 21. Трудные задачи, или Без паники, майор Кардош!

*Nur für Schwindelfreie*¹⁾...

Из альпийских воспоминаний Л. Шестова

Такой параграф нужен, хотя дать строгое определение трудной задачи и... трудно.

Всё-таки: *трудными* мы назовем здесь задачи, которые, во-первых, несомненно, *хитрые*, но, кроме того, такие, что для них может понадобиться не только неожиданный шаг, выход в иную область, но и (нередко, титанический) труд — иначе ответа не видать. (Однако смиренно признаем, что «трудность» задачи может означать и всего лишь чью-то неспособность отыскать красивое короткое решение.)

Такой параграф необходим, чтобы собрать здесь утонченное общество монстров всех мастей и направлений. Ну, не всех, конечно, но хотя бы заглянуть в осиное гнездо... Как пишет несравненный В. В. Ткачук, «внематематические аспекты»... Которые играют немалую роль в математическом образовании... Одним, словом, ниже предложены задачи, которые, собственно, никаким целям не служат, поскольку решить их могут лишь несколько человек в поколении, но они (задачи) упорно появляются на свет, удваивая какие-то нереализованные потенции несчастных педагогов, не желающих, чтобы их убила *scambe geretita* («повторяемая капуста») Ювенала.

Нет, мы не станем ограничивать себя богатейшим собранием пятых и шестых задач вступительных экзаменов в МГУ (поскольку он уже имеется у В. В. Ткачука), хотя и не сможем удержаться от обсуждения некоторых памятных образчиков, и тем более — обойдем стороной задачи олимпиадные — раскраски и прочее. Мы соберем здесь просто трудные школьные задачи. Вот и всё. «На заказ», так сказать, для тех учеников, которым скучно «изучать тему». В нашем ресторане не слишком изысканное, но довольно разнообразное меню; надеемся,

¹⁾ Только для не боящихся головокружения.

оно хотя бы отчасти удовлетворит начинающего гурмана, развлечет ершистого и дерзновенного юнца в часы досуга. Пока судьба его еще не зависит от того, решит он задачу или нет.

1. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$\sqrt[5]{x^2 + 44p - 4px - 12p^2 - 7} + \sqrt[5]{99x^2 + 112p^2 + 4px + 169} = \\ = \sqrt[5]{100x^2 + 100p^2 - 6x + 44p + 162}$$

имеет ровно 1 решение, а также само это решение.

◀ В принципе, не так трудно заметить, что сумма подкоренных выражений в левой части даёт подкоренное выражение в правой, т. е. что уравнение можно представить в виде

$$\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a+b},$$

откуда, снова «в принципе», можно предположить, что такое равенство возможно только в трёх случаях:

1) $a = 0$; 2) $b = 0$; 3) $a = -b$.

И, в принципе, не так уж и трудно это доказать. Правда, нужно знать формулу бинома

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5,$$

но это, как говорится, *должен знать каждый...* Подтвердим предположение о трех случаях. Возводя равенство

$$\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a+b}$$

в 5-ю степень, приводя подобные и вынося за скобки общий множитель, получим:

$$\sqrt[5]{ab}(\sqrt[5]{a^3} + 2\sqrt[5]{a^2b} + 2\sqrt[5]{ab^2} + \sqrt[5]{b^3}) = 0,$$

или, раскладывая в скобке сумму кубов по известной формуле и также вынося за скобку общий множитель,

$$\sqrt[5]{ab}(\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})(\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{ab} + \sqrt[5]{b^2}) = 0.$$

Выражение во вторых скобках равняться нулю не может, поскольку это неполный квадрат суммы; а остальные возможности дают нам требуемое.

Теперь легко ответить на все вопросы задачи.

1) Если $a = 0$, то

$$x^2 + 44p - 4px - 6x - 12p^2 - 7 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - (4p+6)x - 12p^2 + 44p - 7 = 0.$$

Единственность решения достигается приравнением к нулю дискриминанта; условие

$$(4p+6)^2 - 176p + 48p^2 + 28 = 0$$

даёт $p = 1$. При данном значении параметра $x^2 - 10x + 25 = 0$, откуда $x = 5$.

2) Если $b \neq 0$, то

$$99x^2 + 4px + 112p^2 + 169 = 0$$

и дискриминант

$$16p^2 - 4 \cdot 99(112p^2 + 169) < 0.$$

3) Условие $a = -b$ даёт уравнение

$$100x^2 - 6x + 100p^2 + 44p + 162 = 0,$$

дискриминант которого также отрицателен. ►

☛ **Ответ:** $p = 1, x = 5$.

Иррациональные уравнения не случайно открывают нашу коллекцию «монстров». Вот еще экземпляр из собрания Я. Н. Суконника, который (экземпляр) может стать причиной бессонницы. (Особенно, если вам за 50 и вы всю жизнь преподавали математику.)

2. Решить уравнение $2\sqrt{2x} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+2} + \sqrt{6x+20}$.

◀ Положим $2\sqrt{2x} + \sqrt{2x+3} = y$, т. е. заменим исходное уравнение системой

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x} + \sqrt{2x+3} = y, \\ \sqrt{3x+2} + \sqrt{6x+20} = y. \end{cases}$$

Возводя в квадрат, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 4\sqrt{2x(2x+3)} = y^2 - 3 - 10x, \\ 2\sqrt{(3x+2)(2x+3)} = y^2 - 22 - 9x. \end{cases}$$

Обозначим для краткости $y^2 = z$ и снова возведем в квадрат (ограничения оставим на потом). После упрощений придем к системе

$$\begin{cases} 36x^2 - (36 + 20z)x + z^2 - 6z + 9 = 0, \\ 9x^2 + (108 - 18z)x + z^2 - 44z + 324 = 0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 4 и вычтем из первого; мы избавимся от x^2 и получим

$$x = \frac{3z^2 - 170z + 1287}{52z - 468},$$

что неожиданно упрощается, и в результате

$$x = \frac{3z - 143}{52}.$$

Поневоле вспомнишь В. Набокова: «Была таинственная сладость в том, что длинное, с трудом добытое число, в решительный миг, после многих приключений, без остатка делится на девятнадцать».

Выразим теперь

$$z = \frac{52x + 143}{3}$$

и подставим в первое уравнение последней системы. Мы получим квадратное уравнение относительно x (а что еще нужно?). Держись, читатель! Вот это уравнение:

$$23x^2 - 1258x - 4489 = 0.$$

Но сколь бы страшно оно ни выглядело, мы его решим:

$$x_1 = \frac{629 - \sqrt{498888}}{23} = \frac{629 - 78\sqrt{82}}{23}, \quad x_2 = \frac{629 + 78\sqrt{82}}{23}.$$

Первый корень отрицателен и поэтому явно не годится. Зная x (примерно равный 58), мы находим

$$y^2 = z = \frac{52x + 143}{3}$$

(это примерно 1053) и видим, что условия $y^2 - 3 - 10x \geq 0$ и $y^2 - 22 - 9x \geq 0$ выполнены, а значит, корень подходит. ►

✎ **Ответ:** $(629 + 78\sqrt{82})/23$.

Sume superbiam, т. е. «Исполнись гордостью», — скажем каждому, кто в состоянии справиться с такой задачей самостоятельно.

И вот еще серия уравнений (более вегетарианских) от того же автора:

3. а) $\sqrt{2x^2 + 2} - 2\sqrt{2x} + x - 1 = 0;$

б) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x} + (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x}} = 0;$

в) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} - 3\sqrt{x^2 - 1} + x = 0.$

◀ а) Разделим уравнение на $\sqrt{x} \neq 0$; мы получим

$$\sqrt{2\left(x + \frac{1}{x}\right)} - 2\sqrt{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Заменяя $\sqrt{x} - 1/\sqrt{x} = t$, получим уравнение

$$\sqrt{2(t^2 + 2)} = 2\sqrt{2} - t,$$

которое решается обычным порядком. Оно имеет корни

$$t_1 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, \quad t_2 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}.$$

Осталось решить два уравнения:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = t_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = t_2.$$

Каждое из них имеет по одному корню, а именно

$$x_1 = 11 - 4\sqrt{6} + 2\sqrt{54 - 22\sqrt{6}} \quad \text{и} \quad x_2 = 11 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{54 + 22\sqrt{6}}.$$

б) Домножая на $\sqrt{x}$, получаем

$$\sqrt{x^2 + x} + x\sqrt{2} + (x - 1)\sqrt{x + 2} = 0. \quad (*)$$

Первые два слагаемых преобразуем домножением на сопряженное:

$$\frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x\sqrt{2}} + (x - 1)\sqrt{x + 2} = 0.$$

Сокращая на $1 - x \neq 0$, получим

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x\sqrt{2}} - \sqrt{x + 2} = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2 + x} - x\sqrt{2} = \frac{x}{\sqrt{x + 2}}. \quad (**)$$

Складывая равенства (*) и (**), приходим к уравнению

$$2\sqrt{x^2 + x} + (x - 1)\sqrt{x + 2} = \frac{x}{\sqrt{x + 2}}$$

$$\text{или} \quad 2\sqrt{(x^2 + x)(x + 2)} + (x - 1)(x + 2) = x,$$

что равносильно

$$2\sqrt{(x^2 + x)(x + 2)} = 2 - x^2.$$

Теперь наконец происходит неизбежное, т. е. возведение в квадрат, в результате чего получается возвратное уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 16x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Решаем его заменой $x + 2/x = y$. Избавим читателя от скучных подробностей. Корни вспомогательного уравнения $y_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{6}$ дают четыре корня

$$x_{1,2} = 1 + \sqrt{6} \pm (\sqrt{2} + \sqrt{3}), \quad x_{3,4} = 1 - \sqrt{6} \pm (\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

из которых, однако, только $x = 1 + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ выдерживает все проверки, в частности на условие $0 \leq x < 1$, вытекающее из самого вида исходного уравнения.

в) Здесь возиться приходится еще дольше. Прежде всего перепишем уравнение так:

$$\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-1)} - 3\sqrt{x^2-1} + x = 0.$$

ОДЗ определяется условием $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, поэтому однозначно «расчленив» радикалы нельзя. Приходится рассматривать два случая.

Пусть $x \geq 1$; тогда можно представить уравнение в виде

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) - 3\sqrt{x^2-1} + x = 0.$$

Заменим

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = y \geq 0;$$

тогда

$$2x + 2\sqrt{x^2-1} = y^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{x^2-1} = \frac{y^2}{2} - x.$$

Выразить через новую переменную все члены предложения не удастся, но может быть, этого и не потребуется. Посмотрим, что получится при подстановке. Имеем

$$y\sqrt{x} - 3\left(\frac{y^2}{2} - x\right) + x = 0 \quad \text{или} \quad 3y^2 - 2\sqrt{x} \cdot y - 8x = 0.$$

Решаем это уравнение как квадратное относительно y . Получаем

$$y_1 = 2\sqrt{x}, \quad y_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{x}.$$

Вторая возможность исключается условием $y \geq 0$. Остается решить уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}.$$

Однако оказывается, что решений у него нет. Ничего: ведь остается еще второй случай: $x \leq -1$.

Тогда уравнение принимает вид

$$\sqrt{-x}(\sqrt{-x+1} + \sqrt{-x-1}) - 3\sqrt{x^2-1} + x = 0.$$

Снова заменяем

$$\sqrt{-x+1} + \sqrt{-x-1} = y \geq 0,$$

находим

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{y^2}{2} + x$$

и приходим к уравнению $3y^2 - 2\sqrt{-x} \cdot y + 4x = 0$, из которого находим

$$y = \frac{\sqrt{13}+1}{3}\sqrt{-x}.$$

Хоть выглядит это и не слишком привлекательно, однако ж уравнение

$$\sqrt{-x+1} + \sqrt{-x-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}\sqrt{-x}$$

решение имеет.

Не забудем, что нас интересует только корень, удовлетворяющий условию $x \leq -1$, и найдем

$$x = -\sqrt{\frac{16 - \sqrt{13}}{12}}.$$

- **Ответ:** а) $11 - 4\sqrt{6} + 2\sqrt{54 - 22\sqrt{6}}$, $11 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{54 + 22\sqrt{6}}$;
б) $1 + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$; в) $-\sqrt{(16 - \sqrt{13})/12}$

«Трудные задачи»... Читатель чертыхнется не раз... Задачи эти трудны тем, что для их решения нужен (цитируя знатоков) «неожиданный шаг». Нужен, потому что и для их составления (а, повторяем, всякая задача кем-то придумана в пасмурный день) потребовалась некоторая изощренность и хитрость под стать юридической казуистике, ищущей лазейку в броне законов.

4. Решить уравнение

$$x\sqrt{x}(2 - \sqrt{3}) + 8(\sqrt{3} - \sqrt{x}) + 3\sqrt{3}(\sqrt{x} - 2) = 0.$$

◀ Нет, всё не так страшно, друзья, стоит только положить

$$\sqrt{x} = a, \quad 2 = b, \quad \sqrt{3} = c,$$

и уравнение приобретает приятный и аккуратный вид

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = 0,$$

так что остается только разложить правую часть на множители. Но выражение

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$$

уже встречалось нам на заре нашей книги (пример 27 § 2). Воспользуемся своими достижениями и напомним

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$

Итак, мы привели уравнение к виду

$$(\sqrt{x} - 2)(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 2 + \sqrt{3}) = 0.$$

Поскольку $x \geq 0$, уравнение имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. ▶

• **Ответ:** 3; 4.

Традиционный легкий способ придумывания трудных уравнений высмеян ныне в учебной литературе (цитировавшимися ранее И. М. Гельфандом и А. Х. Шенем).

5. Решить уравнение $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$.

◀ Ну да, кто-то взял два трехчлена с иррациональными корнями, перемножил и получил уравнение 4-й степени. Удастся ли нам решить его?

Попробуем восстановить то, что было в начале, т. е. разложение

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

причем либо 1) $b = 1$, $d = 3$, либо 2) $b = -1$, $d = -3$. (Если свободный член 3 в исходном уравнении получен при перемножении нецелых чисел, мы их заведомо не найдем подбором, и написанные ниже системы обогатятся еще одним уравнением, одновременно усложнившись.)

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим в правой части соответственно: в первом случае $x^4 + (a+c)x^3 + (4+ac)x^2 + (3a+c)x + 3$, во втором $x^4 + (a+c)x^3 + (ac-4)x^2 - (3a+c)x + 3$.

Тогда для нахождения неизвестных коэффициентов имеем систему:

$$1) \begin{cases} a+c=3, \\ ac+4=-2, \\ 3a+c=-7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a+c=3, \\ ac-4=-2, \\ 3a+c=7. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет. Вторая — имеет: $a = 2$, $c = 1$. Значит, наше уравнение благополучно распалось на два квадратных $x^2 + 2x - 1 = 0$ и $x^2 + x - 3 = 0$. Дальнейшее, как говорится, ясно. ►

☞ **Ответ:** $-1 \pm \sqrt{2}$, $((-1 \pm \sqrt{13})/2)$.

Не следует, однако, думать, что так можно решить любое уравнение 4-й степени: ведь, как уже указывалось, коэффициенты перемножаемых трехчленов могут быть и нецелыми, а тогда решить соответствующую систему практически невозможно.

Кстати о системах...

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y(x+y)^2 = 9, \\ y(x^3 - y^3) = 7. \end{cases}$$

Мы помещаем (и разбираем) здесь эту задачу не потому, что она как-то особенно «трудна» (впрочем, проверьте сами, прежде чем ознакомитесь с решением), а потому что она казалась самой доступной в печально знаменитой подборке «Избранные задачи устного экзамена на мехмат МГУ 1979 года». *Избранные* — для какой цели? Читайте статьи А. Шеня и М. Вершика...

◀ Из первого уравнения можно сделать вывод, что $y > 0$ и заметить, что тогда из второго следует $x > y$. Теперь из первого уравнения можно однозначно выразить x , а именно $x + y = \pm 3/\sqrt{y}$ и, поскольку $x + y > 0$, $x = 3/\sqrt{y} - y$.

Пусть $\sqrt{y} = t$; подставив $x = 3/t - t^2$ во второе уравнение системы, после преобразований приходим к страшноватому уравнению

$$2t^9 - 9t^6 + 27t^3 + 7t - 27 = 0,$$

имеющему, однако, корень $t = 1$, что естественно рассматривать как милость богов. Этот корень сразу дает нам приятную парочку $x = 2$, $y = 1$, которая является решением системы.

Продолжим наши игры. После деления на $t - 1$ получаем уравнение

$$2t^8 + 2t^7 + 2t^6 - 7t^5 - 7t^4 - 7t^3 + 20t^2 + 20t + 27 = 0, \quad (*)$$

которое, кажется, не оставляет нам никаких шансов. Конечно, решить это уравнение при всех t — дело непростое; но от нас требуется меньше. Посмотрим, в каких пределах может изменяться переменная. Во-первых, $t = \sqrt{y}$, поэтому $t > 0$. Но это еще не всё; равенство $x = 3/t - t^2$ и условие $x > 0$ дают нам ограничение $t^3 < 3$. Итак, $0 < t < \sqrt[3]{3}$ (т. е. практически $t \in (0; 1,4)$). Дело ясное: надо доказывать, что никакое t из указанного диапазона не может быть корнем уравнения (*). Перепишем уравнение так:

$$2t^8 + 2t^7 + 2t^6 + 20t^2 + 20t + 27 = 7t^3(t^2 + t + 1).$$

Поскольку $t^3 < 3$, правая часть меньше, чем $21(t^2 + t + 1)$. Убедимся в том, что левая часть, наоборот, больше, чем $21(t^2 + t + 1)$. Действительно,

$$(2t^8 + 2t^7 + 2t^6 + 20t^2 + 20t + 27) - 21(t^2 + t + 1) = 2t^8 + 2t^7 + 2t^6 - t^2 - t + 6 > 0,$$

поскольку $t^2 + t < 6$, если $t < 2$ (и тем более, если $0 < t < \sqrt[3]{3}$).

Итак, $x = 2$, $y = 1$. Конечно, решение у нас получилось не ахти какое, но... Сделайте лучше, если сможете. ►

☛ **Ответ:** (2; 1).

Вернемся, однако, к примеру 5. И еще раз попомним добрым словом такую традиционно трудную тему как уравнения 4-й степени. Вот еще веселая тройка уравнений. Они обычно приводятся с именами, чтобы непосвященный читатель не вообразил, что это какой-то озлобленный преподаватель составил их ради издевательства над малыми сими. Исключение составляет третье уравнение,

которое также было использовано на устном вступительном экзамене на мехмат МГУ (в 1985 г.) с особой целью (см. статью А. Шеня). Его составитель пожелал остаться неизвестным.

Вообще, если поступающий ничего не знает об уравнениях 3 и 4 степени, то ему легче жить. Попадется ему такое уравнение на экзамене, он не испытает никакого потрясения («ведь методов решения нет!»), а может и решить «на дурачка». Считайте нижеследующую скромную подборку средством от бессонницы (перед экзаменом).

7. Решить уравнения:

- а) $x^4 - 2x^2 - 400x - 9999 = 0$ (уравнение Бхаскары);
- б) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 81600 = 0$ (уравнение Луки Пачоли);
- в) $x^4 - 14x^3 + 66x^2 - 115x + 66,25 = 0$ (уравнение черта лысого).

◀ а) Разложив $9999 = 9 \cdot 1111 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$, начинаем поиск целого корня и находим $x_1 = -9$, $x_2 = 11$; после деления получается квадратный трехчлен $x^2 + 2x + 101$, у которого корней нет. Вот и всё. Сколь бесхитростны были древние индийцы.

б) Решать уравнение брата Луки методом разложения в произведение двух квадратных трехчленов как-то не тянет: число 81600 имеет 84 делителя. Можно, однако, заметить, что уравнение-то «почти возвратное»: его можно записать в виде

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 81601$$

и после этого моментально:

$$x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right) = 81601,$$

$$x^2 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right) = 81601,$$

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right)^2 = 81601, \quad (x^2 + x + 1)^2 = 81601.$$

Нет, корень из числа 81601 нацело не извлекается, поэтому

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 = \sqrt{81601} &\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 = \sqrt{81601} - \frac{3}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\sqrt{81601} - \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

«Странное» (по меньшей мере) число 81600, которое кажется заботливо выисканным, наверное, действительно выискано, но с какой целью? Видимо, для

того чтобы сбить с толку. Кого? Возможного противника по диспуту, которыми увлекались в Италии XVI века: на этих соревнованиях противники обменивались уравнениями, а поскольку самый первый метод решения состоит в подборе целого корня, то перебор всех делителей 81600 занимает много времени. А время — всё.

в) Уравнение решается по методу «легко видеть, что...», однако мы всё же не станем дразнить нашего верного читателя и честно решим сие творение рук человеческих (?) методом брата Лудовико (Феррари), изложенным в §4. Иными словами: перепишем уравнение в виде

$$x^4 - 14x^3 = -66x^2 + 115x - 66,25$$

и найдем такое a , чтобы трехчлен, стоящий справа в равенстве

$$(x^2 - 7x + a)^2 = -66x^2 + 115x - 66,25 + 49x^2 + a^2 + 2ax^2 - 14ax$$

был полным квадратом. В результате мы получаем уравнение на a :

$$8a^3 - 264a^2 + 2690a - 8720 = 0$$

или, после замены $2a = y$,

$$y^3 - 66y^2 + 1345y - 8720 = 0.$$

И здесь снова «легко видеть, что» имеется целый (о, гуманные педагоги!) корень $y = 16$. И тогда $a = 8$, т. е. исходное уравнение имеет вид

$$(x^2 - 7x + 8)^2 = -x^2 + 3x - 2,25$$

или

$$(x^2 - 7x + 8)^2 + (x - 1,5)^2 = 0,$$

и корней у него нет. Важный вывод для изучения психологии экзаменаторов-инквизиторов (решайте, мол...). А что вы можете возразить? Чтобы получить такое разложение, вовсе не нужен метод брата Лудовико — достаточно *просто сгруппировать* члены предложения. «Их нравы», что называется. ►

✎ **Ответ:** а) -9; 11. б) $-1/2 \pm \sqrt{\sqrt{81601} - 3/4}$ в) $\emptyset$.

8. Решите уравнение

$$12 \cos 2x + 8|\sin x| \sqrt{3 + |\sin x|} - 3 \cos 2x = 11.$$

◀ Заменой $y = |\sin x|$ уравнение приводится к виду

$$8y\sqrt{6y^2 + y} = 24y^2 - 1.$$

После этого, видимо, неминуемо возведение в квадрат и получение уравнения 4-й степени

$$192y^4 - 64y^3 - 48y^2 + 1 = 0.$$

Сделаем замену $4y = z$; получим

$$3z^4 - 4z^3 - 12z^2 + 4 = 0.$$

Применению метода Феррари мешает нечетный старший коэффициент; чтобы устранить это неудобство, заменим $z = 1/t$ и придем к уравнению

$$4t^4 - 12t^2 - 4t + 3 = 0. \quad (*)$$

Теперь всё идет как по маслу:

$$(2t^2 + a)^2 = (12 + 4a)t^2 + 4t + a^2 - 3,$$

$$D = 16 - 16(a + 3)(a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a^3 + 3a^2 - 3a - 10 = 0 \Rightarrow a = -2.$$

Тогда уравнение (*) преобразуется к

$$(2t^2 - 2t - 3)(2t^2 + 2t - 1) = 0.$$

Его корни

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}, \quad t_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Теперь нужно сделать проверку. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{24}} \leq y \leq 1, \quad \text{поэтому} \quad \frac{4}{\sqrt{24}} \leq z \leq 4,$$

тогда

$$\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{\sqrt{24}}{4} \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Этому условию удовлетворяет только $t = (-1 + \sqrt{3})/2$.

Теперь находим

$$z = \frac{1}{t} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1; \quad |\sin x| = y = \frac{z}{4} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}.$$

И окончательно

$$x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{3} + 1}{4} + \pi n.$$

Конечно, составители этого уравнения (а оно предлагалось на вступительном экзамене в МГУ, факультет ВМК, в 2005 году) не требовали знания метода Феррари; они предполагали, что, придя к уравнению

$$8y\sqrt{6y^2 + y} = 24y^2 - 1,$$

поступающий не станет возводить его в квадрат, поскольку это приведет к уравнению 4-й степени, которые *решаются плохо*, а сделает замену $\sqrt{6y^2 + y} = u$, тогда

$$6y^2 = u^2 - y \Rightarrow 8yu = 4u^2 - 4y - 1 \Rightarrow 4u^2 - 8yu - 4y - 1 = 0.$$

А это уравнение — квадратное относительно u . Решить его очень просто, поскольку $D = (8y + 4)^2$.

Но нам всё же кажется, что при этом брат Лудовико неузнанный хихикает за кулисами. ►

☛ **Ответ:** $\pm \arcsin ((\sqrt{3} + 1)/4) + \pi n$.

9. Решить неравенство

$$\sqrt{4x^2 - 4x - 84} + \sqrt{4x^2 - 6x - 85} \leq |2x + 1|.$$

И эта задача, наверное, не столько трудна, сколько требует... как бы мягче выразиться, *споровки*, что ли...

◀ Конечно, «сразу видно», что разность подкоренных выражений равна $2x + 1$, а потому неравенство можно переписать в виде $\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq |u - v|$. Видя знак модуля, мы склонны рассматривать 2 случая, что удлинит. Попробуем не раскрывать сразу всё целиком, а преобразуем неравенство так:

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq |(\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v})| \quad \text{или} \quad \sqrt{u} + \sqrt{v} \leq (\sqrt{u} + \sqrt{v})|\sqrt{u} - \sqrt{v}|,$$

поскольку сумма корней неотрицательна. Мало того, она положительна — ибо в данном случае корни не могут обратиться в нуль одновременно. Сокращая, получим $|\sqrt{u} - \sqrt{v}| \geq 1$. Это неравенство можно возвести в квадрат; тогда

$$u - 2\sqrt{uv} + v \geq 1 \quad \text{или} \quad u + v - 1 \geq 2\sqrt{uv}.$$

Тут уже возведение в квадрат возможно, только если $u + v \geq 1$. При этом условии получаем

$$u^2 + v^2 + 1 + 2uv - 2u - 2v \geq 4uv \quad \text{или} \quad (u - v)^2 + 1 \geq 2(u + v).$$

Теперь самое время остановиться и вспомнить о том, что

$$u = 4x^2 - 4x - 84, \quad v = 4x^2 - 6x - 85.$$

Подставляя, получим неравенство

$$(2x + 1)^2 + 1 \geq 2(8x^2 - 10x - 169) \quad \text{или} \quad 12x^2 - 24x - 340 \leq 0.$$

Отсюда

$$\frac{3 - 2\sqrt{66}}{3} \leq x \leq \frac{3 + 2\sqrt{66}}{3}.$$

Теперь нужно выполнить подсобную работу по нахождению ОДЗ, для этого решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 84 \geq 0, \\ 4x^2 - 6x - 85 \geq 0. \end{cases}$$

Получаем две возможности:

$$1) x \leq \frac{1 - \sqrt{85}}{2} \quad \text{и} \quad 2) x \geq \frac{3 + \sqrt{349}}{4}.$$

Окончательно решение неравенства определится условиями:

$$\frac{3 - 2\sqrt{66}}{3} \leq x \leq \frac{1 - \sqrt{85}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{3 + \sqrt{349}}{4} \leq x \leq \frac{3 + 2\sqrt{66}}{3}.$$

Окончательно ли? Ведь где-то на периферии сознания свербит, как незаженный зуб, оставленное без комментариев условие $u + v \geq 1$, которое было необходимо для корректности возведения в квадрат. Надо ли его учитывать? То есть, выполняется ли оно автоматически? (Хочется на это надеяться.)

Посмотрим. Полученное после равносильных преобразований неравенство $|\sqrt{u} - \sqrt{v}| \geq 1$ означает: если $u > v$, то $\sqrt{u} - \sqrt{v} \geq 1$ и отсюда

$$\sqrt{u} \geq \sqrt{v} + 1 \Rightarrow u \geq 1 \quad \text{и} \quad u + v \geq 1,$$

так как $v \geq 0$; если же $u < v$, то $\sqrt{v} - \sqrt{u} \geq 1$ и всё получается аналогично. Значит, условие $u + v \geq 1$ выполнено. ►

❖ **Ответ:** $(3 - 2\sqrt{66})/3 \leq x \leq (1 - \sqrt{85})/2$,
 $(3 + \sqrt{349})/4 \leq x \leq (3 + 2\sqrt{66})/3$.

10. Что больше, $29^{200} \cdot 2^{151}$ или $5^{179} \cdot 3^{300}$?

◀ Задачи такого рода основаны на том, что какая-то комбинация вида $29^a \cdot 2^b$ близка к какой-то комбинации вида $5^c \cdot 3^d$. (И на том, что будут близки показатели степени.) В сущности, от нас требуется удачное разложение на множители. Чтобы найти требуемые числа a, b, c, d , надо поэкспериментировать с соответствующими произведениями.

Выражение $29^a \cdot 2^b$ может равняться $29 \cdot 2 = 58$, $29 \cdot 2^2 = 116$, $29 \cdot 2^3 = 232$, $29 \cdot 2^4 = 464$, $29 \cdot 2^5 = 928$, $29^2 \cdot 2 = 1682$, $29 \cdot 2^6 = 1856$, $29^2 \cdot 2^2 = 3364$, $29 \cdot 2^7 = 3712$, $29^2 \cdot 2^3 = 6728$...

В свою очередь, произведение $5^c \cdot 3^d$ принимает значения 15, 45, 75, 135, $5^2 \cdot 3^2 = 225$, $5^3 \cdot 3 = 375$, $5 \cdot 3^4 = 405$, $5^2 \cdot 3^3 = 675$, $5^3 \cdot 3^2 = 1125$, $5 \cdot 3^5 = 1215$, $5^2 \cdot 3^4 = 2025$, $5^3 \cdot 3^3 = 3375$, $5 \cdot 3^6 = 6075$...

Данный статистический материал дает нам две достаточно близкие пары: 232 и 225, 3364 и 3375.

Если мы примем первую гипотезу, то сравниваемые числа будут представлены так:

$$29^{200} \cdot 2^{151} = \frac{(29 \cdot 2^3)^{200}}{2^{449}}, \quad 5^{179} \cdot 3^{300} = \frac{(3^2 \cdot 5^2)^{150}}{5^{121}},$$

что особенного прогресса не сулит.

Если же остановиться на втором разложении, то получится следующее:

$$29^{200} \cdot 2^{151} = \frac{(29^2 \cdot 2^2)^{100}}{2^{49}}, \quad 5^{179} \cdot 3^{300} = \frac{(3^3 \cdot 5^3)^{100}}{5^{21}}.$$

Как видим, здесь чудесным образом совпали показатели степени у выражений $29^a \cdot 2^b$ и $5^c \cdot 3^d$. Итак, избавляясь от знаменателей, сравниваем числа $(3364)^{100} \cdot 5^{21}$ и $(3375)^{100} \cdot 2^{49}$. Поскольку $5^3 = 125$ близко к $2^7 = 128$, представим теперь числа так:

$$(3364)^{100} \cdot (125)^7 \quad \text{и} \quad (3375)^{100} \cdot (128)^7.$$

Снова всё чудесным образом совпало. И, поскольку $3364 < 3375$, а $125 < 128$, второе из сравниваемых чисел больше. ►

✎ **Ответ:** Второе число больше.

11. Сравнить $\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 80$ и $2 \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \dots \cdot \log_3 79$.

◀ Поскольку сравниваемые числа явно положительны, рассмотрим их частное, т. е.

$$\frac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 80}{2 \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \dots \cdot \log_3 79} = \frac{1}{2} \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_{79} 80,$$

которое нам надо сравнить с 1 или, что то же, сравнить с 2 число

$$A = \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_{79} 80.$$

Рассмотрим еще одно произведение, а именно $B = \log_4 5 \cdot \log_6 7 \cdot \dots \cdot \log_{80} 81$ («заполняющее пробелы» в первом ряду). Поскольку $AB = \log_3 81 = 4$ (работает формула «паровозик» $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$) и, кроме того, $A > B$ ввиду того, что

$$\log_3 4 > \log_4 5, \quad \log_3 6 > \log_6 7, \quad \dots, \quad \log_{79} 80 > \log_{80} 81$$

(как мы помним, $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$), мы делаем вывод, что $A > 2$ (соответственно $B < 2$). Значит, первое число больше. ►

✎ **Ответ:** Первое число больше.

12. Может ли быть целым числом сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n},$$

где $n \in \mathbb{Z}$?

◀ Предположим, что такое возможно. Тогда если разложить на простые множители знаменатели каждой дроби, в некоторых дробях обязательно будут присутствовать степени двойки. Поскольку n — число конечное, среди этих степеней двойки должна быть наибольшая. Рассмотрим соответствующую дробь вида $1/(2^k \cdot p)$, где p — некоторое нечетное число (возможно, 1). Тогда в сумме должна быть еще одна дробь вида $(1/2^k \cdot q)$ (q — нечетное). Действительно, если бы дробь такого вида была только одна, то после приведения всех дробей к общему знаменателю, получилась бы дробь, знаменатель которой — четный, а числитель — нечетный (поскольку числитель дроби $1/(2^k \cdot p)$ не пришлось домножать на четную составляющую и он остался нечетным, а все остальные слагаемые были бы четными, так как k — *наибольшая* степень двойки). Т.е. такая дробь не могла бы быть целым числом.

Пусть $p < q$, тогда сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

не заканчивается на $1/(2^k \cdot p)$, а вместе со слагаемым $1/(2^k \cdot p)$ содержит и слагаемое

$$\frac{1}{2^k \cdot (p+1)};$$

но знаменатель $2^k(p+1)$ уже является числом четным и, значит, содержит двойку в степени, большей, чем k . Но мы предположили, что k — *наибольшая* степень. Достигнутое противоречие доказывает, что сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

ни при каком натуральном n не может быть целым числом. ►

☛ **Ответ:** Не может.

13. Доказать, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24.$$

◀ Хорошая вещь неравенства: никогда не знаешь, что может понадобиться для их доказательства. Воспользуемся случаем и покажем, как для решения подобных задач применяется... интеграл! Думаем, читатель-гурман будет удовлетворен.

Итак, пусть

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9997} + \sqrt{9999}};$$

рассмотрим еще одну сумму

$$B = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999} + \sqrt{10001}}$$

(также заполняющую «пробелы» в первой). Поскольку, очевидно, $A > B$ (каждая дробь в первой сумме больше соответствующей дроби во второй, а количество дробей одинаково), имеем $A > (A + B)/2$; поэтому для доказательства исходного неравенства достаточно проверить, что $A + B > 48$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}};$$

она монотонно убывает и выпукла вниз. (Действительно,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{2}, \quad f''(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}} \right) > 0,$$

так как $0 < x < x+2$).

Поэтому

$$2f(n) > \int_n^{n+2} f(x) dx \quad (\text{рис. 41}).$$

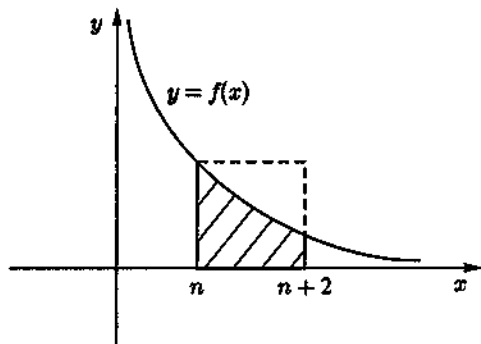


Рис. 41

Это означает, что

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} > \frac{1}{2} \int_n^{n+2} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}},$$

и таким образом

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{9997} + \sqrt{9999}} + \frac{1}{\sqrt{9999} + \sqrt{10001}} > \\ &> \frac{1}{2} \left(\int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \dots + \int_{9997}^{9999} f(x) dx + \int_{9999}^{10001} f(x) dx \right) \end{aligned}$$

или

$$A + B > \frac{1}{2} \int_1^{10001} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}.$$

Найдем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}};$$

имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2} \int (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) dx = \frac{1}{3} (x+2)^{3/2} - \frac{1}{3} x^{3/2}.$$

Тогда

$$A + B > \frac{1}{6} ((x+2)^{3/2} - x^{3/2}) \Big|_1^{10001} = \frac{1}{6} (\sqrt{10003^3} - \sqrt{3^3} - \sqrt{10001^3} + 1).$$

Оценим выражение в скобке. (Можно, конечно, посчитать на калькуляторе, но это дурной тон.) Имеем:

$$\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b);$$

но

$$a + b > 2\sqrt{ab}; \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > \frac{a - b}{\sqrt{2a + 2b}}$$

(частный случай неравенства $(x+y)/2 \geq \sqrt{(x^2+y^2)/2}$).

Поэтому

$$\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} > \frac{3\sqrt{ab}(a-b)}{\sqrt{2(a+b)}}.$$

Произведение $\sqrt{ab}$ в нашем случае имеет вид

$$\sqrt{(n+1)(n-1)} = \sqrt{n^2 - 1}$$

(при $n = 10002$) и может быть оценено неравенством $\sqrt{n^2 - 1} > n - 1$. Всё это вместе взятое дает нам неравенство

$$(\sqrt{10003^2} - \sqrt{10001^2}) > \frac{3 \cdot 10001 \cdot 2}{\sqrt{2 \cdot 20004}} = \frac{3 \cdot 10001}{\sqrt{10002}} > \frac{30003}{101} > 297.$$

И тогда окончательно

$$A + B > \frac{1}{6}(298 - \sqrt{27}) > \frac{1}{6}(298 - 6) = \frac{292}{6} > \frac{288}{6} = 48,$$

что и требовалось. УФФ!

Не скроем от доверчивого читателя, что есть и другое решение — без интеграла. Именно: избавляясь от иррациональности в знаменателе в сумме $A + B$, имеем.

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{9999} - \sqrt{9997}}{2} + \frac{\sqrt{10001} - \sqrt{9999}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{10001} - 1}{2} > \frac{100 - 1}{2} > 48. \end{aligned}$$

Но хотелось показать работу *иного метода*. ►

14. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{9} + \sqrt{11}}.$$

◀ Да, и такие задачи бывают, и, как ни странно, их можно решить. Стратегия состоит в *последовательном* избавлении от радикалов: сначала от $\sqrt{11}$, потом — от $\sqrt{7}$, потом — от $\sqrt{5}$ и наконец — от $\sqrt{3}$. Таким образом, к цели ведут всего 4 шага. Вперед же!

Первый шаг:

$$X = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{9} + \sqrt{11}} = \frac{A}{(\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - 3)^2 - 11},$$

где для краткости обозначено: $A = \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - 3 - \sqrt{11}$. Производя вычисления, получаем

$$X = \frac{A}{13 - 2\sqrt{15} + 2\sqrt{21} - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{35} + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{7}}.$$

Для того чтобы избавиться от $\sqrt{7}$, перегруппируем слагаемые в знаменателе, вынося $\sqrt{7}$ за скобки:

$$X = \frac{A}{(13 - 2\sqrt{15} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{5}) + 2\sqrt{7} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5} - 3)}.$$

Второй шаг:

$$X = \frac{AB}{(13 - 2\sqrt{15} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{5})^2 - 28(\sqrt{3} - \sqrt{5} - 3)^2},$$

где

$$B = (13 - 2\sqrt{15} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{5}) - 2\sqrt{7}(\sqrt{3} - \sqrt{5} - 3).$$

Снова производя подсчет в знаменателе, приходим к выражению

$$X = \frac{AB}{41 - 68\sqrt{15} - 108\sqrt{3} + 60\sqrt{5}},$$

которое представляем в виде

$$X = \frac{AB}{41 - 108\sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot (60 - 68\sqrt{3})}.$$

Третий шаг:

$$X = \frac{ABC}{(41 - 108\sqrt{3})^2 - 5(60 - 68\sqrt{3})^2},$$

где

$$C = 41 - 108\sqrt{3} - \sqrt{5}(60 - 68\sqrt{3}).$$

Упрощая, получаем дробь, содержащую только один радикал в знаменателе:

$$X = \frac{ABC}{31944\sqrt{3} - 2687},$$

и окончательно

$$X = \frac{ABCD}{3054037439},$$

где $D = 31944\sqrt{3} + 2687$. ►

● **Ответ:** $ABCD/(3054037439)$, где $A = \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - 3 - \sqrt{11}$,
 $B = 13 - 2(\sqrt{15} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) - 2\sqrt{7}(\sqrt{3} - \sqrt{5} - 3)$,
 $C = 41 - 108\sqrt{3} - 4\sqrt{5}(15 - 17\sqrt{3})$, $D = 31944\sqrt{3} + 2687$.

15. Найти наибольшее значение выражения $x^2 + 2y^2$, если числа x и y удовлетворяют соотношению $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

◀ Это задача, конечно, из категории «тупо смотришь и не знаешь, что делать». А спасает неравенство Коши $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ — добрый ангел школьной математики.

Действительно,

$$x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{2x^2y^2} = 2\sqrt{2}|xy|,$$

и тогда если:

1) $xy \geq 0$, то

$$x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{2}xy;$$

но $xy = x^2 + 2y^2 - 1$, поэтому

$$x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{2}(x^2 + 2y^2 - 1),$$

т.е.

$$x^2 + 2y^2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1},$$

а поскольку в неравенстве Коши равенство возможно только при $a = b$, значение $2\sqrt{2}/(2\sqrt{2} - 1)$ достигается — именно при $x^2 = 2y^2$, т.е. при

$$x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}.$$

Заметим, что найденное значение

$$\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1} > 1.$$

2) Если же $xy < 0$, то $x^2 + 2y^2 = 1 + xy < 1$, и в этом случае найденный выше максимум заведомо не будет перекрыт. ►

☛ **Ответ:** $2\sqrt{2}/(2\sqrt{2} - 1)$.

16. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 4y^2 - 2x^2 = \sqrt{2(x + 2y)^2 - (x + 2y)^4}, \\ x^4 + 2 \leq 4y(x^2 - 1). \end{cases}$$

◀ Сие ископаемое, почти доисторическое животное (мехмат МГУ, 1973 г.) еще и поныне может наводить страх на бедных школьников. Однако молчание...

Пусть $(x + 2y)^2 = z$; оценим подкоренное выражение. Оно равно

$$2z - z^2 = 1 - (z - 1)^2 \leq 1.$$

Таким образом, и $4y^2 - 2x^2 \leq 1$.

Займемся неравенством. Перепишем его так: $x^4 - 4yx^2 + 4y + 2 \leq 0$ и выделим полный квадрат:

$$(x^2 - 2y)^2 \leq 4y^2 - 4y - 2.$$

Отсюда, при условии $4y^2 - 4y - 2 \geq 0$, получаем

$$-\sqrt{4y^2 - 4y - 2} \leq x^2 - 2y \leq \sqrt{4y^2 - 4y - 2}.$$

Вернувшись к неравенству $4y^2 - 2x^2 \leq 1$, перепишем его так:

$$x^2 \geq 2y^2 - \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad x^2 - 2y \geq 2y^2 - 2y - \frac{1}{2}.$$

Замкнув теперь полученные неравенства друг на друга, имеем

$$2y^2 - 2y - \frac{1}{2} \leq \sqrt{4y^2 - 4y - 2} \quad \text{или} \quad 2y^2 - 2y - \frac{1}{2} \leq \sqrt{2\left(2y^2 - 2y - \frac{1}{2}\right) - 1}.$$

Обозначим теперь

$$2y^2 - 2y - \frac{1}{2} = t \geq 0$$

и решим неравенство $t \leq \sqrt{2t - 1}$. Имеем $t^2 \leq 2t - 1$, т.е.

$$(t - 1)^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Тогда

$$2y^2 - 2y - \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{3}{2}.$$

Если $y = -1/2$, то неравенство

$$x^4 - 4yx^2 + 4y + 2 \leq 0$$

принимает вид $x^4 + 2x^2 \leq 0$, откуда $x = 0$.

Если $y = 3/2$, то получаем $x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0$, откуда $2 \leq x^2 \leq 4$. Условие

$$x^2 \geq 2y^2 - \frac{1}{2}$$

дает одновременно $x^2 \geq 4$. Значит, $x^2 = 4$ и $x = \pm 2$.

Уравнение системы принимает вид

$$9 - 2x^2 = \sqrt{2(x+3)^2 - (x+3)^4} \quad \text{или} \quad 2(x+3)^2 - (x+3)^2 = 1.$$

Этому уравнению удовлетворяет только $x = -2$. ►

☛ **Ответ:** $(0; -1/2)$, $(-2; 3/2)$.

17. Упростить:

$$\frac{\sqrt{x^3 + 3\sqrt{3}x - 2a} + \sqrt{4a^2 - x^6 - 6\sqrt{3}x^4 - 27x^2} + 16^{\log_4 \sqrt{2a}}}{x - \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + 3\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 + 3\sqrt{3}}} + 1}.$$

◀ Неплохо, да? Так и вспомнишь Н. В. Гоголя и его «искушенный в науке испытывания взгляд». — Без одного в таких примерах делать нечего...

Подходя вокруг да около и заметив «логарифм в конце», отметим, во-первых, что $a > 0$, во-вторых, что условия существования двух корней в числителе приводят нас к системе неравенств

$$\begin{cases} x^3 + 3\sqrt{3}x \geq 2a, \\ 4a^2 - x^6 - 6\sqrt{3}x^4 - 27x^2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^3 + 3\sqrt{3}x \geq 2a, \\ (x^3 + 3\sqrt{3}x)^2 \leq 4a^2, \end{cases}$$

что означает (напоминаем: $a > 0$) $x^3 + 3\sqrt{3}x = 2a$. Значит, оба корня в числителе равны 0 и весь числитель сводится к $16^{\log_4 \sqrt{2a}} = 2a$.

Обратимся к знаменателю. Пусть

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + 3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 + 3\sqrt{3}}} = b;$$

тогда

$$b^3 = 2a + 3b \cdot \sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = 2a - 3\sqrt{3} \cdot b.$$

Поскольку

$$x^3 + 3\sqrt{3}x = 2a,$$

получаем равенство

$$b^3 = x^3 + 3\sqrt{3} \cdot x - 3\sqrt{3} \cdot b \quad \text{или} \quad (b - x)(b^2 + bx + x^2) + (b - x) \cdot 3\sqrt{3} = 0,$$

т. е.

$$(b - x)(b^2 + bx + x^2 + 3\sqrt{3}) = 0.$$

Отсюда $b = x$ (выражение во второй скобке всегда положительно, поскольку положителен уже неполный квадрат $b^2 + bx + x^2$). Таким образом, знаменатель исходной дроби равен 1, которая оказывается равной $2a$. ►

● **Ответ:** $2a$.

Предыдущий пример предлагался абитуриентам Московского Энергетического института, в целом довольно вегетарианского (гостеприимного) вуза. Но задачи на упрощение — бренд МЭИ; как правило, с упрощенным выражением требуется еще проделать какие-то действия. Вот характерный пример:

18. Упростить выражение для функции $f(x)$

$$f(x) = 1 + x(1 - x^7) + \\ + (x - 1) \left(1 - \frac{x^2}{1 + x + x^2 + x^3} - \frac{x^4}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)} - \frac{x}{1 + x} \right)^{-1}$$

и после этого для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{a^2 x^2 + 4a \cdot f(x) + 4} + f(x) - 1 = 0.$$

◀ Запасемся терпением. Выполняем всё «по действиям».

$$a) \quad 1 - \frac{x}{1 + x} = \frac{1}{1 + x};$$

$$б) \quad \frac{x^2}{1 + x + x^2 + x^3} + \frac{x^4}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)} = \\ = \frac{x^2}{(1 + x)(1 + x^2)} + \frac{x^4}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)} = \\ = \frac{x^2}{(1 + x)(1 + x^2)} \left(1 + \frac{x^2}{1 + x^4} \right) = \frac{x^6 + x^4 + x^2}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)};$$

$$в) \quad \frac{1}{1 + x} - \frac{x^6 + x^4 + x^2}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)} = \frac{1}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)}.$$

Таким образом,

$$f(x) = 1 + x(1 - x^7) + (x - 1)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + x - x^8 + x^8 - 1 = x,$$

и мы оказываемся перед лицом уравнения

$$\sqrt{a^2 x^2 + 4ax + 4} + x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{a^2 x^2 + 4ax + 4} = 1 - x,$$

которое, как мы знаем, можно заменить равносильной системой

$$\begin{cases} a^2 x^2 + 4ax + 4 = x^2 - 2x + 1, \\ 1 - x \geq 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $(a^2 - 1)x^2 + (4a + 2)x + 3 = 0$ находятся:

$$x_1 = -\frac{1}{a + 1}, \quad x_2 = -\frac{3}{a - 1}.$$

Если $-1/(a + 1) \leq 1$, т.е.

$$1 + \frac{1}{a + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a + 2}{a + 1} \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2] \cup [-1; \infty),$$

то $x_1 = -1/(a + 1)$ является корнем исходного уравнения.

Аналогично

$$x_2 = -\frac{3}{a-1}$$

является корнем при $a \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$. ►

❖ **Ответ:** Если $a \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$, то $x_1 = -1/(a+1)$, $x_2 = -3/(a-1)$; если $a \in (-1; 1)$, то $-1/(a+1)$; если $a \in (-2; -1)$, то уравнение корней не имеет.

Продолжая тему МЭИ, отметим, что пример 17 не был единственным монстром образца 1997 года: что-то случилось тогда (неожиданный наплыв абитуриентов, потребовавший усложнения вариантов?... загадка для будущего историка) и в том же варианте оказалась еще одна задачка...

19. Решить систему

$$\begin{cases} x(z+1)^2 - 2z(x+z) = 0, \\ (1+x^2)\sqrt[4]{y-2} - 2x^2 = 0, \\ \sqrt{y-2}(z-2) + z = 0. \end{cases}$$

◀ Заменим прежде всего

$$\sqrt[4]{y-2} = t$$

и перепишем систему (упростив первое уравнение):

$$\begin{cases} x(z^2+1) = 2z^2, \\ t(1+x^2) = 2x^2, \\ t^2(z-2) + z = 0. \end{cases}$$

За неимением лучшего займемся методическим исключением неизвестных: сперва из первого уравнения найдем

$$x = \frac{2z^2}{z^2+1} \Rightarrow x^2 = \frac{4z^4}{(z^2+1)^2}, \quad x^2+1 = \frac{5z^4+2z^2+1}{(z^2+1)^2};$$

тогда из второго:

$$t = \frac{2x^2}{x^2+1} = \text{(после упрощений)} = \frac{8z^4}{5z^4+2z^2+1}.$$

Третье уравнение принимает вид

$$\frac{64z^8(z-2)}{(5z^4+2z^2+1)^2} + z = 0.$$

После отделения корня $z = 0$, дающего первую тройку решений $(0; 2; 0)$, и упрощения приходим к уравнению (таблетку болеутоляющего под язык)

$$89z^8 - 128z^7 + 20z^6 + 14z^4 + 4z^2 + 1 = 0.$$

Понятно, что шансов на успех не много, но, сосчитав коэффициенты, заметим, что $z = 1$ — корень; это дает нам еще одну тройку решений: $(1; 3; 1)$. Опять же за неимением лучшего углубляемся в деление уголком, после чего получаем уравнение

$$89z^7 - 39z^6 - 19z^5 - 19z^4 - 5z^2 - z - 1 = 0,$$

которое также имеет корень $z = 1$. Поделив уголком еще раз, получим

$$89z^6 + 50z^5 + 31z^4 + 12z^3 + 7z^2 + 2z + 1 = 0.$$

Но это уравнение, очевидно, не имеет *положительных* корней, а между тем третье уравнение системы показывает, что его решением не может быть отрицательное значение z . Таким образом, наша одиссея завершена. ►

☛ **Ответ:** $(0; 2; 0)$, $(1; 3; 1)$.

Многими интересными находками славен Ленинградский (ныне Петербургский) госуниверситет. Заглянем на огонек св. Эльма.

20. Решить неравенство

$$e^{3(x-1)} - 3e^{x-1} > \sqrt{3}.$$

Помещаем это неравенство здесь как образец экзотики: ведь число e есть великая тайна для школьника и не только (правда, присутствие этого числа в данном неравенстве чисто номинальное: явно для устрашения малых сих).

◄ Знатокам кубических уравнений здесь бояться нечего: « e » или не « e », неважно. Главное — это $\sqrt{3}$, ибо от этого числа «пахнет тригонометрией». Пусть $e^{x-1} = y$, тогда имеем неравенство

$$y^3 - 3y > \sqrt{3}.$$

Поскольку $y > 0$, это неравенство выполняется при $y > y_0$, где y_0 — единственный положительный корень уравнения $y^3 - 3y = \sqrt{3}$ (см. график). Найдем этот корень, учитывая, что $y_0 < 2$ (ибо $2^3 - 3 \cdot 2 = 2 > \sqrt{3}$).

Заменим $y = 2 \cos z$ (мы помним, что именно так следует действовать: см. § 4); получаем

$$8 \cos^3 z - 6 \cos z = \sqrt{3} \quad \text{или} \quad \cos 3z = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда

$$z = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},$$

но, учитывая условие $y = 2 \cos z > 0$, оставляем только $z = \pi/18$. Тогда $y = 2 \cos(\pi/18)$ и неравенство $y^3 - 3y > \sqrt{3}$ выполняется при $y > 2 \cos(\pi/18)$.

Осталось решить неравенство

$$e^{x-1} > 2 \cos \frac{\pi}{18}.$$

Это нетрудно:

$$x - 1 > \ln \left(2 \cos \frac{\pi}{18} \right) \Rightarrow x > \ln \left(2 \cos \frac{\pi}{18} \right) + 1. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $x \in (\ln(2 \cos(\pi/18)) + 1; +\infty)$.

Тему числа e продолжит следующая задача.

21. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \sin x \right)} + \sqrt{\sin x (e^x - \sin x)} = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

◀ Тот, кто не поленился и возведет в квадрат, обнаружит, что получилось уравнение

$$\left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^x - 1} - \sin x \left(\frac{e^{2x}}{e^x - 1} - \sin x \right)} - \sin x \right)^2 = 0,$$

из которого следует, что

$$\frac{e^{2x}}{e^x - 1} - \sin x \left(\frac{e^{2x}}{e^x - 1} - \sin x \right) = \sin^2 x,$$

откуда $\sin x = 1$. ОДЗ требует во-первых, $e^x - 1 > 0$, откуда $x > 0$. Тогда $e^x > \sin x$ и, значит, $\sin x \geq 0$ (второй радикал). Но тогда выполнено и последнее условие $e^x/(e^x - 1) > \sin x$, поскольку левая часть больше 1. ▶

Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

22. Решить неравенство

$$|66f(x) - 90| \leq 24,$$

если известно, что уравнение $3f(x) + x = 4$ имеет два корня, сумма которых равна $-2/11$, а функция $f(x)$ задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{2^c}(|x|^a + |x|^b)^c,$$

где a , b и c — некоторые положительные числа.

(Се задача МАИ; не будь некогда таких задач «на входе», может быть не было бы и Туполева с Ильюшиным...)

◀ Главная хитрость в том, что $f(1) = 1$ (подставьте в выражение для функции). А коль скоро это так, то из уравнения $3f(x) + x = 4$, которое при $x = 1$ обращается в тождество, следует, что один из корней $x_1 = 1$, а второй, таким образом, $x_2 = -2/11 - 1 = -13/11$. При этом $f(x_2) = 19/11$.

Неравенство

$$|66f(x) - 90| \leq 24$$

равносильно двойному неравенству

$$1 \leq f(x) \leq \frac{19}{11}.$$

Если $x > 1$ (или $x < -1$), то функция $f(x)$ строго возрастает, и, поскольку ее область определения симметрична относительно нуля, решением неравенства будет объединение двух отрезков $[-13/11; -1] \cup [1; 13/11]$. ▶

☛ **Ответ:** $x \in [-13/11; -1] \cup [1; 13/11]$.

23. Найти кратчайшее расстояние между точками парабол

$$y = x^2 + 8x + 13 \quad \text{и} \quad y = -3x^2 + 8x - 9.$$

◀ Люди бывалые чувствуют, что здесь не обойтись без касательной, однако в некоторых задачах столь же полезной может оказаться прямая, называемая *нормалью* и определяемая как перпендикуляр к касательной в точке касания. И, приступая к решению, мы прежде всего докажем, что *кратчайшее расстояние между параболом дает общая нормаль к ним*.

Представим себе, что по параболке как по проволоке без трения скользит маленький шарик-бусинка. Если на шарик действует сила $\vec{F}$, то ее можно разложить на две составляющие: $\vec{F}_n$, направленную по нормали к параболке (под действием этой силы шарик перемещаться не может) и $\vec{F}_t$, направленную по касательной. Под действием $\vec{F}_t$ и происходит движение шарика. Он будет

находиться в равновесии, если $\vec{F}_t = 0$, т. е. если сила $\vec{F}$ целиком сведется к $\vec{F}_n$ и будет направлена по нормали.

Пусть по каждой параболе движутся шарики, массы которых m_1 и m_2 , взаимодействующие по закону всемирного тяготения. Поскольку никакие внешние силы не действуют на шарики, они будут стремиться к положению, при котором потенциальная энергия их взаимодействия минимальна. Когда они достигнут этого положения равновесия, расстояние r между ними станет наименьшим (и это расстояние мы ищем). В самом деле: потенциальная энергия

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

(γ — гравитационная постоянная) минимальна, когда минимально r . Но в положении равновесия на шарик действуют лишь силы, направленные по нормали к параболе. Значит, прямая, соединяющая шарики в искомом положении, является нормалью к обоим параболом.

Итак, нам нужно найти общую нормаль к параболам $y = -3x^2 + 8x - 9$ и $y = x^2 + 8x + 13$.

Пусть $(a; -3a^2 + 8a - 9)$ и $(b; b^2 + 8b + 13)$ — точки, в которых искомая нормаль пересекает соответственно первую и вторую параболы.

Напомним, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Что до нормали, то ее уравнение таково:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Значит, в данном случае уравнения нормалей имеют вид

$$y + 3a^2 - 8a + 9 = -\frac{1}{-6a + 8}(x - a) \quad \text{и} \quad y - b^2 - 8b - 13 = -\frac{1}{2b + 8}(x - b).$$

Нормали (т. е. две прямые, уравнения которых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$) совпадают, если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$. Первое равенство означает $8 - 6a = 8 + 2b$, откуда $b = -3a$. Тогда, приравняв

$$3a^2 - 8a + 9 + \frac{a}{6a - 8} = -b^2 - 8b - 13 - \frac{b}{2b + 8}$$

и подставив сюда $b = -3a$, придем после преобразований к уравнению

$$9a^3 - 36a^2 + 49a - 22 = 0,$$

имеющему единственный корень $a = 1$. Таким образом, нормаль пересекает наши параболы в точках $A(1; -4)$ и $B(-3; -2)$. Длина отрезка AB и есть искомое расстояние. Оно равно

$$AB = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-2 + 4)^2} = 2\sqrt{5}.$$



Ответ: $2\sqrt{5}$.

В заключение — примеры для улучшения кровообращения. Конечно, не все задачи столь уж «трудные», но, по крайней мере, «неприятные»: неохота связываться. Но в этом и состоит иногда «трудность».



Последний привал пытливых очаровников

1. Решите уравнение

$$\sqrt{-44x^2 - 15x - 1} = \sqrt{-32x^2 - 12x - 1} + \sqrt{-68x^2 - 33x - 4}.$$

2. То же:

$$x + \sqrt{x^2 - 4} = \frac{2x + 4}{(x - 2)^2}.$$

3. Разложите на множители (являющиеся многочленами):

а) $x^8 + 4x^2 + 4$; б) $x^{10} + x^5 + 1$.

4. Представьте в виде произведения двух многочленов ненулевой степени $x^{2009} + x + 1$.

5. Сравните $2^{2^{500}}$ и $3^{3^{500}}$.

6. Докажите, что:

а) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdots \frac{100}{102} < \frac{1}{17}$;

б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{999} + \frac{1}{1000} < \frac{2}{5}$.

7. Найдите минимум выражения $x^4 + 2y^4$ при условии

$$2x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 = 3.$$

8. Решите уравнение

$$\cos((x + 7\sqrt{x})\pi) \sin\left((4x + \sqrt{x})\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

9. Докажите, что $2 \sin 1^\circ \cdot 2 \sin 2^\circ \cdot 2 \sin 3^\circ \cdots 2 \sin 179^\circ = 180$ (не градусов).

10. Докажите, что $\log_{5+3\sqrt{2}}(3 + 5\sqrt{2})$ есть иррациональное число.

11. Пусть $f(x)$ — многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами, равный по модулю 1 при пяти различных целых значениях переменной. Докажите, что $f(x)$ нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

12. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 2$, $f(x_3) = 3$, где все x_k целые. Докажите, что существует не более одного целого x , такого что $f(x) = 5$.

13. Докажите, что число

$$[(2 + \sqrt{3})^{2n}] + 1$$

делится на 2^{n+1} , где $n \in \mathbb{N}$, $[x]$ — целая часть.

14. Решите уравнение

$$32x^4 + 64x^3 - 48x^2 - 63x - 10 = 0.$$

15. Докажите, что при всех x имеет место неравенство

$$(\sqrt{3 + 32 \sin^2 15^\circ} + \cos 22^\circ + \cos 70^\circ + \cos 88^\circ + 2\sqrt{2} \cdot \sin 15^\circ)x^2 + 4x(\cos 11^\circ + \cos 35^\circ + \cos 44^\circ) + 6 \geq 0.$$

16. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} \leq \frac{1}{4}.$$

17. Решите уравнение $3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$.

Советы и решения

Р 1. Разложите подкоренные выражения на множители.

Р 2. ОДЗ допускает две возможности: $x > 2$ и $x \leq -2$. В первом случае уравнение можно переписать так:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})^2 = \frac{2(x+2)}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \frac{2\sqrt{x+2}}{x-2}.$$

Пусть $x-2 = a^2$, $x+2 = b^2$, где $a, b \geq 0$; тогда

$$b^2 - a^2 = 4. \quad (*)$$

Само уравнение переписывается в виде $a + b = 2b/a^2$. Выразив отсюда $b = a^3/(2 - a^2)$ и подставив в (*), получим $12a^2 = 16$, откуда $a = 2/\sqrt{3}$, $b = 4/\sqrt{3}$. Пусть теперь $x \leq -2$. Тогда имеем

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{-x-2} + \sqrt{-x+2})^2 = \frac{2(x+2)}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x+2} = \frac{2\sqrt{-x-2}}{-x+2}$$

и заменив $-x+2 = a^2$, $-x-2 = b^2$, приходим к равенствам

$$\begin{cases} a + b = \frac{2b}{a^2}, \\ b^2 - a^2 = -4, \end{cases}$$

из которых таким же образом получаем $a^2 = 4/3$, однако тогда $b^2 = a^2 - 4 < 0$.

Р 3. а) Если многочлен $p(x) = x^8 + 4x^2 + 4$ может быть представлен произведением двух многочленов 4-й степени, например,

$$p(x) = (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2)(x^4 + dx^3 + ex^2 + fx + 2),$$

то по соображениям симметрии (проследим за коэффициентами при 7-й, 5-й и 1-й степенях) это разложение на самом деле выглядит так:

$$p(x) = (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2)(x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 2).$$

Теперь следим за коэффициентами при четных степенях. Коэффициент при 6-й степени равен $2b - a^2$, т. е. $2b - a^2 = 0$. Коэффициент при 4-й степени равен $4 - 2ac + b^2$, откуда $4 - 2ac + b^2 = 0$. Коэффициент при 2-й степени равен $4b - c^2$ и таким образом $4b - c^2 = 4$. С миру по нитке составила система

$$\begin{cases} a^2 = 2b, \\ b^2 - 2ac + 4 = 0, \\ c^2 - 4b + 4 = 0. \end{cases}$$

Нам, собственно, не надо ее решать — достаточно подобрать хотя бы одну тройку. И это мы можем: $a = -2$, $b = 2$, $c = -2$.

б) Пусть $x^{10} + x^5 + 1 = p(x)$. Поскольку с одной стороны, $p(x)(x^5 - 1) = x^{15} - 1$, а с другой — $x^{15} - 1 = (x^3)^5 - 1 = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)$, имеем

$$p(x)(x^5 - 1) = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)$$

и после сокращения на $x - 1$ получаем

$$p(x)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1).$$

Деление

$$x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 \quad \text{на} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

даёт частное $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$, и таким образом,

$$p(x) = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

Р 4. Проделаем преобразования, аналогичные тем, что применялись при разложении $x^5 + x + 1$, т. е.

$$x^{2009} + x + 1 = x^{2009} - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^{2007} - 1) + (x^2 + x + 1).$$

Теперь используем формулу (при $a = x^3$ и $n = 334$)

$$a^{2n+1} - 1 = (a - 1)(a^{2n} + a^{2n-1} + \dots + 1)$$

и разность кубов:

$$x^{2007} - 1 = (x^3 - 1)(x^{2004} + x^{2001} + \dots + x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^{2004} + x^{2001} + \dots + x^3 + 1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x^{2009} + x + 1 &= (x^2 + x + 1)(x^2(x - 1)(x^{2004} + x^{2001} + \dots + x^3 + 1) + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^{2007} - x^{2006} + x^{2004} - x^{2003} + x^{2001} - x^{2000} + \dots + x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

Р 5. Прологарифмируем сравниваемые числа по основанию 2. Получим $2^{800} \sqrt[500]{3^{500} \log_2 3}$. Поскольку $\log_2 3 < 2$, если мы докажем, что $2^{800}/3^{500} > 2$, это будет означать, что первое из сравниваемых чисел больше. Но

$$\frac{2^{800}}{3^{500}} = \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{100} = \left(\frac{256}{243}\right)^{100} = \left(1 + \frac{13}{243}\right)^{100};$$

тогда

$$\left(1 + \frac{13}{243}\right)^{100} > 2 \Leftrightarrow 100 \ln \left(1 + \frac{13}{243}\right) > \ln 2.$$

Но

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$$

(см. § 24), поэтому

$$100 \ln \left(1 + \frac{13}{243}\right) > \frac{1300}{256} > 4 > \ln 2.$$

(Другой способ — несколько раз применить неравенство $(1+y)^2 > 1+2y$.)

Р 6. а) Пусть

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdots \frac{100}{102}, \quad B = \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{10} \cdots \frac{101}{103}, \quad C = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{9}{11} \cdots \frac{102}{104}$$

(количество множителей в каждом произведении одинаково). Докажем, что $A < B$ и $A < C$. Тогда отсюда будет следовать, что

$$\begin{aligned} A^2 < BC &\Rightarrow A^3 < ABC = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 100 \cdot 101 \cdot 102}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 102 \cdot 103 \cdot 104} = \\ &= \frac{2}{103 \cdot 104} = \frac{1}{103 \cdot 52} < \frac{1}{103 \cdot 3 \cdot 17} < \frac{1}{17^3} \end{aligned}$$

и, значит, $A < 1/17$. Неравенство $A < B$ выполнено по той простой причине, что каждый множитель в A меньше соответствующего множителя в B , а именно

$$\frac{3n-2}{3n} < \frac{3n-1}{3n+1} \Leftrightarrow (3n-2)(3n+1) < (3n-1)3n \Leftrightarrow -2 < 0.$$

В случае неравенства $A < C$ аналогично имеем

$$\frac{3n-2}{3n} < \frac{3n}{3n+2} \Leftrightarrow -4 < 0.$$

б) Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} > \frac{1}{10}$$

и рассмотрим две суммы:

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

и

$$B = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{1000} - \frac{1}{1001}$$

с равным числом слагаемых. $A > B$ в силу того, что

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} > \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

и вообще

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Значит,

$$A > \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1001} \right) = \frac{499}{3003} > \frac{1}{10}.$$

Впрочем, можно и не подстраивать решение под пункт а), заметив, что уже

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{7}{60} > \frac{1}{10},$$

а остальные слагаемые разбиваются на пары положительных.

Р 7. Пусть $x^4 + 2y^4 = t$; по неравенству Коши

$$x^4 + 2y^4 \geq 2\sqrt{2x^4y^4} = 2\sqrt{2}x^2y^2.$$

Но из условия

$$x^2y^2 = \frac{3-2t}{4}.$$

Поэтому

$$t \geq \frac{3-2t}{\sqrt{2}}, \quad \text{откуда} \quad t \geq \frac{3(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Р 8. Уравнение удовлетворяется в двух случаях:

$$1) \cos(x + 7\sqrt{x})\pi = 1, \quad \sin(4x + \sqrt{x})\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$2) \cos(x + 7\sqrt{x})\pi = -1, \quad \sin(4x + \sqrt{x})\frac{\pi}{2} = -1.$$

Разберем первую возможность. Она приводит нас к системе

$$\begin{cases} x + 7\sqrt{x} = 2n, \\ 4x + \sqrt{x} = 4k + 1. \end{cases}$$

Домножая первое уравнение на -4 и складывая со вторым, найдем

$$\sqrt{x} = \frac{8n - 4k - 1}{27}.$$

Аналогично, домножая второе уравнение на -7 и складывая с первым, найдем

$$x = \frac{28k - 2n + 7}{27}.$$

Значит,

$$\frac{28k - 2n + 7}{27} = \left(\frac{8n - 4k - 1}{27} \right)^2,$$

откуда

$$(8n - 4k - 1)^2 = 27(28k - 2n + 7) \quad \text{или} \quad (8n - 4k - 1)^2 = 3 \cdot 9 \cdot (28k - 2n + 7).$$

Значит, $27(28k - 2n + 7) = m^2$, где $m = 8n - 4k - 1$.

Тогда $28k - 2n - 7 = 3p^2$, где $m = 9p$. Исключая из равенств

$$\begin{cases} 28k - 2n - 7 = 3p^2, \\ 8n - 4k - 1 = 9p, \end{cases}$$

переменную n , получаем соотношение

$$108k + 27 = 12p^2 + 9p \quad \text{или} \quad 4p^2 + 3p = 36k + 9,$$

т.е. число p^2 должно делиться на 3, но тогда и $p = 3t$. Подставим:

$$36t^2 + 9t = 36k + 9 \Rightarrow 4t^2 + t = 4k + 1 \Rightarrow t - 1 = 4s \Rightarrow p = 3t = 3(4s + 1).$$

Окончательно имеем:

$$m = 9p = 27(4s + 1), \quad x = \left(\frac{m}{27}\right)^2 = (4s + 1)^2,$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$

Аналогично рассматривается второй случай, который новых решений не дает.

Р 9. Аргументы синусов можно организовать в тройки: 1, 61, 121; 2, 62, 122; 3, 63, 123; ...; 59, 119, 179 по принципу $\alpha, 60^\circ + \alpha, 120^\circ + \alpha$. И еще останутся отдельно 60 и 120. Это наводит на мысль использовать формулу примера 8 из § 10, а именно

$$\sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(120^\circ + \alpha) = \frac{\sin 3\alpha}{4} \quad \text{или} \quad 4 \sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(120^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha.$$

Обозначив искомое произведение через A , потихоньку тронемся в путь:

$$\begin{aligned} A &= (4 \sin 1^\circ \sin 61^\circ \sin 121^\circ)(4 \sin 2^\circ \sin 62^\circ \sin 122^\circ) \dots \\ &\dots (4 \sin 59^\circ \sin 119^\circ \sin 179^\circ) \cdot 2^{59} \cdot 2 \sin 60^\circ \cdot 2 \sin 120^\circ = \\ &= 3 \cdot 2^{59} (\sin 3^\circ \sin 6^\circ \sin 9^\circ \dots \sin 177^\circ). \end{aligned}$$

Полученное произведение аналогичным образом представляем по тройкам; поскольку троек на этот раз уже 19 ($177 : 3 - 2 = 57 = 19 \cdot 3$), 60 и 120 снова идут отдельно, имеем

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot 2^{38} (4 \sin 3^\circ \sin 63^\circ \sin 123^\circ)(4 \sin 6^\circ \sin 66^\circ \sin 126^\circ) \dots \\ &\dots (4 \sin 57^\circ \sin 117^\circ \sin 177^\circ) \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 120^\circ = \\ &= 9 \cdot 2^{19} (\sin 9^\circ \sin 18^\circ \sin 27^\circ \dots \sin 171^\circ). \end{aligned}$$

Теперь приходится изменить принцип подсчета. Используем формулы приведения: $\sin 99^\circ = \cos 9^\circ$, $\sin 108^\circ = \cos 18^\circ$, ..., $\sin 171^\circ = \cos 81^\circ$ и тут же формулу синуса двойного угла. Тогда

$$A = 9 \cdot 2^{10} \sin 18^\circ \sin 36^\circ \dots \sin 162^\circ = 9 \cdot 2^6 \sin 36^\circ \sin^2 72^\circ.$$

Но

$$\sin 36^\circ \sin 72^\circ = \frac{1}{2} (\cos 36^\circ - \cos 108^\circ) = \frac{1}{2} (\sin 54^\circ + \sin 18^\circ) = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Поэтому $A = 9 \cdot 2^6 \cdot (5/16) = 180$.

Р 10. набросок решения таков. Если допустить, что

$$3 + 5\sqrt{2} = (5 + 3\sqrt{2})^{m/n},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, или $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$, то будет верно также равенство

$$(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n,$$

чего, однако, быть не может, поскольку $0 < 5 - 3\sqrt{2} < 1$ и, значит, $(5 - 3\sqrt{2})^m > 1$, тогда как $3 - 5\sqrt{2} < -1$ и $|(3 - 5\sqrt{2})^n| > 1$.

Р 11. Предположим, что $f(x) = p(x)q(x)$. Степень ни одного из многочленов $p(x)$ и $q(x)$ не может быть меньше 3. Действительно, если степень $p(x)$ равна 2 или меньше, то этот многочлен может принимать значение 1 не более чем в двух точках и значение -1 не более чем в двух точках. Значит, в одной из пяти указанных в условии точек $p(x) \neq \pm 1$. Но тогда произведение $p(x)q(x)$ не может равняться ± 1 , поскольку значение $q(x)$ не может быть дробным.

Пусть степень $p(x)$ равна 3. Тогда $p(x) = 1$ при трех значениях x и $p(x) = -1$ при двух значениях x (или наоборот). Пусть

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1, \quad p(x_4) = p(x_5) = -1.$$

Тогда $p(x_1) - p(x_4) = 2$ и разность $x_1 - x_4$ является делителем 2. Аналогично с разностями

$$p(x_2) - p(x_4) \quad \text{и} \quad p(x_3) - p(x_4).$$

Отсюда следует, что $|x_1 - x_4| = 1$ или 2 и то же для $|x_2 - x_4|$ и $|x_3 - x_4|$. Значит, возможно одно из двух: либо два числа из x_1, x_2, x_3 равны $x_4 \pm 1$, а третье равно $x_4 \pm 2$, либо два из них равны $x_4 \pm 2$, а третье равно $x_4 \pm 1$. То же относится и к расположению чисел x_1, x_2, x_3 относительно x_5 . Тогда x_5 будет находится на расстоянии большем 2 от одного из крайних чисел, что противоречит равенству $|x_k - x_5| = 1$ или 2 при $k = 1, 2, 3$.

Р 12. Допустим, что $f(a) = f(b) = 5$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Кроме того, по условию,

$$f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = 2, \quad f(x_3) = 3.$$

Тогда разность $f(a) - f(x_1) = 4$ делится на $a - x_1$ и $b - x_1$; разность $f(a) - f(x_2) = 3$ делится на $a - x_2$ и $b - x_2$; разность $f(a) - f(x_3) = 2$ — на $a - x_3$ и $b - x_3$. Но тогда разность $f(x_2) - f(x_1) = 1$ делится на $x_2 - x_1$, откуда

$$|x_2 - x_1| = 1;$$

разность $f(x_3) - f(x_2) = 1$ делится на $x_3 - x_2$, откуда $|x_3 - x_2| = 1$; наконец, разность $f(x_3) - f(x_1) = 2$ делится на $x_3 - x_1$, откуда

$$|x_3 - x_1| = 1 \quad \text{или} \quad 2.$$

Отсюда следует, что x_1, x_2, x_3 — последовательные целые числа (не обязательно в таком порядке). Пусть, например, $x_1 = x_2 - 1 = x_3 - 2$ (остальные случаи разбираются так же). Тогда поскольку $|a - x_3|$ может равняться только 1 или 2, имеются две возможности:

$$a = x_3 + 1 \quad \text{и} \quad a = x_3 + 2.$$

И то же относится к b . Значит, либо x_1, x_2, x_3, a, b — пять идущих подряд целых чисел, либо x_1, x_2, x_3, b, a . Но тогда либо $|a - x_2|$, либо $|b - x_2|$ не может равняться ни 1, ни 3, как это требуется равенствами

$$f(a) - f(x_2) = f(b) - f(x_2) = 3.$$

Р 13. Число $(2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n}$ — целое, как это следует из формулы бинома Ньютона. Но $(2 - \sqrt{3})^{2n} < 1$ (число, меньшее 1, возведенное в положительную степень, остается меньше 1), поэтому если

$$[(2 + \sqrt{3})^{2n}] = k, \quad \text{то} \quad (2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n} = k + 1,$$

т.е.

$$[(2 + \sqrt{3})^{2n}] + 1 = (2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n}.$$

Преобразуем правую часть.

$$(2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n} = (4 + 2\sqrt{3})^n + (4 - 2\sqrt{3})^n = 2^n((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n).$$

Конечно, по нынешним временам бином Ньютона не относится к нашим сильным сторонам, но все-таки мы понимаем, что при возведении в n -ю степень все слагаемые, которые останутся, будут входить парами, что даст еще одну двойку, в результате чего за скобку вынесем уже 2^{n+1} , что и завершает доказательство.

Р 14. В данном случае путь наш таков. Прежде всего избавимся от члена с x^3 ; это достигается заменой $x = y - 1/2$. Она приводит уравнение к виду

$$y^4 - 3y^2 + y - \frac{1}{8} = 0. \quad (*)$$

Если применить метод Феррари, то резольвента будет такой: $8a^3 + 12a^2 + a + 1/2 = 0$. Заменяя $2a - 1 = b$, получим уравнение $b^3 - 3b + 1 = 0$, корни которого, если воспользоваться методом, описанным в примере 14 § 4, имеют вид $b_1 = 2 \cos 40^\circ$, $b_2 = 2 \cos 80^\circ$, $b_3 = -2 \cos 20^\circ$. Нам достаточно одного, например, $b = -2 \cos 20^\circ$. Тогда

$$a = \frac{b+1}{2} = \frac{1}{2} - \cos 20^\circ.$$

В соответствии с методом Феррари, уравнение (*) принимает вид

$$(y^2 + a)^2 = \left(y\sqrt{2a+3} - \frac{1}{2\sqrt{2a+3}} \right)^2$$

и распадается на два квадратных

$$y^2 + a = \pm y\sqrt{2a+3} - c, \quad \text{где} \quad c = -\frac{1}{2\sqrt{2a+3}}.$$

Дискриминант

$$D = 3 - 2a - 4c = 4 \cos^2 20^\circ - \frac{2}{\sqrt{4 - 2 \cos 20^\circ}}$$

и путем небольшой задержки можно доказать, что он положительный. Таким образом,

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{2a+3} \pm \sqrt{D}}{2}, \quad y_{3,4} = \frac{-\sqrt{2a+3} \pm \sqrt{D}}{2}$$

и окончательно

$$x_{1,2} = y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2a+3} - 1 \pm \sqrt{D}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2a+3} - 1 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Р 15. Произведем упрощение неравенства, а именно, вычислим

$$3 + 32 \sin^2 15^\circ = 3 + 16(1 - \cos 30^\circ) = 19 - 8\sqrt{3} = (4 - \sqrt{3})^2$$

и

$$2\sqrt{2} \sin 15^\circ = 2\sqrt{2} \sin (60^\circ - 45^\circ) = \frac{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = \sqrt{3} - 1.$$

Это позволяет переписать доказываемое в виде

$$(3 + \cos 22^\circ + \cos 70^\circ + \cos 88^\circ)x^2 + 4x(\cos 11^\circ + \cos 35^\circ + \cos 44^\circ) + 6 \geq 0.$$

Раскладывая косинусы двойных углов, приводим это неравенство к виду

$$(\cos^2 11^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 44^\circ)x^2 + 2x(\cos 11^\circ + \cos 35^\circ + \cos 44^\circ) + 3 \geq 0$$

или

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2x(a + b + c) + 3 \geq 0$$

(обозначения понятны). Дискриминант трехчлена

$$D = -2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = -((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2) < 0,$$

так как $a \neq b$, $b \neq c$. Ну а коль скоро дискриминант отрицателен, а старший коэффициент трехчлена положителен, то и сам трехчлен всегда положителен.**Р 16.** Представим дробь

$$\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

в виде суммы

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

Равенство

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

равносильно такому:

$$a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1) = 1.$$

Подставляя сюда последовательно $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$, найдем $a = c = 1/2$, $b = -1$, т. е.

$$\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Таким образом, искомая сумма представляется в виде

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{1000} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right) - \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n+1}.$$

Пусть

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{1000} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right), \quad B = \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{998} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{999} + \frac{1}{1001} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1002} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \dots + \frac{2}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} \right);$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1001}.$$

В итоге

$$S = A - B = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1002} - \frac{1}{1001} \right) < \frac{1}{4}.$$

Р 17. Корни $x = 0$ и $x = 1$ угадываются, но дальше этого дело не идет. Мы понимаем, что это значит: надо доказывать, что других корней (по-видимому) нет. Рассмотрим функцию $f(t) = t^x + (6-t)^{x^2}$ и докажем, что при $t \in [2; 3]$ она монотонна, если $x \neq 0$ и $x \neq 1$, т.е. $f(2) \neq f(3)$. Производная

$$f'(t) = xt^{x-1} - x^2(6-t)^{x^2-1}.$$

Если $x < 0$, то $f'(t) < 0$, значит, $f(t) \searrow$ и $f(2) > f(3)$. Если $0 < x < 1$, то

$$xt^{x-1} > x^2t^{x-1} > x^2(6-t)^{x^2-1},$$

поскольку при $t \leq 3$ имеем

$$t \leq 6-t \Rightarrow t^{x-1} \geq (6-t)^{x-1}$$

при $0 < x < 1$. Но $x^2(6-t)^{x^2-1} > x^2(6-t)^{x^2-1}$, т.е.

$$f'(t) > 0 \Rightarrow f(t) \nearrow \text{ и } f(2) < f(3).$$

Наконец, при $x > 1$ имеем

$$xt^{x-1} < x^2t^{x-1} < x^2(6-t)^{x^2-1} < x^2(6-t)^{x^2-1},$$

т.е. снова $f'(t) < 0$.



Ответы

1. $-1/4$; 2. $10/3$; 3. а) $(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$.
- б) $(x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$;
4. $(x^2 + x + 1)(x^{2007} - x^{2006} + x^{2004} - x^{2003} + x^{2001} - x^{2000} + \dots + x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$;
5. Первое число больше; 7. $3(2 - \sqrt{2})/2$; 8. $(4n + 1)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
14. $(\sqrt{2a+3} - 1 \pm \sqrt{D})/2$, $(-\sqrt{2a+3} - 1 \pm \sqrt{D})/2$, где $a = 0,5 - \cos 20^\circ$,
 $D = 4 \cos^2 20^\circ - 2/\sqrt{4 - 2 \cos 20^\circ}$; 17. 0; 1.

§ 22. Наш Декамерон, или Десять дней на повторение

Этот раздел имеет значение, закрепленное пословицей «Повторенье — мать ученья». Но, наверное, здесь может встретиться и то, для чего просто не нашлось место на предыдущих страницах. Раздел содержит, так сказать, всё сразу, а именно сто задач по всем темам, для удобства разбитые на десять равных порций.

День первый**1. Упростите¹⁾**

$$\frac{\sqrt[4]{27} - \sqrt{\sqrt{3} - 1} - \sqrt[4]{27} + \sqrt{\sqrt{3} - 1}}{\sqrt[4]{27} - \sqrt{2\sqrt{3} + 1}}.$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 2x - y + 1 = 0, \\ y^2 + 4x - 3y + 12 = 0. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3\sqrt{3x+2} + 12x + 5} + 4\sqrt{3x+2} + 15x + 5 = 0.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

5. Число $x = 4$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$. Найдите корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.**6. Решите неравенство $f'(x) \geq 0$, если**

$$f(x) = \ln \frac{e^{10x}(x-3)^8}{(x+2)^{18}}.$$

7. Если от некоторого двузначного числа отнять 2, то оно разделится нацело на 3, а если отнять не 2, а 3, то разделится не на 3, а на 2. Кроме того, если к этому числу прибавить 4, то оно разделится на 5, а если от него отнять 5, то оно разделится на 4. Более того, если от этого числа отнять 5, то оно разделится нацело на 6, а если отнять 6, то разделится на 5. И это еще не всё: если к этому замечательному числу прибавить 7, то оно разделится на 8, а если прибавить 8, то разделится на 7. Что это за число?**8. Решите уравнение $4 \cos 2x - \cos 4x = 16x + 3$.****9. Решите уравнение**

$$2\sqrt{\log_2 3} = 3\sqrt{\log_2(4x) - 0,75}.$$

10. Могут ли числа $1/2$, $1/3$, $1/5$ принадлежать одной арифметической прогрессии?

¹⁾ «Вообще говоря, задание „упростить выражение“ нельзя считать вполне корректным, но данное здесь выражение в самом деле можно существенно упростить» (И. Ф. Шарыгин).

День второй**11.** Докажите, что

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1000000} < 1.$$

12. Сколько существует натуральных n таких, что $2009 < \sqrt{n} < 2010$?**13.** Упростите:

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + \sqrt{13 - \sqrt{48}}}} \right)^2.$$

14. В арифметической прогрессии $a_6 = 12$. При каком значении разности прогрессии сумма $a_2a_5 - a_3a_8 + a_4a_7$ будет наименьшей?**15.** Найдите $\log_{108}(3/2)$, если $\log_{108} 81 = a$.**16.** Решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 1. \end{cases}$$

17. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения

$$(x^2 + 2x)^2 - 2009(x^2 + 2x) + 2010 = 0.$$

18. Проверьте равенство

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{18} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{18} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{18} = 9.$$

19. Среди всех решений неравенства $x^2 + y^2 - 2x - 4y \leq 4$ найти такое, для которого выражение $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$ максимально.**20.** Функция $f(x)$ обладает свойством: при всех x выполняется равенство $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$. Кроме того, $f(0) = 0$. Найдите $f(2009)$.**День третий****21.** Решите уравнение

$$x^{2009} + (x+1)^{2009} + (x+2)^{2009} + \dots + (x+2010)^{2009} = 0,$$

22. Составьте уравнение общей касательной к параболам

$$y = x^2 + 4x + 8 \quad \text{и} \quad y = x^2 + 8x + 4.$$

23. Докажите, что если число α/β иррационально, то уравнение

$$\sin \alpha x \sin \beta x = 1$$

не имеет корней.

24. Числа a, b, c удовлетворяют равенству $a^2 + 3b^2 + c^2 = 2$. Найдите наибольшее значение суммы $2a + b - c$. При каких a, b и c оно достигается?
25. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{x-1}{(x+2)^2}.$$

26. Определите год рождения одного из основоположников науки нового времени, если известно, что сумма цифр года его рождения равна 21, а если к году рождения прибавить 5355, то получится число, написанное теми же цифрами в обратном порядке.
27. Известно, что многочлен $1,5x^2 + 12x + 26$ равен сумме кубов двух линейных функций. Найдите эти функции.
28. Найдите область определения и множество значений функции

$$f(y) = \sqrt{16y^{-2} - 4y^{-1} + 0,25(4y^{-2} + y^{-3/2})(32 - y^{3/2} - 4y + 8y^{1/2})^{-1}}$$

на отрезке $[0,25; 0,5]$.

29. Числа c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 таковы, что

$$\log_3 c_k \cdot \log_3(c_{k-1} \cdot c_{k+1}) = \log_3 c_{k-1} \cdot \log_3 c_{k+1} \cdot \log_3(9c_k^2)$$

при $k = 2, 3, 4$. Кроме того, $c_1 = 3$, $c_5 = \sqrt[25]{3}$. Найдите

$$\log_3(c_2^4 - c_3^9 + 3c_4).$$

30. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 y^2 - 4xy + y^2 = 1, \\ 2x^2 + 1 = 2x - y. \end{cases}$$

День четвертый

31. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = -|x^3 - 6x^2 + 9x - 3|$$

при $-1 \leq x \leq 5$.

32. Известно, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три различных корня: $2a, b$ и c . Сколько существует таких уравнений?
33. Дано: $2 \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + 3\beta)$; найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} 2\beta$.
34. Решите уравнение

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

35. Сравните $\log_3 12$ и $\log_7 18$.
36. Докажите, что число $19^{19} + 69^{69}$ делится на 44.

37. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 5y^2 + xy + 2 = 2x + 4y. \end{cases}$$

38. Докажите, что если положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_9$ удовлетворяют условию

$$a_1 < a_2 < \dots < a_9, \text{ то } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

39. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условиям

$$f(-1) < 1, \quad f(1) > -1, \quad f(3) < -4.$$

Определите знак коэффициента a .

40. Решите уравнение $[3x + 4] = [4x + 3]$. ($[x]$ — целая часть числа).

День пятый

41. Решите уравнение $x^3 - [x] = 3$, ($[x]$ — целая часть числа).

42. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{2x+3} - 3} \leq 0.$$

43. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - 3 \cos(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}) + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \right) x = 2^{\log_{\sqrt{2}} 3} - 9.$$

44. Найдите числа a, b, c , такие что функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условиям:

$$f'(1) = 8, \quad f(2) + f''(2) = 33, \quad \int_0^1 f(x) dx = 7/3.$$

45. Через точку $A(3; -4)$ проведена касательная l к гиперболе $y = -12/x$. Найдите радиус окружности с центром на оси ординат, касающейся прямой l и оси абсцисс.

46. Вычислите

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \\ & + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha, \end{aligned}$$

если $\alpha = 20^\circ$.

47. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$x - |1 - x^2| + |x| + |3x - 3| + |x + 1| - 7 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

48. Учитель назвал Вовочке натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Но Вовочка по ошибке не сложил эти логарифмы, а перемножил, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал учитель?

49. Решите уравнение

$$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos y = 3 + \cos 2y.$$

50. Вычислите

$$9^2 - 6^2 + 15^2 - 12^2 + \dots + 603^2 - 600^2.$$

день шестой

51. Покажите, что

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8} \left(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{9 - 3\sqrt{5}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{15 + 3\sqrt{5}} \right).$$

52. Решите уравнение

$$\sin 4x \left(2 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2}(1 + \sin 2x + \cos 2x).$$

53. Сократите дробь

$$\frac{2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2}{2x^3 - 5x^2 + 5x - 3}.$$

54. Решите систему

$$\begin{cases} 1 + \log_3(x + y) \cdot \log_2 3 = 2 \log_4 7 - \log_2 x, \\ \log_2(xy + 1) = 2 \log_4 y + \log_{1/8}(x - 2y)^3. \end{cases}$$

55. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + 1}} < \frac{|x + 1| - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{|x| + x^2 + 8}.$$

56. Решите уравнение

$$\arccos \frac{1}{x^2} = \frac{\pi(1 - x)}{2}.$$

57. Справедливый ковбой зашел в бар и попросил у бармена стакан виски за 3 доллара, пачку Marlboro за доллар и 11 центов, шесть пачек патронов для своего кольца и дюжину коробков спичек. Услышав итоговую сумму — 28 долларов и 25 центов, ковбой пристрелил бармена. За что?

58. Решите уравнение

$$\frac{x^5 - x^4}{100x + 1000} = \frac{100x^2 - 200x + 100}{x^2 + 9x - 10}.$$

59. Проверьте равенство

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

60. Считая известным $\lg 24 \approx 1,38021$ и $\lg 25 \approx 1,39794$, определите, сколько нулей содержится после запятой до первой значащей цифры в десятичной записи числа $\sin^{1000}(5\pi/3)$.

День седьмой

61. Сколько существует натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$2^{n^2-n-2} - 2^{n^2-4} = 992?$$

62. Ребра a , b , c прямоугольного параллелепипеда являются корнями уравнения $x^3 - 3x^2 + 8x - 1 = 0$. Найдите объем и полную поверхность параллелепипеда.

63. Сравните

$$5 \log_{4639} 4633 + 1 \quad \text{и} \quad 6 \log_{4639} 4634.$$

64. Решите неравенство

$$|x^3 - 3x + 1| \leq x^3 + x^2 - 1.$$

65. Решите уравнение

$$\log_2^2 x + (x-1) \log_2 x = 6 - 2x.$$

66. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5, 6 и 7 дает в остатке соответственно 2, 3 и 4.

67. Вычислите

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \operatorname{arctg} \frac{1}{21} \right).$$

68. Решите уравнение $4 \operatorname{arctg} (x+2) = \pi(x^3 - x^5 - x)$.

69. Решите уравнение $\sin x (\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2$.

70. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, принимающий значение 2 при трех различных целых значениях переменной. Докажите, что $f(x) \neq 3$ ни при каком целом x .

День восьмой

71. Решите неравенство

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2 - x) \cdot 2^x + 2^{x+1} \cdot x \cdot \sqrt{2-x^2}.$$

72. Определите, при каких натуральных n сократима дробь

$$\frac{2n+1}{5n+1}.$$

73. Решите уравнение

$$\arccos\left(\frac{-6x-4}{4x+7}\right) = 4\pi - 2\pi x.$$

74. Решите уравнение

$$\log_{7-\sqrt{48}}(x^2 + 5x + 1) = \log_{7+\sqrt{48}}(1 - x^2 - 5x).$$

75. Найдите по крайней мере два корня уравнения

$$\left| \sin \frac{\pi x}{2} - 2 \right|^{\log_2(2-\frac{x}{2})} = (x^3 - 6x^2 + 5x + 1)^{\arccos \frac{x}{2}}.$$

76. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{13 \cos x + 98 \sin y} - \sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} = 4, \\ 2\sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} - \sqrt{70 \sin y + 8} = 2. \end{cases}$$

77. Решите неравенство

$$(0,7)^{\log_{2/3} \frac{x^2+x-6}{x-4}} < \frac{x^2-16}{x-4} - x - 3.$$

78. Числа a, b, c — корни уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$, причем $a < b < c$.
Докажите, что

$$b^2 - a = c^2 - b = a^2 - c = 2.$$

79. Найдите хотя бы одно целочисленное решение уравнения $36x - 25y = 1$.

80. Найдите остаток от деления на 13 числа $(3^{20} + 11)^{55}$.

день девятый

81. Сравните без помощи калькулятора $\sqrt[3]{11} + 5$ и $\sqrt[3]{377}$.

82. Группу туристов решили рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было равное количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, но оказалось, что при этом не удается посадить одного туриста. Когда же один автобус уехал, то в оставшиеся автобусы все туристы сели поровну. Сколько первоначально было автобусов и сколько туристов в группе, если известно, что в каждый автобус помещается не более 32 человек

83. Определите, является число 6992371 простым или составным.

84. Найдите все натуральные решения уравнения $xz + 4y = x^2y + yz^2$.

85. Найдите наименьшее значение y , удовлетворяющее системе

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) = 1, \\ |x| + |y| = 3. \end{cases}$$

Сколько решений имеет эта система?

86. Докажите, что если целые числа m , n и p таковы, что сумма $m + n + p$ делится на 6, то и число $m^3 + n^3 + p^3$ делится на 6.

87. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем

$$|f(2)| = |f(5)| = 1.$$

Докажите, что многочлен $f(x)$ не имеет целых корней.

88. Решите уравнение

$$4^x + 9^x - 2 \cdot 6^x + \sqrt{\log_3(x+3)} = 0.$$

89. Решите уравнение $3^u = 9 \cdot 3^v$, где

$$u = 6x^2 - 11x + \frac{\sin 2\pi x}{8}, \quad v = \frac{\cos 2\pi x \cdot \sin^2(\pi/4 - \pi x/2) \cdot \sin^2(\pi/4 + \pi x/2)}{\operatorname{ctg} \pi x - \sin 2\pi x}.$$

90. Докажите, что график любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

День десятый

91. Простое или составное число $4^{545} + 545^4$?

92. Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 100} = \sqrt[3]{x^2 + 100}.$$

93. Решите систему

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0, \\ yz + z^2 + 9x^3y^2 = 3xy^2, \\ 2y^2 + 18xy^2 - z^2 = 10x^2z. \end{cases}$$

94. Найдите остаток от деления многочлена $x^{1000} - 1$ на $x^{17} - 1$.

95. Решите уравнение $\arcsin(\sin x) + \arcsin(\cos x) = \arccos(\sin x)$.

96. Решите уравнение

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} + \frac{1}{a+b-x}.$$

97. Даны три уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad cx^2 + bx + a = 0, \quad x^2 + a^2x + c^2 = 0.$$

Каждое из них имеет хотя бы один корень. Кроме того: каждый корень третьего уравнения является корнем первого уравнения, и хотя бы один корень второго уравнения является корнем третьего. Найдите a, b, c , если $a > 2|c|$.

98. Найдите корни уравнения

$$\sqrt[10]{512} \cdot \sqrt{15x - 21} - \sqrt{13} \cdot \sqrt[5]{15 - 6x} = 0,$$

представимые несократимой дробью вида $a/6$, где a — целое число.

99. Не знаю, вошла ли в анналы занимательной математики (и относится ли к математике вообще) следующая — наверное, правильнее назвать: головоломка, — которую попросили решить лектора одного учебного заведения на предэкзаменационной консультации для поступающих. Текст, написанный неуверенным отроческим почерком на тетрадном листке, гласил:

«Здесь нет никаких подвохов, чистая логика. Есть 5 домов. В каждом живет представитель другой нации. Каждый житель предпочитает определенный напиток, курит определенный сорт сигарет и держит определенное животное. Ни один из 5 жителей не пьет одинаковый напиток, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Вопрос: Кто держит рыбу?

Дано: Англичанин живет в красном доме. Швед держит собаку. Датчанин пьет чай. Зеленый дом стоит слева от белого. Хозяин зеленого дома пьет кофе. Тот, кто курит Pall Mall, держит птицу. Тот, кто живет в среднем доме, пьет молоко. Тот, кто живет в желтом доме, курит Dunhill. Норвежец живет в первом доме. Тот, кто курит Marlboro, живет рядом с тем, кто держит кошку. Тот, кто держит лошадь, живет рядом с курильщиком Dunhill. Тот, кто курит Winston, пьет пиво. Норвежец живет рядом с синим домом. Немец курит Rothmans. Сосед того, кто курит Marlboro, пьет воду».

100. Решите уравнение

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 2009x^{2008} = 0.$$

Советы и решения

Р 1. Обозначим данное выражение через x , причем ясно, что $x < 0$. Тогда

$$x^2 = \frac{2\sqrt[4]{27} - 2\sqrt{2\sqrt{3} + 1}}{\sqrt[4]{27} - \sqrt{2\sqrt{3} + 1}} = 2.$$

Отсюда $x = -\sqrt{2}$.

Р 2. Сложение уравнений дает $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$.

Р 3. Пусть

$$\sqrt{3x+2} + 4x + 1 = y;$$

тогда уравнение можно представить в виде

$$\sqrt{3y+2} + 4y - x + 1 = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \sqrt{3x+2} + 4x + 1 = y, \\ \sqrt{3y+2} + 4y + 1 = x. \end{cases}$$

Вычитая, получаем

$$\sqrt{3x+2} - \sqrt{3y+2} = 5y - 5x$$

или, после домножения на сопряженное,

$$3(x-y) = 5(y-x)(\sqrt{3x+2} + \sqrt{3y+2}).$$

Отсюда $x = y$; вторая возможность

$$-3 = 5(\sqrt{3x+2} + \sqrt{3y+2})$$

исключена. Осталось решить уравнение

$$\sqrt{3x+2} + 4x + 1 = x.$$

Р 4. Понижая степень, преобразуем функцию к виду

$$y = \frac{2(3 + \cos 4x)}{5 + 3 \cos 4x} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{4/3}{5/3 + \cos 4x} \right).$$

Это выражение максимально, если минимален знаменатель (который не может быть отрицательным!), т. е. $\cos 4x = -1$. Тогда $y = 2$.

Р 5. Сделаем в уравнении $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$ замену $x^2 = y \geq 0$; получим уравнение $ay^2 + by + 2 = 0$, имеющее единственный неотрицательный (а нас другие не интересуют) корень $y = 4$. Но тогда $x = \pm 2$.

Р 6. Прежде всего, приведем функцию к виду

$$f(x) = 10x + 8 \ln |x-3| - 18 \ln |x+2|.$$

Ее производная

$$f'(x) = 10 + \frac{8}{x-3} - \frac{18}{x+2},$$

поскольку

$$\ln |x-3| = \begin{cases} \ln (x-3), \\ \ln (3-x), \end{cases} \Rightarrow (\ln |x-3|)' = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)}, \\ -\frac{1}{(3-x)} = \frac{1}{(x-3)} \end{cases} = \frac{1}{x-3}.$$

Неравенство

$$10 + \frac{8}{x-3} - \frac{18}{x+2} \geq 0$$

обычным порядком решается методом интервалов.

Р 7. Если n — искомое число, то условия задачи можно записать в виде серии равенств

$$\begin{aligned}n - 2 &= 3p, & n - 3 &= 2q, & n + 4 &= 5r, & n - 5 &= 4s, \\n - 6 &= 3t, & n + 7 &= 8u, & n + 8 &= 7v.\end{aligned}$$

Последняя пара равенств приводит к уравнению в целых числах $7v - 8u = 1$, решая которое (частное решение $v = u = -1$ очевидно), получаем $v = -1 + 8k$, т. е. $n = 56k - 15$. При $k = 1$ получаем $n = 41$, которое удовлетворяет и первым пяти равенствам. При $k = 2$ имеем $n = 97$, но уже равенство $n - 2 = 3p$ невозможно.

Р 8. При помощи формулы косинуса двойного угла приводим уравнение к виду $\sin^4 x = -2x$. Если $x \notin [-1/2; 0]$, то решений нет, поскольку правая часть либо больше 1, либо отрицательна. Значение $x = 0$ — корень уравнения. Если же $x \in [-1/2; 0]$, то решений нет, и это прекрасно видно по графику. Если же кому-то не видно, то докажем это при помощи производной. Пусть $f(x) = \sin^4 x + 2x$, тогда

$$f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x + 2 > 0$$

при $x \in [-1/2; 0]$, значит, $f(x)$ возрастает и $f(x) < f(0)$, т. е. $\sin^4 x + 2x < 0$ или $\sin^4 x < -2x$.

Р 9. Поскольку

$$2\sqrt{\log_2 3} = 3\sqrt{\log_3 2},$$

получаем

$$\log_3 2 = \log_9(4x) - 0,75 \Leftrightarrow \log_9 4x - \log_9 4 = 0,75 \Leftrightarrow x = 9^{0,75} = 3^{1,5}.$$

Р 10. Пусть $a_1 = 1/5$, $a_{k+1} = 1/3$, $a_{m+1} = 1/2$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + kd, \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + md, \end{cases}$$

откуда $9k = 4m$ и тогда $k = 4n$, $m = 9n$. Для разности прогрессии получаем $d = 1/30n$ и, беря, не мудрствуя лукаво, $n = 1$, находим $d = 1/30$, $k = 4$, $m = 9$, что дает нам одну из возможных прогрессий:

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_5 = \frac{1}{5} + \frac{4}{30} = \frac{1}{3}, \quad a_{10} = \frac{1}{5} + \frac{9}{30} = \frac{1}{2}.$$

Р 11. Поскольку

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right),$$

имеем неравенства

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &< \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right), & \frac{1}{9} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right), & \frac{1}{16} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right), \\ \frac{1}{25} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right), & \dots, & & \frac{1}{1000^2} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1001} \right),\end{aligned}$$

складывая которые, получим

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1000000} < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} \right) < 1.$$

Р 12. Пусть $a = 2009^2$, $b = 2010^2$. Тогда $a < n < b$, причем $b - a = 4019$. И поскольку как a , так и b — числа целые, интервал (a, b) содержит 4018 целых чисел.

Р 13. $13 + \sqrt{48} = 13 + 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 1)^2$; $5 - 2\sqrt{3} - 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$;
 $3 + \sqrt{3} - 1 = 2 + \sqrt{3}$.

Аналогично под вторым радикалом получается $2 - \sqrt{3}$. И всё вместе равно

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 4 + 2 = 6.$$

Р 14. По условию $a_1 + 5d = 12$, поэтому $a_1 = 12 - 5d$ и тогда

$$a_2a_5 - a_3a_8 + a_4a_7 = (12 - 4d)(12 - d) - (12 - 3d)(12 + 2d) + (12 - 2d)(12 + d),$$

что после упрощений принимает вид $4(2d^2 - 15d + 11)$. Этот трехчлен имеет минимум при $d = -b/2a = 15/4$.

Р 15. Из равенства

$$\log_{108} 81 = \frac{4x}{2 + 3x} = a,$$

где $x = \log_2 3$, находим $x = 2a/(4 - 3a)$. Тогда

$$\log_{108} \frac{3}{2} = \frac{x - 1}{2 + 3x} = \frac{5a - 4}{8}.$$

Р 16. Идут пионеры: салют Вьетну!.. Первоочередная задача — составить вспомогательное кубическое уравнение $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, корнями которого будут решения данной системы (см. § 6, примеры 34–35). Имеем

$$p = -1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx),$$

т. е. $3 = 1 - 2q$, $q = -1$. С третьим уравнением приходится повозиться. Поскольку мы ищем коэффициент r в уравнении $t^3 - t^2 - t + r = 0$ или $x^3 - x^2 - x + r = 0$, имеем $x^3 - x^2 - x + r = 0$, т. е. $x^3 = x^2 + x - r$. Аналогично

$$y^3 = y^2 + y - r, \quad z^3 = z^2 + z - r,$$

поскольку x, y, z — корни уравнения $t^3 - t^2 - t + r = 0$. Теперь, чтобы понизить степень, домножим равенство $x^3 = x^2 + x - r$ на x^2 ; получим $x^5 = x^4 + x^3 - rx^2$, и подставим вместо x^3 трехчлен $x^2 + x - r$. Имеем:

$$x^5 = x^4 + x^3 - rx^2 = x^4 + x^3 + x - r - rx^2 = x^4 + (1 - r)x^2 + x - r.$$

Точно также

$$y^5 = y^4 + (1 - r)y^2 + y - r, \quad z^5 = z^4 + (1 - r)z^2 + z - r.$$

Тогда

$$x^5 + y^5 + z^5 = x^4 + y^4 + z^4 + (1 - r)(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z) - 3r$$

или

$$1 = x^4 + y^4 + z^4 + 3(1 - r) + 1 - 3r = x^4 + y^4 + z^4 + 4 - 6r,$$

т. е.

$$6r = x^4 + y^4 + z^4 + 3.$$

Но

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = \\ &= 9 - 2((xy + yz + zx)^2 - 2(xy^2z + yz^2x + zx^2y)) = \\ &= 9 - 2(1 - 2xyz(y + z + x)) = 9 - 2(1 + 2r) = 7 - 4r. \end{aligned}$$

Тогда

$$6r = 7 - 4r + 3 \quad \text{и} \quad r = 1.$$

Итак, вспомогательное уравнение имеет вид

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -1$, $t_2 = t_3 = 1$.

Р 17. Пусть $x^2 + 2x = y$, тогда великая теорема для уравнения $y^2 - 2009y + 2010 = 0$ дает $y_1 + y_2 = 2009$, $y_1 y_2 = 2010$ (заметим, что корни существуют). Примененная к уравнениям $x^2 + 2x = y_1$ (пусть его корни x_1 и x_2) и $x^2 + 2x = y_2$ (с корнями x_3 и x_4), теорема Виета приводит к равенствам

$$x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 x_2 = -y_1, \quad x_3 + x_4 = -2, \quad x_3 x_4 = -y_2.$$

Тогда искомая величина

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 8 + 2(y_1 + y_2) = 4026.$$

Р 18. Равенство следует из тождества

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}^2(60^\circ + \alpha) = 9 \operatorname{tg}^2 3\alpha + 6,$$

доказанного в упражнении 23 к § 10.

Р 19. Иными словами, требуется найти точку круга $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$, наиболее удаленную от точки $(-2; -3)$. Ясно, что искомая точка лежит на границе, т. е. на окружности, которую можно задать уравнениями $x - 1 = 3 \cos \phi$, $y - 2 = 3 \sin \phi$. Тогда выражение, максимум которого ищется, примет вид $(3 \cos \phi + 3)^2 + (3 \sin \phi + 5)^2$ или, после упрощений и введения вспомогательного угла,

$$43 + 6\sqrt{34} \sin(\phi + \alpha),$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}(3/5)$. Максимум достигается при $\sin(\phi + \alpha) = 1$, откуда

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3}{5}.$$

Тогда

$$x = 1 + 3 \cos \phi = 1 + 3 \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{5} \right) = 1 + \frac{9}{\sqrt{34}}, \quad y = 2 + \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

Р 20. Имеем $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$. Возникает предположение, что $f(n) = n^2$ при любом натуральном n . Тогда метод математической индукции (а на что же еще эта задача?) требует проверки равенства $f(n+1) = (n+1)^2$, которое, очевидно, верно, поскольку

$$f(n+1) = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1.$$

Значит, $f(2009) = 2009^2 \approx 4036081$. Если мы не хотим использовать индукцию, то рассуждаем так

$$f(1) = 1, \quad f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1,$$

$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1, \quad \dots, \quad f(2009) = f(2008) + 2 \cdot 2008 + 1.$$

Складывая эти 2008 равенств, получаем $f(2009) = 1 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2008) + 2008$, что дает тот же ответ.

Р 21. Заменяя $x + 1005 = y$, получим уравнение

$$(y - 1005)^{2009} + (y - 1004)^{2009} + \dots + (y + 1004)^{2009} + (y + 1005)^{2009} = 0,$$

корнем которого, очевидно, является $y = 0$, а других быть не может в силу того, что каждое слагаемое является возрастающей функцией. Значит, $x = -1005$.

Р 22. Если $A(a; a^2 + 4a + 8)$ и $B(b; b^2 + 8b + 4)$ — точки, в которых искомая касательная касается каждой из парабол, то уравнение этой касательной можно записать двумя способами в виде системы

$$\begin{cases} y - a^2 - 4a - 8 = (2a + 4)(x - a), \\ y - b^2 - 8b - 4 = (2b + 8)(x - b) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = (2a + 4)x + 8 - a^2, \\ y = (2b + 8)x + 4 - b^2. \end{cases}$$

Отсюда, во-первых, равны угловые коэффициенты, т. е. $2a + 4 = 2b + 8$ или $a = b + 2$. Во-вторых, равны свободные члены, т. е. $8 - a^2 = 4 - b^2$. Окончательно $a = 2$, $b = 0$ и уравнение касательной $y = 8x + 4$.

Р 23.

$$\begin{aligned} \dots &\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha - \beta)x = 1, \\ \cos(\alpha + \beta)x = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - \beta)x = 2\pi n, \\ (\alpha + \beta)x = \pi + 2\pi k, \end{cases} \dots \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2n + 2k + 1}{2k - 2n + 1}, \end{aligned}$$

что невозможно при $n, k \in \mathbb{Z}$.

Р 24. Введем векторы $\vec{x} = (a; b\sqrt{3}; c)$ и $\vec{y} = (2; 1/\sqrt{3}; -1)$. Тогда в силу неравенства $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ мы имеем

$$2a + b - c = \vec{x} \cdot \vec{y} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{3} + 1} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Это значение достигается, если векторы коллинеарны, т. е. $a/2 = 3b = -c$. Подставляя $a = -2c$ и $b = -c/3$ в равенство $a^2 + 3b^2 + c^2 = 2$, найдем $c = -\sqrt{3/8}$ (выбираем отрицательное значение, поскольку именно оно отвечает максимуму суммы $2a + b - c$). Тогда $a = \sqrt{3/2}$, $b = 1/2\sqrt{6}$.

Р 25. $y = \frac{x-1}{(x+2)^2} \Rightarrow yx^2 + 4xy + 4y = x - 1$ или $yx^2 + (4y-1)x + 4y + 1 = 0$.

Это квадратное относительно x уравнение разрешимо, только если

$$D = (4y - 1)^2 - 4y(4y + 1) \geq 0.$$

Последнее неравенство выполнено при $y \leq 1/12$. Таким образом, для каждого $y \leq 1/12$ найдется хотя бы один x , т. ч.

$$y = \frac{x-1}{(x+2)^2}.$$

Поэтому множеством значений данной функции является промежуток $(-\infty; 1/12]$.

Р 26. Эту задачу хочется решать подбором. Кто имеется в виду? Ньютон? 1642. Галилей? 1564. Кеплер? 1571. Декарт? Он, родимый: 1596. Cogito ergo sum. Другой способ. Если год рождения $1\bar{a}b\bar{b}c$, то:

$$1) a + b + c = 20; \quad 2) 1000 + 100a + 10b + c + 5355 = 1000c + 100b + 10a + 1.$$

После упрощений получаем $121c + 20b = 906$ и подходит только $c = 6$ и теперь однозначно восстанавливаются $b = 9$ и $a = 5$.

Р 27. Раскрывая скобки в правой части равенства

$$1,5x^2 + 12x + 26 = (ax + b)^3 + (cx + d)^3$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему

$$\begin{cases} a^3 + c^3 = 0, \\ a^2b + c^2d = \frac{1}{2}, \\ ab^2 + cd^2 = 4, \\ b^3 + d^3 = 26. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $c = -a$, и система принимает вид

$$\begin{cases} a^2(b + d) = \frac{1}{2}, \\ a(b^2 - d^2) = 4, \\ b^3 + d^3 = 26. \end{cases}$$

Если возвести второе уравнение в квадрат и поделить на третье, учитывая первое, то получим соотношение

$$\frac{(b - d)^2}{b^2 - bd + d^2} = \frac{16}{13},$$

равносильное однородному уравнению

$$3b^2 + 10bd + 3d^2 = 0,$$

из которого $b = -3d$ или $d = -3b$. Получаем две четверки решений: $a = 1/2$, $b = 3$, $c = -1/2$, $d = -1$ и $a = -1/2$, $b = -1$, $c = 1/2$, $d = 3$, которые, однако, дают только один вариант ответа, поскольку «от перемены мест слагаемых...».

Р 28. Условие $16y^{-2} - 4y^{-1} + 0,25 \geq 0$ выполнено при всех $y \neq 0$, поскольку оно равносильно неравенству

$$\frac{(y - 8)^2}{y^2} \geq 0.$$

Далее: при $y \neq 0$, $y \neq 8$, $y \in [0,25; 0,5]$ имеем

$$f(y) = \frac{|(y - 8)/y|(4 + \sqrt{y})/y^2}{8(4 + \sqrt{y}) - y(4 + \sqrt{y})} = \frac{(8 - y)/y^3}{8 - y} = \frac{1}{y^3} = y^{-3}.$$

Если $y \in [0,25; 0,5]$, то $y^{-3} \in [8; 64]$.

Р 29. Пусть $\log_3 c_2 = x$, $\log_3 c_3 = y$, $\log_3 c_4 = z$. Тогда условие задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} x(1 + y) = y(2 + 2x), \\ y(x + z) = xz(2 + 2y), \\ z\left(y + \frac{1}{25}\right) = y \cdot \frac{1}{25}(2 + 2z). \end{cases}$$

Очевидно, тройка $x = y = z = 0$ является решением.

Из первого уравнения находим $y = x/(x+2)$. Подставляя в третье, получаем $z = x/(12x+1)$. Тогда из второго уравнения находим

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{9}, \quad z = \frac{1}{16}.$$

В случае нулевого решения искомая величина равна 1. Для второй тройки получаем: $c_2 = 3^{1/4}$, $c_3 = 3^{1/9}$, $c_4 = 3^{1/16}$. Тогда

$$\log_3(c_2^4 - c_3^9 + 3c_4) = \frac{17}{16}.$$

Р 30. В результате сложения первого уравнения с удвоенным вторым получаем

$$x^4 y^2 + (2x - y - 1)^2 = 0.$$

Р 31. Раскрыть модуль нельзя, однако, исследовав функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, видим, что она имеет три нуля, расположенные на отрезке $[-1; 4]$. Таким образом, наибольшее значение исходной функции равно 0. Функция $f(x)$ имеет экстремумы в точках $x = 1$ и $x = 3$. Сравнивая значение исходной функции в этих точках и на концах отрезка, устанавливаем, что наименьшее значение равно $y(-1) = -19$.

Р 32. Из теоремы Виета следует, что

$$\begin{cases} 3a + b + c = 0, \\ 2ab + bc + 2ac = b, \\ 2abc = -c. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3a + b + c = 0, \\ 2a(b + c) + bc = b, \\ 2abc = -c. \end{cases}$$

Если $c = 0$, то легко находим $a = 1/2$, $b = -3/2$.

Если $c \neq 0$, имеем систему

$$\begin{cases} 3a + b + c = 0, \\ -1 + 2ac + bc = b, \\ 2ab = -1. \end{cases}$$

исключая из которой a и c приходим к уравнению $2b^4 + 2b^3 - 3b^2 + 3 = 0$. После отделения корня $b = -1$, дающему нам еще один вариант: $a = 1/2$, $c = -1/2$, получается уравнение $2b^3 - 3b + 3 = 0$. Сколько корней оно имеет? Поскольку производная $6b^2 - 3$ равна нулю при $b = \pm 1/\sqrt{2}$, и в точке минимума $b = 1/\sqrt{2}$ принимает значение

$$2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} + 3 = 3 - \sqrt{2} > 0,$$

кривая пересекает ось абсцисс только один раз. Таким образом, имеются три уравнения, удовлетворяющие условию задачи.

Р 33. Переписав условие в виде $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + 3\beta) - \cos(\alpha - \beta)$, получим $\cos(\alpha - \beta) = -2 \sin(\alpha + \beta) \sin 2\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} 2\beta &= -\frac{\cos(\alpha - \beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos 2\beta} = -\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + 3\beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \\ &= -\frac{\cos(\alpha - \beta)}{2 \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Р 34. Сгруппируйте попарно дроби с равными числителями.

Р 35. Отняв по 1, получим $\log_5 12/5 \vee \log_7 18/7$ и знак «>», поскольку

$$\log_5 \frac{12}{5} > \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}, \quad \log_7 \frac{18}{7} < \log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}.$$

Р 36. Поскольку

$$19^{19} + 69^{69} = (44 - 25)^{19} + (44 + 25)^{19},$$

остаток при делении этого числа на 44 равен $(-25)^{19} + (25)^{19} = 0$.

Р 37. Сложив уравнения, получаем $(x + 2y - 1)^2 + 2y^2 = 0$.

Р 38. Из условия следует, что

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3, \quad a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6, \quad a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9) \quad \text{или} \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

Р 39. По условию задачи составляется система неравенств

$$\begin{cases} a - b + c < 1, \\ a + b + c > -1, \\ 9a + 3b + c < -4, \end{cases} \quad (*)$$

или

$$\begin{cases} a - b + c < 1, \\ -a - b - c < 1, \\ 9a + 3b + c < -4. \end{cases}$$

Складывая первые два неравенства, получаем $-2b < 2$ или $b > -1$. Тогда $a + c > 0$ (второе неравенство в системе (*)). С учетом найденных условий третье неравенство можно переписать так:

$$8a - 3 < 8a + 3b + (a + c) < -4,$$

откуда $8a < -1$, $a < -1/8$. Т.е. $a < 0$.

Р 40. Уравнение переписывается в виде $[3x] + 4 = [4x] + 3$ или $[3x] + 1 = [4x]$. Заметим, что $x = 1$ — корень. Теперь разобьем отрезок $[1; 2]$ на 6 частей точками

$$1\frac{1}{4}, \quad 1\frac{1}{3}, \quad 1\frac{1}{2}, \quad 1\frac{2}{3}, \quad 1\frac{3}{4}$$

и на каждом решим уравнение. Убедимся, что оно выполнено на трех из них. Теперь, используя формулу

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

(см. § 3) для $n = 3$ и $n = 4$, перепишем уравнение в виде

$$\left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] + 1 = \left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{3}{4}\right].$$

Поскольку

$$\left[x + \frac{1}{3}\right] \leq \left[x + \frac{1}{2}\right] \quad \text{и} \quad \left[x + \frac{2}{3}\right] \leq \left[x + \frac{3}{4}\right],$$

уравнение не имеет решений, если $1 < [x + 1/4]$. Поэтому при $x \geq 2$ решений нет. Если $x \leq 0$, то решений нет, поскольку $[3x] \geq [4x]$. На интервале $(0; 1)$ уравнение решается так же, как на $(1; 2)$. Для графического решения задачи рекомендуется клетчатая бумага с ценой клетки $1/12$. Тогда хорошо видно, как одна лестница проходит сквозь другую (рис. 42).

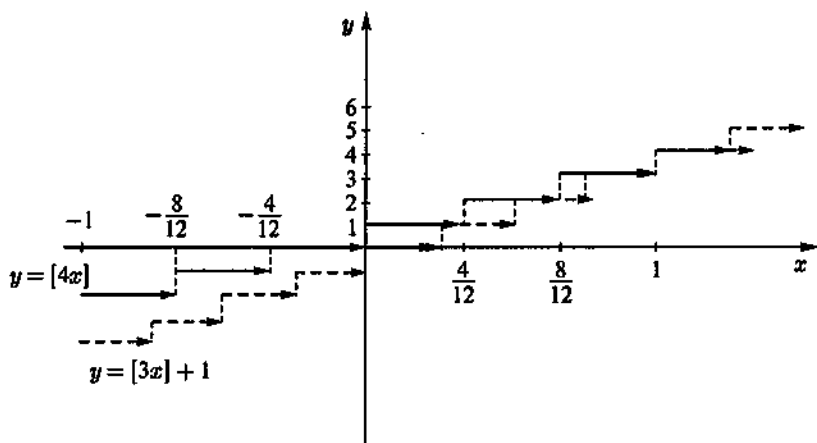


Рис. 42

Р 41. «Из графиков функций $y = [x]$ и $y = x^3 - 3$ видно», что $x \in (1; 2)$, поэтому $[x] = 1$, откуда $x^3 - 3 = 1$.

Р 42. Как числитель, так и знаменатель обращаются в нуль только при $x = 3$; ОДЗ: $x \geq 2$. Дальше — метод интервалов.

Р 43. Поскольку

$$\cos(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}) = \frac{1}{3}, \quad \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}, \quad 2^{\log_2 \sqrt{2}^3} = 9,$$

уравнение принимает вид

$$\left(2 - \sqrt{3} - 1 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1}\right)x = 0$$

или, после уничтожения иррациональности в знаменателе,

$$(2 - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} - 1)x = 0,$$

т.е. $0x = 0$. Это равенство верно при любом x .

Р 44. Условия задачи означают:

$$2a + b = 8, \quad 4a + 2b + c + 2a = 33, \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{7}{3}.$$

Запишем как систему и решим.

Р 45. Уравнение касательной $y = 4x/3 - 8$, она образует с осью абсцисс угол α , тангенс которого равен $4/3$, тогда $\cos \alpha = 3/5$. Пусть координаты центра искомой окружности $(0; r)$. Опустив из центра окружности перпендикуляр на касательную, получим прямоугольный треугольник, из которого $(r + 8) \cos \alpha = \pm r$.

Р 46. Имеем

$$(\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + \\ + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 180^\circ = -1,$$

так как все скобки равны 0.

Р 47. Эта задача — из почти не затронутых нами тем «Модуль на координатной плоскости» плюс «Интеграл». В качестве компенсации — задача полновесная. Помучившись, создаем чертеж (рис. 43).

И начинаем считать.

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (x+2)^2 dx = \frac{1}{3}; \quad S_2 = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x + 4) dx = \frac{8}{3};$$

$$S_3 = \int_0^1 (4 - x^2) dx = \frac{11}{3}; \quad S_4 = \int_1^2 ((x-3)^2 - 1) dx = \frac{4}{3}; \quad S_5 = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi.$$

Сложив все, получим $2\pi + 8$.

Р 48. Искомое число удовлетворяет уравнению $\log_3 x + \log_{75} x = 2 \log_3 x \cdot \log_{75} x$. Переходя к десятичным логарифмам, получаем

$$\frac{\lg x}{\lg 3} + \frac{\lg x}{\lg 75} = \frac{2 \lg^2 x}{\lg 3 \lg 75}.$$

Поскольку $\lg x \neq 0$ (тогда $x = 1$ и результаты верного и ошибочного действий совпадают — получается 0), после приведения к общему знаменателю имеем $\lg(3 \cdot 75) = 2 \lg x$ или $x^2 = 225$.

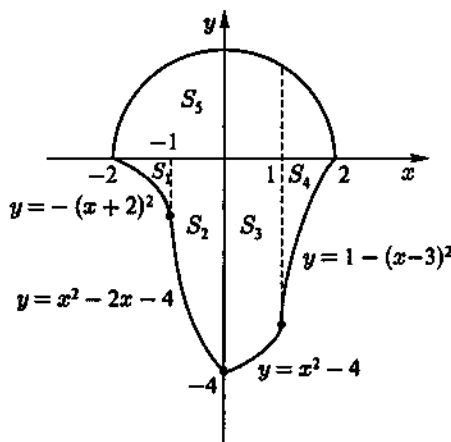


Рис. 43

Р 49. $\dots \Leftrightarrow 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos y = 1 + \cos^2 y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\text{так как } \cos y \neq 0) \quad 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\cos y} + \cos y.$$

Если $\cos y > 0$, то правая часть не меньше 2, а левая не больше 2, т.е. $\sin(x + \pi/4) = 1$, $\cos y = 1$; если $\cos y < 0$, то правая часть не больше -2, левая — не меньше -2; соответственно $\sin(x + \pi/4) = -1$, $\cos y = -1$.

Р 50. Выражение равно $3(15 + 27 + 39 + \dots + 1203)$. Скобка — сумма 100 членов арифметической прогрессии с разностью 12 и первым членом 15.

Р 51. Поскольку

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ,$$

а мы знаем, что

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

имеем

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16} (\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{60 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{20 + 4\sqrt{5}}). \quad (*)$$

Но

$$\sqrt{10} - \sqrt{2} = \sqrt{12 - 2\sqrt{20}} = 2\sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

и аналогично

$$\sqrt{30} - \sqrt{6} = \sqrt{36 - 2\sqrt{180}} = 2\sqrt{9 - 3\sqrt{5}},$$

что при подстановке в (*) дает требуемое равенство.

Р 52. Поскольку

$$2 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 2 + \frac{1}{\sin x (\cos x - \sin x)},$$

после раскрытия скобок получаем

$$\sin 4x + 1 + (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2}(1 + \sin 2x + \cos 2x).$$

Дальше — замена

$$\sin 2x + \cos 2x = y \Rightarrow \sin 4x + 1 = y^2.$$

Р 53. Данная дробь есть

$$\frac{2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2}{(2x-3)(x^2-x+1)},$$

и числитель делится без остатка на $x^2 - x + 1$.

Р 54. Из первого уравнения получаем $2(x+y) = 7/x$, тогда $y = 7/2x - x$. Второе уравнение приводим к виду $(xy+1)(x-2y) = y$ и, подставляя найденное выражение для y , приходим к уравнению $6x^4 - 43x^2 + 70 = 0$.

Р 55. Левая часть неравенства положительна, а правая — отрицательна. Решений нет.

Р 56. ОДЗ: $|x| \geq 1$. Правая часть заключена в пределах $\{0; \pi\}$ при $|x| \leq 1$. Значит, корнями могут быть только $x = \pm 1$. Осталось подставить и проверить.

Р 57. Можно предположить, что поскольку 6 пачек патронов и 12 коробков спичек были оценены в 24 доллара и 14 центов, т.е. 3 пачки и 6 коробков — в 12 долларов и 7 центов, иными словами — стоимости n одной пачки и m — одного коробка должны удовлетворять уравнению $3n + 6m = 1207$ (если перевести в центы), отсюда следует, что хотя бы одно число должно быть дробным...

$$\text{Р 58.} \quad \dots \Leftrightarrow \frac{x^4(x-1)}{100(x+10)} = \frac{100(x-1)^2}{(x-1)(x+10)} \Leftrightarrow x^4 = 10^4, \quad x \neq -10.$$

Р 59. Перепишем доказываемое равенство так:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \sqrt[3]{9} = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

Домножим обе части на $\sqrt[3]{2} + 1$; получим

$$\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^3} \cdot 9 = 3$$

или после возведения в куб,

$$\begin{aligned} 9(\sqrt[3]{2}+1)^2(\sqrt[3]{4}-1) &= 27 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-1) = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)(\sqrt[3]{4}-1) = 3 \end{aligned}$$

или $4-1=3$ (снова разность кубов). Заметим, что так называемое «аккуратное решение» — те же выкладки, прокрученные задом-наперед:

$$\begin{aligned} 4-1=3 &\Rightarrow \sqrt[3]{4^3-1^3}=3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)=3 \Rightarrow 9(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^2=27 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9(\sqrt[3]{2}+1)^3(\sqrt[3]{2}-1)=27 \Rightarrow \sqrt[3]{2}-1 = \frac{27}{9(\sqrt[3]{2}+1)^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{3}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{9}. \end{aligned}$$

Р 60. Наше число $N = (3/4)^{500}$. Тогда $\lg N = 500(\lg 3 - 2 \lg 2)$. Условие дает нам два равенства:

$$3 \lg 2 + \lg 3 = 1,38021 \quad \text{и} \quad 2(1 - \lg 2) = 1,39794$$

(позволим себе писать « $\approx$ » вместо « $\approx$ »). Рассматривая их как систему, находим

$$\lg 2 = 0,30103, \quad \lg 3 = 0,47712.$$

Тогда $\lg N = -500 \cdot 0,12494 \approx -62,470$ или $N \approx 10^{-62,470}$. Значит, после запятой это число содержит 62 нуля.

Р 61. Уравнение можно привести к виду $2^{n^2} \cdot (2^{n+2} - 1) = 2^9 \cdot 31$. Отсюда следует, что одновременно $n^2 = 9$, $2^{n+2} - 1 = 31$.

Р 62. По теореме Виета $abc = 1$, $ab + bc + ac = 8$.

Р 63. Обозначив $\log_{4639} 4633 = \log_a b$, причем $a = b + 6$, переписываем сравниваемые выражения в виде

$$5 \log_a b + 1 \vee 6 \log_a (b+1) \Leftrightarrow b^5(b+6) \vee (b+1)^6.$$

Первое число меньше, либо поскольку $(b+1)^6 = b^6 + 6b^5 + \dots$ (где точки означают положительные слагаемые), либо по неравенству Коши (для $n = 6$).

$$\text{Р 64.} \quad \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 \leq x^3 + x^2 - 1, \\ x^3 - 3x + 1 \geq -x^3 - x^2 + 1. \end{cases}$$

Р 65. Решая как квадратное относительно $\log_2 x$, приходим к двум уравнениям:

$$\log_2 x = -2 \quad \text{и} \quad \log_2 x = 3 - x.$$

Единственный корень второго уравнения (слева возрастающая функция, справа — убывающая) находится подбором.

Р 66. Поскольку искомое число x можно представить в виде

$$x = 5k + 2 = 6n + 3 = 7m + 4,$$

имеем два уравнения в целых числах: $5k - 6n = 1$ и $6n - 7m = 1$. Решение первого: $n = -1 + 5t$, $k = -1 + 6t$. Из второго находим $n = -1 + 7p$. Тогда $-1 + 5t = -1 + 7p$, откуда $t = 7q$. Значит, $n = -1 + 35q$. Наименьшее натуральное n равно 34, тогда $x = 6n + 3 = 207$.

Р 67. Трижды применим формулу

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Р 68. Левая часть — возрастающая функция; правая — убывающая, поскольку

$$(x^3 - x^5 - x)' = 3x^2 - 5x^4 - 1 < 0.$$

Единственный корень $x = -1$ подбирается.

Р 69. Перепишем как квадратное относительно $\sin x$ в виде

$$\sin^2 x - (\cos 2x + \cos 6x) \sin x + 1 = 0.$$

Тогда

$$D = (\cos 2x + \cos 6x)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x = \pm 2.$$

И, следовательно, $\sin x = \pm 1$. Тогда

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = -1 \quad \text{и} \quad \cos 6x = \cos 2x(4\cos^2 x - 3) = -1,$$

т. е. выполнено условие $\cos 2x + \cos 6x = -2$, отвечающее случаю $\sin x = -1$.

Р 70. Пусть

$$f(x) = 3 \quad \text{и} \quad f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 2,$$

где все x_k целые. Тогда $f(x) - f(x_1) = 1$ делится на $x - x_1$, $f(x) - f(x_2) = 1$ делится на $x - x_2$, $f(x) - f(x_3) = 1$ делится на $x - x_3$. Отсюда следует, что

$$|x - x_1| = |x - x_2| = |x - x_3| = 1.$$

Но это невозможно при попарно различных x_k (принцип Дирихле).

Р 71. Группируя и вынося, переписываем неравенство в виде

$$4x - x^3 \cdot 2^x - 4(1 - 2\sqrt{2 - x^2}) + x \cdot 2^x(1 - 2\sqrt{2 - x^2}) > 0$$

и идем к разложению на множители:

$$x(4 - x \cdot 2^x) - (1 - 2\sqrt{2 - x^2})(4 - x \cdot 2^x) > 0 \Leftrightarrow (4 - x \cdot 2^x)(x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2}) > 0.$$

Путь к применению метода интервалов открыт. Уравнение $x \cdot 2^x = 4$ могло бы испортить нам настроение, однако спасает ОДЗ, ибо при $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (а она такова — или оно таково?) имеем:

$$x \cdot 2^x \leq \sqrt{2} \cdot 2^{\sqrt{2}} < \sqrt{2} \cdot 2^{3/2} = 4,$$

так что неравенство сводится к

$$x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} > 0.$$

Единственный входящий в ОДЗ корень $x = -1$.

Р 72. Пусть $\text{НОД}(2n + 1, 5n + 1) = a$. Тогда a — делитель также и числа

$$5n + 1 - (2n + 1) = 3n,$$

а также — делитель числа $2n + 1 - 3n = -(n - 1)$. Числа $n - 1$ и n общих делителей не имеют (не беря тривиальных случаев, которые можно рассмотреть потом). Значит, a — делитель 3 и $n - 1$, т.е. $n - 1 = 3k$, $n = 3k + 1$. При $n = 1$ дробь несократима, а при $n = 4, 7, 10, \dots$ сократима.

Р 73. Согласно определению и свойствам арккосинуса, необходимо потребовать выполнения условий

$$-1 \leq \frac{-6x - 4}{4x + 7} \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq 4\pi - 2\pi x \leq \pi.$$

Решение первого двойного неравенства служит отрезок $[-11/10; 3/2]$, решение второго — отрезок $[3/2; 2]$. Единственная общая точка $x = 3/2$. При подстановке в уравнение получаем верное равенство $\arccos(-1) = \pi$.

Р 74. Если обозначить $x^2 + 5x = y$, $7 - \sqrt{48} = a$, то уравнение примет вид

$$\log_a(y + 1) = \log_{a^{-1}}(1 - y),$$

т.е. $(y + 1)(1 - y) = 1$.

Р 75. Первый случай — показатели степени равны 0 (а основания не равны 0). Уравнения $\log_2(2 - x/\pi) = 0$ и $\arccos \pi/x = 0$ дают нам корень $x = \pi$. Теперь приравниваем к 1 основания степеней. Уравнение

$$\left| \sin \frac{\pi x}{2} - 2 \right| = 1$$

выполнено при $x = 1 + 4n$. Уравнение $x^3 - 6x^2 + 5x + 1 = 1$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, из которых только третий принадлежит ОДЗ (и имеет вид $4n + 1$).

Р 76. Присутствие тригонометрических функций в этой задаче чисто декоративное. Заменим $13 \cos x + 28 \sin y = a^2$, $70 \sin y + 8 = b^2$; тогда $13 \cos x + 98 \sin y = a^2 + b^2 - 8$ и мы получаем вспомогательную систему

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 - 8} - a = 4, \\ 2a - b = 2, \end{cases}$$

из которой без труда находим $a = 5$, $b = 8$. Тогда

$$\begin{cases} 13 \cos x + 28 \sin y = 25, \\ 70 \sin y + 8 = 64. \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{5}, \quad \sin y = \frac{4}{5}.$$

Р 77. Правая часть равна 1; имеем тогда

$$\log_{2/3} \frac{x^2 + x - 6}{x - 4} > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 1.$$

Р 78. Поскольку мы знаем, что корни этого уравнения $a = -2 \cos 20^\circ$, $b = 2 \cos 80^\circ$, $c = 2 \cos 40^\circ$, надо проверить равенства

$$4 \cos^2 80^\circ + 2 \cos 20^\circ = 2, \quad 4 \cos^2 40^\circ - 2 \cos 80^\circ = 2, \quad 4 \cos^2 20^\circ - 2 \cos 40^\circ = 2,$$

для чего достаточно понизить степень.

Р 79. В чем должно состоять решение задачи? Например, в организации научного подбора. Берем число 36 и начинаем умножать его на 2, 4, 8, ... и смотреть, когда результат будет на 1 отличаться от целого кратного 25 (что не так трудно, не правда ли?). Имеем: 36, 72, 144, 288, 576. Стоп! Ведь $576 = 25 \cdot 23 + 1$. Итак, $x = 576 : 36 = 16$, $y = 23$. (Можно было умножать на 2, 3, 4, 5, ... И получить другое решение $x = -9$, $y = -13$, но это произошло бы только на 8 шаге, что дольше). И, конечно, можно честно решать это уравнение, перейдя к $25k + 11n = 1$ или даже к $11t + 14k = 1$ или $11p + 3k = 1$, когда подбор частного решения уже совсем прост: $p = -1$, $k = 4$.

Р 80. Поскольку

$$3^{20} = 27^6 \cdot 9 = (26 + 1)^6 \cdot 9,$$

остаток при делении этого числа на 13 равен 9, тогда $3^{20} + 11$ даст остаток 7 (т. е. $9 + 11 = 13$). Теперь рассматриваем степени 7. 7^2 дает остаток 10, $7^3 = 343$ — остаток 5, $7^4 = 2391$ — остаток 12, т. е. то же, что приведенный остаток -1 . Это нам подходит. Имеем $7^{55} = (7^4)^{13} \cdot 7^3$, поэтому остаток при делении этого числа на 13 равен остатку при делении на 13 числа -5 . И так как $-5 = 13 \cdot (-1) + 8$, то искомым остатком равен 8.

Р 81. В соответствии с рецептом, изложенным в § 3, возводим в куб:

$$15\sqrt[3]{121} + 75\sqrt[3]{11} \sqrt[3]{241};$$

домножаем обе части сравнения на

$$\sqrt[3]{11} \Rightarrow 165 + 75\sqrt[3]{121} \sqrt[3]{241} \sqrt[3]{11}.$$

Теперь складываем оба сравнения, предварительно домножив первое на 241, а второе на 75, и приходим к сравнению, содержащему только один радикал:

$$\sqrt[3]{121}(241 \cdot 15 + 75^2) + 165 \cdot 75 \sqrt[3]{241}^2 \text{ или } 9240\sqrt[3]{121} \sqrt[3]{241} + 12375.$$

Возведение в куб показывает, что первое число меньше.

Р 82. Пусть количество туристов равно x , число автобусов — n . Тогда, во-первых, $22n + 1 = x$, а во-вторых, $k(n - 1) = x$, где $23 \leq k \leq 32$ — количество туристов в каждом автобусе. Приравняв $22n + 1 = k(n - 1)$, получим

$$n = \frac{k + 1}{k - 22} = 1 + \frac{23}{k - 22}.$$

Это число будет натуральным, только если $k - 22 = 1$ или 23. Условию удовлетворяет только первая возможность. Значит, $k = 23$. Тогда $n = 24$, $x = 529$.

Р 83. Подсказкой можно считать цифры 3 и 7 в середине данного числа. Действительно: в соответствии с результатом задачи 18 § 1, данное число делится на 37, поскольку на 37 делится число $a_2a_1a_0 + a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 = 371 + 992 + 6 = 1369$ (к последнему числу также применяем тот же признак и видим, что $369 + 1 = 370 = 37 \cdot 10$).

Р 84. Из уравнения находим

$$y = \frac{xz}{x^2 + z^2 - 4}.$$

Поскольку нас интересуют только натуральные решения, должно выполняться неравенство

$$\frac{xz}{x^2 + z^2 - 4} \geq 1 \quad \text{или} \quad xz \geq x^2 + z^2 - 4 > 0.$$

Переписывая неравенство $xz \geq x^2 + z^2 - 4$ в виде

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 \leq 4 - \frac{3}{4}z^2,$$

получаем условие $3 - (3/4)z^2 \geq 0$, которому удовлетворяют только два натуральных значения $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$. Первое значение дает нам неравенство $x \geq x^2 - 3$ или $x(x-1) \leq 3$, откуда $x = 2$ (при $x = 1$ не выполнено условие $x^2 + z^2 - 4 > 0$). Тогда

$$y = \frac{x}{x^2 - 3} = 2.$$

Аналогично разбирается случай $z_2 = 2$.

Р 85. Из первого уравнения находим $x = \pm\sqrt{4n+1}$ и поскольку $|x| \leq 3$, допустимыми для x являются следующие значения: ± 1 , $\pm\sqrt{5}$, ± 3 . Тогда для y получаются значения ± 2 , $\pm(3-\sqrt{5})$, 0 . Наименьшим является -2 , а всего можно образовать 10 пар.

Р 86. Сумма трех кубов не может ввести нас в заблуждение: конечно, нужно использовать формулу

$$m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = (m+n+p)(m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - pm),$$

в силу которой для решения задачи достаточно доказать, что произведение $3mnp$ делится на 2. Но иначе и быть не может: если среди чисел m , n , p нет ни одного четного, то сумма $m+n+p$ нечетна как сумма трех нечетных и, значит, не делится на 6. Поэтому хотя бы одно из них четно и тогда $3mnp$ делится на 6.

Р 87. Пусть $f(a) = 0$, где a — целое. Тогда поскольку разности $f(a) - f(2) = \pm 1$ и $f(a) - f(5) = \pm 1$ должны делиться на $a-2$ и $a-5$ соответственно, имеем

$$|a-2| = |a-5| = 1.$$

Но это двойное равенство невозможно ни при каком a .

Р 88. Имеем

$$(2^x - 3^x)^2 + \sqrt{\log_3(x+3)} = 0,$$

откуда $2^x = 3^x$ и $\log_3(x+3) = 0$. Но эти условия несовместимы.

Р 89. При помощи формул понижения степени и приведения числитель выражения для v преобразуем к виду

$$\frac{\cos 2\pi x}{4}(1 - \sin \pi x)(1 + \sin \pi x) = \frac{\cos 2\pi x \cos^2 \pi x}{4}.$$

Упрощая знаменатель, получаем

$$\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} - 2 \sin \pi x \cos \pi x = \frac{\cos \pi x \cos 2\pi x}{\sin \pi x},$$

т. е. $v = (1/8) \sin 2\pi x$. Осталось решить уравнение $6x^2 - 11x = 2$, один корень которого $x = 2$ не входит в ОДЗ, так как при этом значении не определен $\operatorname{ctg} 2\pi x$.

Р 90. Докажем, что центром симметрии графика функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ является его точка перегиба, абсцисса x_0 которой находится из условия $y'' = 0$. Поскольку

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y'' = 6ax + 2b,$$

имеем $x_0 = -b/3a$.

Пусть теперь t — произвольное число; проверим, что точка $O(x_0; y_0)$, где

$$y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d,$$

является серединой отрезка AB , если точки A и B лежат на графике нашей функции, а их абсциссы равны $x_0 - t$ и $x_0 + t$ соответственно. Для этого достаточно проверить равенство

$$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} y_A + y_B &= a(x_0 - t)^3 + b(x_0 - t)^2 + c(x_0 - t) + d + a(x_0 + t)^3 + b(x_0 + t)^2 + \\ &+ c(x_0 + t) + d = 2(ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d + 3ax_0t^2 + bt^2) = 2y_0, \end{aligned}$$

поскольку $3ax_0t^2 + bt^2 = 0$ при $x_0 = -b/3a$.

$$\begin{aligned} \text{Р 91. } 4^{545} + 545^4 &= (2^{545})^2 + (545^2)^2 = (2^{545} + 545^2)^2 - 2 \cdot 2^{545} \cdot 2^{545} = \\ &= (2^{545} + 545^2)^2 - (545 \cdot 2^{273})^2 = (2^{545} + 545^2 + 545 \cdot 2^{273})(2^{545} + 545^2 - 545 \cdot 2^{273}), \end{aligned}$$

т. е. данное число — составное.

Р 92. Пусть

$$\sqrt{x^3 - 100} = \sqrt[3]{x^2 + 100} = a,$$

тогда

$$\begin{cases} x^3 - 100 = a^2, \\ x^2 + 100 = a^3. \end{cases}$$

Отсюда

$$x^3 - a^3 = a^2 - x^2 \quad \text{или} \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2) = -(x - a)(x + a).$$

Условие $x - a = 0$ дает нам уравнение $x^3 - x^2 - 100 = 0$, единственный корень которого $x = 5$. Условие $x^2 + ax + a^2 = -x - a$ не может быть выполнено, поскольку в ОДЗ уравнения $x, a > 0$, и обе части равенства имеют разные знаки.

Р 93. При $y \neq 0$ делим все уравнения на y^2 и обозначаем $z/y = t$. Имеем

$$\begin{cases} 2t^2 + t + \frac{10x^2}{y} = 0, \\ t + t^2 + 9x^3 = 3x, \\ 2 + 18x - t^2 = \frac{10x^2t}{y}. \end{cases}$$

Сложив первое уравнение, умноженное на t , и третье, получаем $t^3 + 1 = -9x$. Домножая второе уравнение на 3 и складывая с полученным, имеем $(t + 1)^3 + 27x^3 = 0$, откуда $t = -3x - 1$. Теперь, исключая t , приходим к уравнению $x^3 + x^2 = 0$, откуда либо $x = 0$, либо $x = -1$.

Если $y = 0$, то из второго уравнения следует, что $z = 0$, но тогда x может быть любым — все три уравнения выполнены.

Р 94. Поскольку $1000 = 17 \cdot 58 + 14$, мы имеем

$$x^{1000} - 1 = x^{14}(x^{17})^{58} - x^{14} + x^{14} - 1 = x^{14}((x^{17})^{58} - 1) + x^{14} - 1.$$

Но $(x^{17})^{58} - 1$ делится на $x^{17} - 1$. Значит, остаток равен $x^{14} - 1$.

Р 95. Уравнение приводим к виду $2 \arcsin(\sin x) = \arccos(\cos x)$ и поскольку его период равен 2π , рассматриваем 4 случая, соответствующие четвертям. При $x \in [0; \pi/2]$ имеем

$$2x = x \Rightarrow x = 0;$$

тогда $x = 2\pi n$ — решение. При $x \in (\pi/2; \pi]$ имеем $2(\pi - x) = x$ и $x = 2\pi/3$, т.е. $x = 2\pi/3 + 2\pi k$ — еще одна серия. При $x \in (\pi; 3\pi/2]$ имеем

$$2(\pi - x) = 2\pi - x,$$

откуда $x = 0$ — не входит в промежуток. Наконец, при $x \in (3\pi/2; 2\pi)$ получаем $2(x - 2\pi) = 2\pi - x$, откуда $x = 2\pi$, и новых решений нет.

$$\text{Р 96. } \dots \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{a+b-x} = \frac{a+b-2x}{(a-x)(b-x)} \Leftrightarrow \frac{a+b-2x}{x(a+b-x)} = \frac{a+b-2x}{(a-x)(b-x)}.$$

Р 97. Ясно, что все три уравнения имеют хотя бы один общий корень. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$(a-c)x^2 + c - a = 0$$

и, поскольку $a \neq c$ по условию, $x^2 - 1 = 0$, т.е. общий корень — одно из чисел ± 1 . Если допустить, что $x = 1$, то из третьего уравнения получаем $a^2 + c^2 + 1 = 0$, что невозможно. Значит, общий корень $x = -1$. Подставляя в первое и третье уравнения, получаем два условия

$$a + c = b \quad \text{и} \quad a^2 - c^2 = 1.$$

Из теоремы Виета следует, что корни первого уравнения — это $x_1 = -1$ и $x_2 = -c/a$; корни третьего уравнения $x'_1 = -1$, $x'_2 = -c^2$. Таким образом, либо $-c^2 = -1$, либо $-c^2 = -c/a$. Если $c^2 = 1$, то дискриминант третьего уравнения равен 0, т.е. $a = 2|c|$, что противоречит условию. Значит, $-c^2 = -c/a$, откуда $c = 0$ или $c = 1/a$. Первая возможность приводит к тройке $a = b = 1$, $c = 0$, удовлетворяющей всем условиям. Если же $c = 1/a$, то условие $a > 2|c|$ приводит к ограничению $a^2 > 2$. С другой стороны, из равенства $a^2 - c^2 = 1$ имеем $a^2 = 1 + 1/a^2$ и при $a^2 > 2$ это невозможно.

Р 98. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt[10]{512} \cdot \sqrt{15x - 21} = \sqrt{13} \cdot \sqrt[5]{15 - 6x}.$$

Ясно, что надо потребовать выполнение двух неравенств: $15x - 21 \geq 0$ и $15 - 6x \geq 0$, откуда $7/5 \leq x \leq 3/2$. В этом интервале находятся только две несократимые дроби указанного вида — это $x_1 = 11/6$ и $x_2 = 13/6$. Подстановка показывает, что первая из них является корнем, а вторая — нет.

Р 99. Рыбу держит немец. Слева направо дома таковы: желтый, синий, красный, зеленый, белый. В первом доме живет норвежец, он курит данхил, держит кота и пьет воду. Во втором доме живет датчанин, известный лошадиник, он курит мальборо и пьет чай. В среднем доме живет англичанин, который курит пэлмэл, держит птицу и пьет молоко. В четвертом доме живет немец, он курит ротманс, держит рыбу и пьет кофе. В последнем доме живет поклонник пива и большой собачник швед, курящий винстон.

Р 100. Прежде всего найдем сумму

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = f(x),$$

воспользовавшись тем, что

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)'$$

(да-да, производная!). Последовательно находим ($x \neq 1$):

$$x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

и по формуле производной частного

$$f(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Итак, наше уравнение равносильно уравнению

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = 0$$

при $n = 2009$. Исследуем теперь функцию

$$g(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.$$

Ее производная

$$g'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$$

обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 1$. При этом $g(0) = 1$, $g(1) = 0$. Поскольку положительных корней наше уравнение заведомо не имеет, нас интересует только интервал $(-\infty; 0)$, и здесь существенно, что $n = 2009$, ибо в этом случае знак $g'(x)$ отрицательный. Это означает, что на интервале $(-\infty; 0)$ функция $g(x)$ монотонно убывает и в нуле достигает своего наименьшего значения 1, т.е. $g(x) \neq 0$ и исходное уравнение не имеет корней.

Ответы

1. $-\sqrt{2}$; 2. $(-3; 2)$; 3. $-(\sqrt{5}+1)/6$; 4. 2; 5. $x = \pm 2$; 6. $x < -2$, $x = 1$, $x > 3$; 7. 41; 8. 0; 9. $3\sqrt{3}$; 10. Могут; 12. 4018; 13. 6; 14. $15/4$;
15. $(5a-4)/8$; 16. $(-1; 1; 1)$, $(1; -1; 1)$, $(1; 1; -1)$; 17. 4026;
19. $x = 1 + 9/\sqrt{34}$, $y = 2 + 15/\sqrt{34}$; 20. 4036081; 21. -1005; 22. $y = 8x + 4$;
24. $a = \sqrt{3}/2$, $b = 1/2\sqrt{6}$, $c = -\sqrt{3}/8$; 25. $(-\infty; 1/12]$; 26. 1596;
27. $y = x/2 + 3$ и $y = -x/2 - 1$; 28. $y \neq 0$, $y \neq 8$; [8; 64]; 29. 1; 17/16;
30. $(0; -1)$; 31. 0 и -19; 32. 3; 33. $-1/3$; 34. $5/2$, $(5 \pm \sqrt{7})/2$, $(5 \pm \sqrt{17})/2$; 35. Первое число больше; 37. $(1; 0)$; 39. $a < 0$;
40. $[1/4; 1/3] \cup [1/2; 2/3] \cup [3/4; 5/4] \cup [4/3; 3/2] \cup [5/3; 7/4]$; 41. $\sqrt[3]{4}$;
42. $[2; 3) \cup (3; \infty)$; 43. $x \in \mathbb{R}$; 44. $a = 7$, $b = -6$, $c = 3$; 45. $r = 3$ и $r = 12$;
46. -1; 47. $2\pi + 8$; 48. 15; 49. $(\pi/4 + 2\pi k; 2\pi n)$, $(-3\pi/4 + 2\pi l; \pi + 2\pi m)$;
50. 182700; 52. $\pi/8 + \pi n$, $\pi/2 + \pi k$, $-\pi/4 + \pi m$; 53. $(2x^2 + x - 2)/(2x - 3)$;
54. $(\sqrt{5}/2; \sqrt{2}/5)$; 55. $\emptyset$; 56. 1; 58. 10; 60. 62; 61. Одно число: $n = 3$;
62. 1 и 16; 63. Первое число меньше; 64. $[1; +\infty)$; 65. $1/4$; 2; 66. 207;
67. $2/3$; 68. -1; 69. $-\pi/2 + 2\pi k$; 71. $-1 < x \leq \sqrt{2}$; 72. $n = 4, 7, 10, \dots$;
73. $3/2$; 74. -5; 0; 75. π ; 5; 76. $(\pm \arccos 1/5 + 2\pi n; (-1)^k \arcsin 4/5 + \pi k)$;
77. $x < -3$, $2 < x < 4$; 79. $(16; 23)$; 80. 8; 81. Первое число меньше;

82. 24 и 529; 83. Составное; 84. (2; 2; 1), (1; 2; 2), (2; 1; 2); 85. $y_{\text{наим}} = -2$; 10 решений; 88. $\emptyset$; 89. $-1/6$; 91. Составное; 92. 5; 93. $(a; 0; 0)$, $a \in \mathbb{R}$; $(-1; -1; -2)$; 94. $x^{14} - 1$; 95. $2\pi n$, $2\pi/3 + 2\pi k$; 96. $(a + b)/2$, $(a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2})/2$; 97. $a = b = 1$, $c = 0$; 98. $11/6$; 99. Немец; 100. $\emptyset$.

§ 23. Appendix, или 33 задачи без изюминки

*По вечерам, когда вы опускаете голову
на подушку... я на цыпочках подкрадываюсь
к каждому из вас, тихонько дую в затылок:
фу-у-у... фу-у-у... И вы засыпаете...*

Г.-Х. Андерсен. Оле-Лукойе

Содержанием данного параграфа являются «стандартные задачи». Слово-сочетание это легче произнести или написать, чем придать ему реальный смысл. И попытка понять, что можно было бы считать стандартными задачами, привела к появлению еще одного, совсем крошечного раздела. Конечно, таких задач было достаточно и раньше, но это никак не акцентировалось, и здесь сделана попытка собрать их в единый коллектив.

Разумеется, у задачи «без изюминки» может быть решение, содержащее ошибку. Наверное, поэтому я и решил еще немного увеличить и без того пухлую книгу. Но решений к этому параграфу не предполагается — только ответы. Причина ясна.

Эти задачи не потребуют от вас больших усилий — они лишь напомнят усталым от накопленного опыта людям о пройденном пути — чтобы они могли спать с чистой совестью.

1. Найдите частное от деления наименьшего общего кратного чисел 6300 и 990 на их наибольший общий делитель.

2. Решите в целых числах уравнение $x^3 - xy - 7x + 2y + 23 = 0$.

3. Упростите

$$\frac{(ab^{-1} + 1)^2}{ab^{-1} - a^{-1}b} \cdot \frac{a^3b^{-3} - 1}{a^2b^{-2} + ab^{-1} + 1} : \frac{a^3b^{-3} + 1}{ab^{-1} + a^{-1}b - 1}.$$

4. Найдите целое число x , если

$$\frac{\sqrt[3]{9^2} \cdot (1/3)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1} \cdot 27^{-2/3}} = \frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}.$$

5. Найдите целое число x из условия

$$\sqrt{10 + \sqrt{33 - \sqrt{128}}} = x + 2\sqrt{2}.$$

6. Упростите

$$\left(\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{5 + \sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

7. Решите уравнение $x^5 + 3x^3 + 27x^2 + 81 = 0$.

8. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 4} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}.$$

9. Решите уравнение

$$25 + x^3\sqrt{3} + 3x + \frac{\sqrt{3}}{x^3} = 5x^2\sqrt{3} + 5x + \frac{5\sqrt{3} - 1}{x} + \frac{5}{x^2}.$$

10. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 - 32x - 18 = 0, \\ x^3 - 33x - 54 = 0. \end{cases}$$

11. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 54, \\ 4y^2 + xy = 115. \end{cases}$$

12. Решите неравенство

$$\frac{3}{6x^2 - x - 12} < \frac{25x - 47}{10x - 15} - \frac{3}{3x + 4}.$$

13. Решите уравнение $|x - 3| + |x - 2| - |x - 4| = 3$.14. Вычислите $\cos(2 \arcsin(2/3)) - \sin(2 \arccos(1/3))$.15. Решите уравнение $3 \cos x + \sin x + 3 = 0$.16. Решите уравнение $|\cos x + 2 \sin 2x - \cos 3x| = 1 + 2 \sin x - \cos 2x$ 17. Решите неравенство $5 + 2 \cos 2x \leq 3|2 \sin x - 1|$.18. Решите уравнение $\arcsin(2x^3 - x^2 - 7x + 7) = \pi/2$.19. Упростите $1 - (\log_2 5 + \log_5 2 + 2)(\log_2 5 - \lg 5) \log_5 2$.

20. Вычислите

$$\frac{\log_3 12 + \log_4 12}{\log_3 12 \cdot \log_4 12}.$$

21. Сравните $\log_{3/4} 2/5$ и $\log_{5/2} 3/4$.

22. Решите уравнение

$$\frac{5^x}{2^{x-1} - 5^x} = 8 - \frac{2^{x+1}}{5^x}.$$

23. Решите уравнение $\lg(x+1)^2 + \lg(x+9)^2 = 2 \lg 9$.

24. Решите уравнение

$$\log_2^2 2x + \log_2^2 \frac{x}{2} + \log_8^2 x = 21.$$

25. Решите уравнение $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$.

26. Решите систему

$$\begin{cases} \lg x \lg 3x = \lg 2 \lg 2y, \\ \lg x \lg 2 = \lg y \lg 3. \end{cases}$$

27. Решите систему

$$\begin{cases} |x - y| - \log_2^2(|x| + y + 1) + 6 = 0, \\ (x - y)^2 - 6(x - y) \log_2(|x| + y + 1) + 5 \log_2^2(|x| + y + 1) = 0. \end{cases}$$

28. Решите неравенство

$$\frac{15 - 2 \cdot 13^{x+1}}{6 \cdot 13^{2x} - 13^{x+1} + 6} \geq 2.$$

29. Решите неравенство

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geq 9^{\sqrt{x}}.$$

30. Решите систему

$$\begin{cases} \log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leq 0, \\ 4^x - 3 \cdot 2^x < 4. \end{cases}$$

31. Решите уравнение $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1$.

32. Найдите угол наклона к оси Ox касательной к графику функции

$$y = \sqrt{8 - x^2},$$

проходящей через точку $(-3; 1)$.

33. Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$.

Ответы

1. 770; 2. (3; 29), (1; -17), (19; 397), (-15; 191); 3. 1; 4. 1; 5. 1; 6. 0;

7. -3; 8. -1; 0; 9. $(5 \pm \sqrt{25 - 4\sqrt{3}})/2$, $\sqrt{(5 \pm \sqrt{25 - 4\sqrt{3}})/(2\sqrt{3})}$,

$-\sqrt{(5 \pm \sqrt{25 - 4\sqrt{3}})/(2\sqrt{3})}$; 10. $\emptyset$; 11. (3; 5), (-3; -5), (36; -23/2), (-36; 23/2); 12. $x < -4/3$, $-79/75 < x < 3/2$, $x > 2$; 13. -2; 4;

14. $(1 - 4\sqrt{2})/9$; 15. $\pi + 2\pi n$, $-2 \arctg 3 + 2\pi k$; 16. πn , $-\pi/2 + 2\pi n$, $\pi/3 + 2\pi n$, $2\pi/3 + 2\pi n$; 17. $\pi/2 + 2\pi k$; $[-5\pi/6 + 2\pi n; -\pi/6 + 2\pi n]$; 18. -2; 1; 3/2; 19. $-\log_2 5$; 20. 1; 21. Первое число больше; 22. $\log_{2/5} 3$; 23. -10;

$0; -5 \pm \sqrt{7}$; 24. 1/8, 8; 25. -3, $[-1; +\infty)$; 26. (1/3; 1/2); 27. (5; 2), (46,5; 16,5); 28. $x < \log_{13}(2/3)$, $x > \log_{13}(3/2)$; 29. [0; 16]; 30. {1/4; 2};

31. $(-1)^n \arcsin(3^{-\sqrt{\log_3 \sqrt{2}}}) + \pi n\pi$; 32. $\pi/4$; 33. -1.

§ 24. Теоремы, или Долги наши

В рамках каждого раздела математики есть некоторые теоремы и технические приемы, которые всем известны и всеми признаются... Для многого из того, что всем известно, может не существовать никакого письменного источника.

У. Тэрстон¹⁾

Если бы слепой спросил меня: «У тебя две руки?», то я не взглянул бы на них, чтобы удостовериться. Если бы я хоть сколько-нибудь сомневался в этом, то не знаю, отчего бы я должен был верить своим глазам. Почему мне незачем проверять глаза свои, чтобы удостовериться, что я вижу обе свои руки? Что должно проверять чем? Кто решает вопрос о том, что является несомненным?

Л. Витгенштейн. О достоверности

Доказывая теорему, мы пробуждаем разум ученика, а что еще нужно?

Предлагаемый параграф носит ярко выраженный открытый характер. То есть в нем никоим образом не делается попытка доказать все утверждения — большие и малые, — которые использовались на протяжении книги как нечто известное. Но ради справедливости и интеллектуальной честности следует отвести место и (не слишком скрупулезным, надо сказать) теоретическим обоснованиям, на которые опираются решения уравнений, неравенств и прочего. Поговорить о равносильности, о том, откуда берутся посторонние корни... Надо сознавать свою ответственность перед читателем, благо партия и правительство сыздавна приучали нас к этому: «За последние годы резко возросло число таких пособий, которые делают из задач конкурсных экзаменов как бы особую „науку“, овладение которой невозможно без специального натаскивания. (А на самом деле, якобы, нет.... — М. П.) Среди этих изданий, как это ни прискорбно, попадают книги, написанные небрежно, с существенными логическими недостатками, а иногда и грубыми ошибками. Их авторы, вероятно, не чувствуют той большой ответственности, которую они берут на себя, выступая перед готовящейся к вступительным экзаменам молодежью с непродуманными рекомендациями („Квант“. № 11 за 1970. С. 59)».

И, кроме того, в нашей жизни так много бездоказательных утверждений, ничем не обоснованных обещаний и «законов», что мы должны радоваться, если нам хоть ненадолго дадут возможность побыть в раю, где всё доказывается, где мы можем чувствовать себя спокойно, потому что нас не обманут.

¹⁾ Английский математик, лауреат премии Филдса — высшей награды в математическом мире. (Цит. по: Манин Ю. И. Математика как метафора. М., МЦНМО, 2008. С. 82–83.)

Чем объясняется выбор «теорем»? Трудно сказать. Может быть, какими-то личными предпочтениями: выбиралось то, что казалось неочевидным автору, когда он сам был в положении читателя?.. Во всяком случае, я не льщу себя надеждой, что верну все долги. Но в этом вопросе, к счастью, есть испытанный и рекомендуемый путь: «...И прости нам долги наши, как и мы прощаем должникам нашим...»

* * *

К §§ 1–3.

• Выполненное с умеренным педантизмом доказательство признаков делимости на 2, 3, 9, 11 ведется так.

1) Число $n = p \cdot 10^k + q$ ($0 \leq q \leq 9$) делится на 2 тогда и только тогда, когда на 2 делится число q , т. е. последняя значащая цифра в десятичной записи n .

2) Число

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^k a_k$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} n &= a_0 + (9a_1 + a_1) + \dots + (\underbrace{99 \dots 9}_{k-1} a_{k-1} + a_{k-1}) + (\underbrace{99 \dots 9}_k a_k + a_k) = \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_k) + \dots + 9(a_1 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{k-1} a_{k-1} + \underbrace{11 \dots 1}_k a_k). \end{aligned}$$

Второе слагаемое делится как на 3, так и на 9, поэтому n делится на 3 или на 9 в том и только в том случае, когда на 3 или на 9 делится величина $a_0 + a_1 + \dots + a_k$, т. е. сумма всех цифр числа n .

3) Число

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^k a_k$$

можно представить в виде

$$n = a_0 + 11a_1 - a_1 + 99a_2 + a_2 + 1001a_3 - a_3 + \dots$$

Последнее слагаемое в этой формуле в случае четного k , т. е. $k = 2m$ имеет вид

$$\underbrace{99 \dots 99}_k a_k + a_k,$$

а в случае нечетного $k = 2m + 1$ он имеет вид $(10^k + 1)a_k - a_k$, т. е.

$$n = \begin{cases} a_0 - a_1 + \dots - a_{k-1} + a_k + 11a_1 + 99a_2 + \dots + \underbrace{99 \dots 99}_k a_k, & \text{если } k=2m, \\ a_0 - a_1 + \dots + a_{k-1} - a_k + 11a_1 + 99a_2 + \dots + (10^k + 1)a_k, & \text{если } k=2m+1. \end{cases}$$

В первом случае делимость на 11 самого числа равносильна делению на 11 числа

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{k-1} + a_k,$$

поскольку все числа вида $99 \dots 99$ с четным числом цифр делятся на 11. Во втором случае ситуация аналогична, поскольку числа

$$10^{2m+1} + 1 = 10(99 + 1)^m + 1$$

дают при делении на 11 остаток $10 \cdot 1^m + 1 = 11$, т.е. делятся на 11.

Окончательно: число $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ делится на 11 в том и только в том случае, когда делится на 11 выражение $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$ или: сумма его цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на величину, кратную 11.

• В задачах, связанных с арифметикой остатков мы фактически пользуемся формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n,$$

которая в цивилизованной форме выглядит так:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + \\ + C_n^{n-2} a^2b^{n-2} + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Таинственные символы $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ находятся из формулы

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

Здесь n и k — натуральные числа, причем $k \leq n$. По определению, C_n^k — это число способов выбора любых k элементов из данных n элементов. Первым элементом в наборе может быть любой из n элементов, вторым — любой из $n-1$ оставшегося, третьим — любой из $n-2$ оставшихся и т.д. В результате получаем $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ способов выбора k элементов, но поскольку порядок выбора того или иного элемента не играет роли, полученное число надо разделить на количество способов, которым можно поменять порядок k элементов, т.е. на $k(k-1) \dots 2 \cdot 1$.

Замечание. Произведение $k(k-1) \dots 2 \cdot 1$ принято обозначать так: $k!$ (факториал).

Сама формула бинома доказывается тогда так. Перемножая скобки в произведении $(a+b)(a+b) \dots (a+b)$, мы всякий раз получаем слагаемое вида $a^{n-k}b^k$, умноженное на количество способов, которым можно выбрать k элементов (множителей b) из n скобок, т.е. на C_n^k . Вот, собственно, и всё.

• Докажем признак Паскаля.

Число $n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + a_0$ делится на p , если на p делится число $m = a_k r_k + a_{k-1} r_{k-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0$, где r_1 — остаток от деления на p числа 10 , r_2 — остаток от деления на p числа $10^2, \dots$, r_k — остаток от деления на p числа 10^k .

Рассмотрим разность $n - m$. Она равна

$$(10^k - r_k)a_k + (10^{k-1} - r_{k-1})a_{k-1} + \dots + (10 - r_1)a_1.$$

Но по определению чисел r_k , $10 = pq_1 + r_1$, $10^2 = pq_2 + r_2, \dots$, $10^k = pq_k + r_k$, так что каждая скобка в предыдущем равенстве делится на p . Значит, числа n и m делятся или не делятся на p одновременно (даже больше — дают при делении на p одинаковые остатки).

• В §1 мы фактически применяем *модифицированный признак Паскаля*, а именно признак Паскаля в системе счисления с основанием $q = 1000$ (ввиду того, что выводим признаки делимости на 7, 13 и 37, кратные которых ближе к 1000, чем к 10 или 100). Этот признак формулируется так:

число $n = q^k a_k + q^{k-1} a_{k-1} + \dots + a_0$ дает при делении на p тот же остаток, что и число $m = a_k r_k + a_{k-1} r_{k-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0$, где r_k — остаток от деления на p числа q^k .

(Для доказательства достаточно переписать предыдущие равенства в виде $q = pq_1 + r_1$, $q^2 = pq_2 + r_2$, ..., $q^k = pq_k + r_k$ и воспользоваться тем, что в выражении для разности $n - m = (q^k - r_k)a_k + (q^{k-1} - r_{k-1})a_{k-1} + \dots + (q - r_1)a_1$ каждая скобка кратна p .)

Мало того, для удобства мы используем еще и *приведенные остатки*, которые определяются равенством $a = bq + r$, где $|r| < [b/2]$. (Квадратные скобки — это целая часть числа.) Приведенные остатки могут быть и отрицательными. Например, при делении 10 на 6, записанном в виде $10 = 6 \cdot 1 + 4$ остаток 4 — не приведенный. Приведенным будет остаток -2 , если записать $10 = 6 \cdot 2 - 2$.

* * *

Таинственная *теорема Безу*!.. Да что в ней таинственного? И почему так странно звучит слово «теорема» в курсе алгебры? Потому что мы привыкли считать без всяких теорем? А алгебра для нас есть в первую очередь наука счета?.. Но ведь это не арифметика!..

• Так вот, теорема Безу.

Остаток от деления многочлена $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ на $x - a$ равен $f(a)$.

Разделим многочлен $f(x)$ на $x - a$, т. е. представим его в виде

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x), \quad (*)$$

где $q(x)$ и $r(x)$ — некоторые многочлены (соответственно частное и остаток). При этом степень остатка, т. е. многочлена $r(x)$ должна быть меньше степени многочлена-делителя, т. е. $x - a$. Таким образом, $r(x) = r$ — просто число. Подставив в равенство $(*)$ $x = a$, получим $f(a) = r$, т. е.

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a),$$

что и требовалось доказать.

Как *следствие* получаем, что если $x = a$ — корень многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка. И мы пользуемся этим всякий раз, когда нам нужно решить алгебраическое уравнение степени, большей 2.

• Теперь докажем теорему о рациональных корнях многочлена (и уравнения).

Сначала рассмотрим случай целого корня. Ограничимся случаем кубического уравнения, поскольку рассуждения в общем случае совершенно аналогичны. Пусть $x = n$ — корень уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (с целыми коэффициентами). Тогда $an^3 + bn^2 + cn + d = 0$, откуда $-d = n(an^2 + bn + c)$. Значит, d делится на n .

Если корнем является число $x = n/m$, где целые числа n и m взаимно просты, то, подставляя, мы приходим к равенству

$$an^3 + bn^2m + cnm^2 + dm^3 = 0 \quad \text{или} \quad an^3 + dm^3 = -mn(bn + cm).$$

Отсюда следует, что $an^3 + dm^3$ должно делиться на mn . Поэтому an^3 делится на m , а dm^3 делится на n . Значит, m — делитель a , а n — делитель d .

Отсюда следует, что *приведенное* уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ может иметь либо целые, либо иррациональные корни.

• Справедливости ради следует предположить, что кому-то захочется узнать, откуда берутся *формулы для корней квадратного уравнения* и его *разложения на множители*, а также — как *доказывается теорема Виета*. Удовлетворим законное любопытство.

Для получения формулы корней квадратного уравнения воспользуемся методом выделения полного квадрата в общем случае, т. е. преобразуем левую часть уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ так:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Тогда условие $ax^2 + bx + c = 0$ равносильно тому, что

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{или} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Разность $b^2 - 4ac$ принято обозначать буквой D и называть дискриминантом. И если $D > 0$, то

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

что и требуется. При $D = 0$ получаем просто $x = -b/2a$.

Теорема Виета моментально следует из полученной формулы. Действительно: если

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$

то

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

• А формула разложения на множители получается так:

Поскольку

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2),$$

но, с другой стороны, и

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2),$$

из равенства правых частей следует равенство левых, т. е.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

• Поясним, на чем основан метод неопределенных коэффициентов, в частности — почему если

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

при всех x , то обязательно $a = A$, $b = B$, $c = C$, $d = D$ (аналогичное утверждение, конечно, верно для многочлена любой степени — не только третьей).

Из условия следует, что многочлен

$$p(x) = (A - a)x^3 + (B - b)x^2 + (C - c)x + D - d$$

равен 0 при всех значениях x . Подставляя в это равенство $x = 0$, получаем $D - d = 0$, т. е. $D = d$. Тогда многочлен $p(x)$ принимает вид

$$p(x) = (A - a)x^3 + (B - b)x^2 + (C - c)x.$$

Сократив в равенстве

$$p(x) = (A - a)x^3 + (B - b)x^2 + (C - c)x = 0$$

на $x \neq 0$, получаем

$$(A - a)x^2 + (B - b)x + C - c = 0.$$

Подставив сюда $x = 0$, имеем $C - c = 0$ или $C = c$. Продолжая дальше, приходим к выводу, что и $b = B$, $a = A$.

• Докажем неравенство

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},$$

если $-0,5 < x < 0$.

Для этого достаточно просто возвести всё в квадрат (все выражения неотрицательны). Правая половинка неравенства после упрощений примет вид $x^4 - 8x^3 > 0$, что не вызывает сомнений при указанных значениях x . Левая половинка приводится к виду

$$x^2 - 4x - 4 < 0 \quad \text{или} \quad (x-2)^2 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} + 2.$$

Но $2 - 2\sqrt{2} < -0,5$, поэтому и левое неравенство выполнено.

• При решении задач мы использовали два равенства:

$$\text{а) } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\text{б) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Легче всего их доказать по индукции, однако... Мы докажем их, отправляясь от равенства

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

которое следует из формулы для суммы арифметической прогрессии.

а) Возьмём равенство $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ и вместо n последовательно подставим в него числа $1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$. Мы получим:

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n-1)^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$$

$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1.$$

Если теперь сложить все равенства вместе с первым, сокращая одинаковые выражения в левой и правой частях, то получится

$$n^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n \cdot 1.$$

С учетом формулы

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

имеем

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = n^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

или, упрощая,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

б) Теперь берем равенство $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ и поступаем с ним аналогично. Приходим к соотношениям

$$2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1,$$

$$3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1,$$

$$4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n-1)^4 = (n-2)^4 + 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$

$$n^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1.$$

Складывая, получаем

$$n^4 = 1^4 + 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n \cdot 1.$$

Вторая и третья скобки у нас вычислены, осталось подставить и упростить.

К §§ 4–6

Здесь открывается широчайшее поле для разговоров о равносильности. Не пытайтесь возделывать его целиком, дадим направление, в котором следует двигаться, желая убедиться в равносильности тех или иных переходов.

• Когда мы, получив равенство $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$, сразу пишем $x = 1$, $y = 2$, мы, конечно, имеем в виду следующее:

Пара (x_0, y_0) является решением уравнения $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 = 0, \\ (y_0 - 2)^2 = 0, \end{cases}$$

и отсюда следует, что $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

• Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Пусть x_0 — корень уравнения, т. е.

$$\sqrt{f(x_0)} = g(x_0).$$

Тогда и $f(x_0) = g^2(x_0)$, и $g(x_0) \geq 0$ (поскольку $\sqrt{f(x_0)}$ неотрицателен по определению арифметического корня). Значит, x_0 является решением системы.

Обратно: пусть x_0 — решение системы; тогда

$$f(x_0) = g^2(x_0) \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x_0)} = \sqrt{g^2(x_0)} = |g(x_0)| = g(x_0),$$

так как $g(x_0) \geq 0$. Таким образом, x_0 — корень уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

• Бытует мнение, что посторонние корни уравнения могут появляться только при возведении обеих его частей в квадрат (вообще — в четную степень), а вот при возведении в куб всё хорошо. Однако это не так. Разберемся в вопросе.

Пусть дано уравнение

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = a.$$

Обозначив

$$u = \sqrt[3]{f(x)}, \quad v = \sqrt[3]{g(x)},$$

возведем обе части равенства $u + v = a$ в куб. Мы получим

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + 3(u+v)uv &= a^3 \quad \Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + 3a uv = a^3 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (u+v)^3 - 3uv(u+v) + 3a uv &= a^3 \quad \Leftrightarrow (u+v)^3 - a^3 = 3uv(u+v-a). \end{aligned}$$

Теперь по разности кубов,

$$\begin{aligned} (u+v-a)(u^2+v^2+2uv+au+av+a^2) &= 3uv(u+v-a), \\ (u+v-a)(u^2+v^2+a^2-uv+au+av) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} u+v-a=0, \\ u^2+v^2+a^2-uv+au+av=0. \end{cases}$$

Первое равенство совпадает с исходным уравнением, что же касается второго, то, домножив его на 2, получим $(u-v)^2 + (u+a)^2 + (v+a)^2 = 0$. Это равенство удовлетворяется, если $u = v = -a$. И в этом случае получаются лишние корни.

Так, уравнение $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1} = 1$ после возведения в куб по описанному алгоритму преобразуется к уравнению

$$\sqrt[3]{1-x^2} = 1$$

и отсюда $x = 0$, однако это значение не является корнем исходного уравнения (которое вообще не имеет решений).

• Системы

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ f(x, y) - g(x, y) = 0, \end{cases}$$

равносильны, так как любое решение (x_0, y_0) первой системы, очевидно, удовлетворяет второй системе; и наоборот, любое решение (x_0, y_0) второй системы удовлетворяет первой в силу того, что

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(f(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)) + \frac{1}{2}(f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0)) = 0$$

и аналогично

$$g(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}(f - g) = 0.$$

Верно и более общее утверждение о равносильности исходной системы (1) и системы

$$\begin{cases} af(x, y) + bg(x, y) = 0, \\ cf(x, y) - dg(x, y) = 0, \end{cases}$$

полученной путем обобщенного сложения (т. е. такого, когда первоначальные уравнения домножаются на ненулевые числа a, b, c, d).

• Докажем неравенство $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_n|$ индукцией по n .

Поскольку для $n = 1$ и $n = 2$ оно верно, надо проверить, что, будучи верным при $n = k$, оно остается таковым и при $n = k + 1$. Действительно,

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{k+1}| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_k| + |a_{k+1}| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}|,$$

поскольку для двух модулей

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k| \quad \text{и} \quad |a_{k+1}|$$

это неравенство справедливо.

К §7

• Краеугольный камень темы — *метод интервалов*. В наиболее общем виде он формулируется и обосновывается так.

Пусть алгебраическое неравенство путем равносильных преобразований приведено к виду

$$(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_{n-1})^{k_{n-1}}(x - a_n)^{k_n} > 0,$$

где все $k_i \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, причем $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$.

Рассмотрим многочлен

$$p(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_{n-1})^{k_{n-1}}(x - a_n)^{k_n}.$$

Его корни разбивают числовую прямую на интервалы

$$(-\infty, a_1), \quad (a_1, a_2), \quad \dots, \quad (a_{n-1}, a_n), \quad (a_n, +\infty),$$

в каждом из которых многочлен $p(x)$ сохраняет постоянный знак. В крайнем правом интервале $(a_n, +\infty)$ знак $p(x)$ положителен, поскольку если $x > a_n$, то все множители вида $(x - a_i)^{k_i}$ положительны. При переходе через точку a_n все множители $(x - a_i)^{k_i}$, кроме последнего $(x - a_n)^{k_n}$, остаются положительными, а этот последний меняет знак, если k_n — нечетное число, и сохраняет его, если k_n — четное число. Таким образом, $p(x)$ меняет знак при переходе через точку a_n , если k_n нечетно, и не меняет, если k_n четно. Это же правило действует и дальше при движении справа налево: если на интервале (a_i, a_{i+1}) знак $p(x)$ установлен, то при переходе через точку a_i он меняется, если k_i нечетно, и не меняется, если k_i четно.

• При решении иррациональных неравенств методом сведения к равносильной системе мы пользуемся двумя схемами:

$$\text{а) } \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{б) } \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Докажем схему а). Пусть для некоторого x_0 выполнено неравенство

$$\sqrt{f(x_0)} < g(x_0).$$

Тогда, очевидно, $g(x_0) > 0$, поскольку, по определению арифметического корня,

$$\sqrt{f(x_0)} \geq 0.$$

Но для неотрицательных чисел неравенства $a < b$ и $a^2 < b^2$ равносильны. Таким образом, любое решение неравенства

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

является решением системы (1).

Обратно, пусть

$$f(x_0) \geq 0, \quad g(x_0) > 0, \quad f(x_0) < g^2(x_0).$$

Для неотрицательных чисел неравенства $a < b$ и $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ равносильны, т. е. x_0 — решение неравенства

$$\sqrt{f(x)} < g(x).$$

В том же порядке идей доказывается и вторая схема. Пусть число x_0 является решением неравенства

$$\sqrt{f(x)} > g(x).$$

Это возможно в двух случаях: 1) $g(x_0) \geq 0$ и тогда $f(x_0) > g^2(x_0)$; 2) $g(x_0) < 0$ при условии, что $f(x_0) \geq 0$, поскольку радикал должен быть определен.

Пусть наоборот, x_0 является решением совокупности (2), т. е. удовлетворяет хотя бы одной из входящих в нее систем. Если $g(x_0) > 0$, $f(x_0) > g^2(x_0)$, то последнее неравенство между неотрицательными числами равносильно неравенству

$$\sqrt{f(x_0)} > |g(x_0)| = g(x_0).$$

Если же $g(x_0) < 0$, $f(x_0) \geq 0$, то верно и неравенство

$$\sqrt{f(x_0)} > g(x_0),$$

поскольку левая часть его неотрицательна, а правая отрицательна.

• Мы используем иногда некоторые факты аналитической геометрии. Любая невертикальная прямая на плоскости задается уравнением $y = kx + b$. Если эта прямая проходит через точку $(x_0; y_0)$, то $y_0 = kx_0 + b$. Вычитая это равенство из первого получаем

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = kx + (y_0 - kx_0)$$

— уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $(x_0; y_0)$.

Пусть прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ взаимно перпендикулярны. Выясним, как связаны их угловые коэффициенты. Без ограничения общности можно считать, что углы, которые каждая прямая образует с осью Ox , связаны равенством $\alpha = \beta + 90^\circ$, где $\operatorname{tg} \alpha = k_1$, $\operatorname{tg} \beta = k_2$. Тогда по формуле тангенса разности

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Но в данном случае $\alpha - \beta = 90^\circ$, т. е. $\cos(\alpha - \beta) = 0$, значит, $1 + k_1 k_2 = 0$.

К § 13

• Мы используем так называемую *теорему Ролля*, которая утверждает, что если для гладкой (т. е. имеющей производную) функции выполнено условие $f(x_1) = f(x_2)$, то между x_1 и x_2 должна быть точка экстремума — и в ней производная равна 0. Это утверждение легко вывести из так называемой *теоремы Ферма*, которую желательно предварительно доказать. И выстраивается цепочка, моментально уводящая нас в курс анализа... Входить в подробности мы не можем, ибо, как сказал наш первый университет, «При обучении школьников паче всего наблюдать должно, чтобы разного рода понятиями не отягощать и не приводить их в замешательство».

К §§ 16–18

• *Сравнение логарифмов* чаще всего сводится к нахождению *разделяющего* числа. И важно знать, что *такое всегда существует*. Действительно, пусть сравниваются $\log_a b = x$ и $\log_c d = y$, причем $x < y$; тогда между x и y обязательно есть рациональное число, т. е. число вида m/n , где m и n — целые. (И значит, число m разделяет $n \log_a b$ и $n \log_c d$.) Доказательство этого факта опирается на так называемый *принцип Архимеда* в теории действительных чисел. Он состоит в том, что

для любых положительных чисел a и b , $a < b$, найдется натуральное число n , такое что $na > b$.

Применим принцип Архимеда к числам $a = y - x$ и $b = 1$. Тогда при некотором n будет $(y - x)n > 1$, т. е. $ny - nx > 1$. Иными словами длина интервала (nx, ny) больше 1, а значит, в нем найдется хотя бы одно целое число m , такое что $n x < m < n y$, откуда $x < m/n < y$.

• В § 16 мы использовали неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3,$$

утверждая, что оно верно для всех положительных x . Правильнее было бы написать

$$1 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3.$$

Это — следствие фундаментального (для математического анализа и всей обозримой вселенной) факта, а именно

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,718281828 \dots$$

При выводе этого соотношения прежде всего устанавливается, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

если $n \in \mathbb{N}$, а потом уже осуществляется распространение на все действительные значения x . И для этого нужна вся богатая палитра теории пределов. Мы позволим себе не углубляться, оберегая своего читателя от головной боли.

Для натуральных n неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

получается при помощи формулы бинома Ньютона и может быть здесь воспроизведено. Имеем:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n}.$$

Сократим каждую дробь на n и каждую скобку также почленно поделим на n :

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Пусть

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{n!}.$$

Это выражение получено из выражения для x_n отбрасыванием множителей в скобках, каждый из которых меньше 1; в силу этого $x_n < y_n$.

Но

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

(все множители в $n!$, кроме 1, заменяем на двойки). С другой стороны,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

— это сумма n членов геометрической прогрессии, в которой $a_1 = 1$, $q = 1/2$. Воспользовавшись формулой

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q},$$

получим

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - (1/2)^n}{1/2} = 2 - (1/2)^{n-1} < 2.$$

Значит, $y_n < 3$ и, стало быть, $x_n < 3$.

Вообще говоря, в примере 20 к § 16 мы пользуемся неравенством

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3$$

при $x = 0,024$, т. е. формально оно пока *не следует* из доказанного. Однако если мы рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

посчитаем ее производную

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right),$$

которая оказывается положительной в силу неравенства

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$$

(выводимого, например, как следствие *теоремы Лагранжа*), что означает возрастание функции $f(x)$, а потом установим, что наименьшее значение этой функции равно 1, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$$

(а это нельзя установить, не прибегая к *правилу Лопиталья*), если, говорим мы, всё это проделать, то неравенство

$$1 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3$$

будет доказано полностью.

• Вот «доказательство» того факта, что уравнение $a^x = kx + b$ не может иметь более двух корней. Предположим, что $a^x = kx + b$ при *трех* значениях неизвестного, например, $x_1 < x_2 < x_3$. Функция $f(x) = a^x - kx - b$ имеет производную во всех точках и кроме того, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. Значит, согласно *теореме Ролля*, найдутся значения $c_1 \in (x_1; x_2)$ и $c_2 \in (x_2; x_3)$, т. ч. $f'(c_1) = 0$ и $f'(c_2) = 0$. Но поскольку

$$f'(x) = a^x \ln a - k,$$

это означает одновременное выполнение равенств $a^{c_1} \ln a = k$, $a^{c_2} \ln a = k$, откуда $a^{c_1} = a^{c_2}$, т. е. $c_1 = c_2$, что невозможно.

• Ту же тему, по сути, продолжает использованное в решениях задач к § 16 неравенство $e^x > x + 1$, $x \neq 0$. Конечно, и это азбука математического анализа, и можно снова отослать (т. е. направить) пытливого (а других не бывает) читателя к трехтомному курсу анализа Г. М. Фихтенгольца. С другой стороны, мы в состоянии понять, что касательная к кривой $y = e^x$ в точке $x = 0$ имеет вид $y = x + 1$. И значит, второго (кроме $x = 0$) корня уравнение $e^x = x + 1$ не имеет. А поскольку при любых наугад взятых значениях x неравенство явно в пользу экспоненты (например, при

$$x = 2 \quad e^2 \approx 7,3 > 2 + 1;$$

при $x = -\ln 2 \quad e^{-\ln 2} = 0,5 > 1 - \ln 2 \approx 0,3$), оно имеет много шансов быть верным.

Можно, наконец, совсем строго, рассмотреть функцию $f(x) = e^x - x - 1$, производная которой $f'(x) = e^x - 1$ положительна при $x > 0$ (и функция

возрастает), отрицательна при $x < 0$ (и функция убывает). Это значит, что если $x > 0$, то

$$f(x) > f(0) \quad \text{или} \quad e^x - x - 1 > 0;$$

а если $x < 0$, то опять $f(x) > f(0)$.

• *Неравенство Коши* используется нами на протяжении всей книги. Вот его кратчайшее доказательство, основанное на только что рассмотренном неравенстве $e^x > x + 1$, а точнее $e^x \geq x + 1$ (если учитывать $x = 0$). Перепишем его в виде $e^{x-1} \geq x$ и докажем, что

для n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет место неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

причём равенство возможно только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Действительно, пусть

$$x = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}};$$

тогда

$$e^{\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} - 1} \geq \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

Таким же образом

$$e^{\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} - 1} \geq \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}},$$

....

$$e^{\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} - 1} \geq \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

Перемножим эти n неравенств; благодаря основному свойству показательной функции $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ получим:

$$e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} - n} \geq \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n})^n}$$

или

$$e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} - n} \geq 1 = e^0.$$

Отсюда

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} - n \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

• *Неравенство*

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x},$$

если $x > 0$, доказывается при помощи производной. Функция

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1$$

имеет производную

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0.$$

Поэтому $f(x)$ возрастает при $x > 0$ и $f(x) > f(0)$, т.е.

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0,$$

что и требуется.

• Неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ (где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq -1$) можно вывести из неравенства Коши (а что нельзя из него вывести?). Действительно, если $1+n\alpha < 0$, то доказывать нечего, поскольку левая часть неотрицательна, а правая отрицательна. Если же $1+n\alpha \geq 0$, то применим неравенство Коши к числам

$$x_1 = 1 + n\alpha, \quad x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1.$$

Тогда

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1 + n\alpha + n - 1}{n} = 1 + \alpha \geq \sqrt[n]{1 + n\alpha} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

откуда, возводя в n -ю степень, $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$, что и т.д.

• Эту несколько нестандартную (для традиционного школьного учебника) серию рассуждений прервем обоснованиями переходов от показательных и логарифмических уравнений (и неравенств) к алгебраическим уравнениям (и неравенствам).

При решении уравнений используются следующие равносильности:

$$A) a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$B) f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1, \\ x \in D(g) \cup D(h), \\ f(x) > 0, \quad f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases} \quad (1)$$

$$C) \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$(a > 0, a \neq 1)$$

Схема А) следует из монотонности показательной функции.

Докажем схему В). Пусть при некотором x_0 выполнено равенство

$$f(x_0)^{g(x_0)} = f(x_0)^{h(x_0)}.$$

Тогда если $f(x_0) > 0$, $f(x_0) \neq 1$, то из монотонности функции a^x следует, что $g(x_0) = h(x_0)$. Если $f(x_0) = 1$, то равенство

$$f(x_0)^{g(x_0)} = f(x_0)^{h(x_0)}$$

автоматически выполнено, если x_0 принадлежит областям определения функций $g(x)$ и $h(x)$. Если же $f(x_0) \leq 0$, то функции

$$f(x_0)^{g(x)} \quad \text{и} \quad f(x_0)^{h(x)}$$

рассматривать нельзя.

Обратно: пусть x_0 удовлетворяет совокупности (1). Тогда либо $f(x_0) = 1$, $x_0 \in D(g) \cup D(h)$, и в этом случае равенство

$$f(x_0)^{g(x_0)} = f(x_0)^{h(x_0)}$$

выполнено; либо

$$f(x_0) \neq 1, \quad f(x_0) > 0, \quad g(x_0) = h(x_0),$$

тогда и

$$f(x_0)^{g(x_0)} = f(x_0)^{h(x_0)}.$$

Доказательство схемы С не содержит новых идей и мы его опускаем.

Соответственно, при решении неравенств мы пользуемся схемами:

$$D) \quad f(x)^{g(x)} < f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) < h(x), \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > h(x). \end{cases} \quad (2)$$

$$E) \quad \log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < h(x), \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > h(x) > 0. \end{cases}$$

Докажем схему D). Пусть $f(x_0)^{g(x_0)} < f(x_0)^{h(x_0)}$. Возможны два варианта. 1) $f(x_0) > 1$; тогда показательная функция a^x с основанием $a = f(x_0)$ является возрастающей, а потому $g(x_0) < h(x_0)$. 2) $0 < f(x_0) < 1$; тогда функция a^x является убывающей и $g(x_0) > h(x_0)$. Таким образом, x_0 — решение совокупности (2).

Если, наоборот, при $x = x_0$ имеет место (2), то при $f(x_0) > 1$ функция a^x с основанием $a = f(x_0)$ возрастает, следовательно, при $g(x_0) < h(x_0)$ мы получаем

$$f(x_0)^{g(x_0)} < f(x_0)^{h(x_0)}.$$

А при $0 < f(x_0) < 1$ функция a^x убывает и из неравенства $g(x_0) > f(x_0)$ следует неравенство

$$f(x_0)^{g(x_0)} < f(x_0)^{h(x_0)}.$$

Схема Е) доказывается в том же порядке идей. Если при некотором x_0 определены все функции, входящие в обе части равносильности, то при $f(x_0) > 1$ из возрастания логарифмической функции $\log_a x$ с основанием $a = f(x_0)$ следует эквивалентность неравенства

$$\log_{f(x_0)} g(x_0) < \log_{f(x_0)} h(x_0)$$

и неравенства $0 < g(x_0) < h(x_0)$, а при $0 < f(x_0) < 1$ из убывания функции $\log_a x$ следует равносильность неравенств

$$\log_{f(x_0)} g(x_0) < \log_{f(x_0)} h(x_0) \quad \text{и} \quad g(x_0) > h(x_0) > 0.$$

• Нами постоянно используются самые общие *свойства числовых неравенств*. И в этой связи можно поговорить не просто о «теоремах», но и об «аксиомах», т. е. о том, что доказать никоим образом невозможно, но чем мы смело пользуемся. Этот факт полезно осмыслить.

Безусловно, самым большим «долгом» каждый изучающий школьную алгебру должен считать отсутствие аксиом, а также неопределяемых понятий и недоказуемых принципов, на которых «всё основано». Не пытаюсь сколько-нибудь полно... гм, восполнить этот пробел, уменьшив размер долга, хотя бы поговорив об аксиомах действительных чисел — нашего основного и постоянного объекта изучения.

Определение. Множество R называется множеством действительных чисел, а его элементы — действительными числами, если выполнены следующие условия:

а) **Аксиомы сложения.** Определена операция сложения, сопоставляющая каждой паре x и y элементов из R элемент $z = x + y$ из R , называемый их суммой. При этом:

- 1) Существует элемент 0 (нуль) такой, что $x + 0 = 0 + x = x$ для любого $x \in R$.
- 2) Для любого x имеется элемент $-x$ (противоположный к x) такой, что

$$x + (-x) = 0.$$

- 3) $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- 4) $x + y = y + x$.

б) **Аксиомы умножения.** Определена операция умножения, сопоставляющая каждой паре x и y элемент $z = xy$, называемый их произведением, причем:

- 5) Существует элемент 1 (единица), отличный от 0, такой, что для всех $x \in R$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

- 6) Для любого элемента $x \neq 0$ имеется элемент x^{-1} , называемый обратным, такой, что $x \cdot x^{-1} = 1$.

7) $xy = yx$.

8) $x(yz) = (xy)z$.

9) $(x + y)z = xz + yz$.

в) Аксиомы порядка. Для любых двух элементов x и y из R справедливо одно (или оба) из отношений $x \leq y$ или $y \leq x$. При этом:

10) $x \leq x$.

11) если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

12) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$.

13) если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$ для любого z .

14) если $0 \leq x$, $0 \leq y$, то $0 \leq xy$.

Отношение $x \leq y$ записывается также в виде $y \geq x$. Отношение $x \leq y$ при $x \neq y$ записывается в виде $x < y$ или $y > x$.

г) Аксиома полноты (или непрерывности, или принцип разделяющего числа).

Если X и Y — непустые подмножества R , обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то существует такое число c из R , что $x \leq c \leq y$.

Вы никогда не задумывались над тем, можно ли доказать, что $0 < 1$? Или почему равенство $a + b = c$ равносильно равенству $a = c - b$? Нет? Тогда вы счастливо прожили свой недолгий абитуриентский век. Но если в вас хоть раз затеплился намек на подобные вопросы, вы найдете ответ ниже.

Да, теперь мы можем доказать всё, что угодно. (Это утверждение не следует принимать буквально.) Чтобы не быть голословными, устроим под занавес последний и самый факультативный факультатив из двух десятков задач на усвоение.

Докажите, что:

Задача 1. В множестве R имеется только один нуль.

Задача 2. У каждого x из R имеется только один противоположный элемент.

Задача 3. Уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение

$$x = b + (-a)$$

(обозначаемое $b - a$).

Задача 4. В множестве R имеется только одна единица.

Задача 5. У каждого $x \neq 0$ имеется только один обратный элемент x^{-1} .

Задача 6. Уравнение $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ имеет и притом единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.

Задача 7. Для любого $x \in R$ верно равенство $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Задача 8. Если $xy = 0$, то хотя бы один из множителей равен 0.

Задача 9. Для любого $x \in R$ верны равенства

$$-x = (-1) \cdot x; \quad (-1)(-x) = x; \quad (-x)(-x) = x \cdot x.$$

Задача 10. Для любых x и y имеет место только одно из соотношений: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Задача 11. Если $x < y$ и $y \leq z$, то $x < z$. (И если $x \leq y$, $y < z$, то $x < z$.)

Задача 12. Если $x < y$, то $x + z < y + z$.

Задача 13. Если $0 < x$, то $-x < 0$. (И если $x < 0$, то $-x > 0$.)

Задача 14. Если $x \leq y$, $z \leq w$, то $x + z \leq y + w$.

Задача 15. а) Если $0 < x$ и $0 < y$, то $0 < xy$;

б) если $x < 0$, $y < 0$, то $0 < xy$;

в) если $x < 0$, $0 < y$, то $xy < 0$.

Задача 16. а) Если $x < y$, $z < 0$, то $yz < xz$.

б) если $x < y$, $0 < z$, то $xz < yz$.

Задача 17. $0 < 1$.

Задача 18. а) если $0 < x$, то $0 < x^{-1}$; б) если $0 < x$, $x < y$, то $0 < y^{-1}$ и $y^{-1} < x^{-1}$.

Решения задач

Эти решения состоят в том, что мы выводим утверждения задач непосредственно из аксиом, перечисленных выше. Упражнение, как говорится «на любителя», поэтому мы будем кратки и не станем комментировать каждый шаг (как это можно было бы сделать на устной лекции), чтобы не загромождать. Предупреждение: да не смутит читателя философская глубина некоторых утверждений (например, 1, 7, 17). Всё под контролем!

Р 1. Если 0_1 и 0_2 — нули, то

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

(мы используем здесь аксиому 1).

Р 2. Если $x + x_1 = 0$ и $x + x_2 = 0$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

Р 3. Если $a + x = b$, то $a + x + (-a) = b + (-a)$, что равносильно

$$x + a + (-a) = b + (-a),$$

откуда $x = b + (-a)$.

Р 4. Если 1_1 и 1_2 — единицы, то $1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2$.

Р 5. Если $xx_1 = 1$ и $xx_2 = 1$, то

$$x_1 = x_1 \cdot 1 = x_1(xx_2) = (x_1x)x_2 = 1 \cdot x_2 = x_2.$$

Р 6. Если $ax = b$, то $xa = b$, что равносильно

$$xa \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1} \quad \text{или} \quad x(a \cdot a^{-1}) = b \cdot a^{-1},$$

откуда $x = ba^{-1}$.

Р 7. $x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, откуда

$$x \cdot 0 - x \cdot 0 = x \cdot 0,$$

значит $0 = x \cdot 0$ и $x \cdot 0 = 0$. Тогда равенство $0 \cdot x = 0$ следует из аксиомы 7.

Р 8. Если $y \neq 0$, то уравнение $xy = 0$ имеет решение $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$.

Р 9. Имеем

$$x + (-1)x = x(1 + (-1)) = x \cdot 0 = 0,$$

отсюда $(-1)x = -x$. Далее

$$(-x)(-1 + 1) = 0, \quad \text{отсюда} \quad (-x)(-1) + (-x) = 0,$$

т.е. $(-x)(-1) = x$. Наконец:

$$(-x)(-x) = (-1)x(-x) = x(-1)(-x) = xx.$$

(Вы чувствуете силу логики? Тогда идем дальше.)

Р 10. Если $x = y$, то неравенство $x < y$ исключается, так как оно означает $x \leq y$, $x \neq y$. Аналогично с $x > y$.

Если $x < y$, то

$$x \neq y \quad \text{и} \quad x \leq y.$$

Если при этом $x \geq y$, то из аксиомы 11 следовало бы $x = y$.

Р 11. Если $x < y$, $y \leq z$, то

$$x \leq y, \quad y \leq z, \quad x \neq y \Rightarrow x < z$$

(аксиома 12). Докажем, что $x \neq z$.

Из условия $x = z$ следовало бы, что $z < y$, $y \leq z$, что равносильно $z \leq y$, $z \neq y$, $y \leq z$, т.е. $z = y$ и $z \neq y$ одновременно, чего быть не может.

Р 12. Если $x < y$, то $x \leq y$ и тогда $x + z \leq y + z$ (снова аксиома 12). Докажем, что

$$x + z \neq y + z.$$

Если $x + z = y + z$, то

$$x + z - z = y + z - z,$$

откуда $x = y$, что противоречит условию $x < y$.

Р 13. Если $0 < x$, то $0 + (-x) < x + (-x)$ или $-x < 0$.

Р 14. Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$; если $z \leq w$, то $z + y \leq w + y$. Значит,

$$x + z \leq w + y$$

(аксиома 12).

Р 15. а) Если $0 < x$ и $0 < y$, то $0 \leq x$ и $0 \leq y$, откуда $0 \leq xy$ (аксиома 14). Но $0 \neq xy$, так как иначе $x = 0$ или $y = 0$. Значит, $0 < xy$.

б) Если $x < 0$, $y < 0$, то $-x > 0$, $-y > 0$, откуда $(-x)(-y) > 0$, т.е. $xy > 0$.

в) Если $0 < y$, то $-y < 0$, откуда $x(-y) > 0$ или $-xy > 0$, $xy < 0$.

Р 16. а) Имеем

$$xz + (-yz) = xz + (-y)z = z(x + (-y)) < 0,$$

так как $x + (-y) < 0$, $z > 0$.

б) Поскольку

$$xz + (-y)z = z(x + (-y)) > 0, \quad xz > yz.$$

Р 17. Если $1 < 0$, то $(-1) > 0$ и тогда $1(-1) < 0$, т.е. $-1 < 0$. Но одновременно не могут выполняться условия $1 < 0$ и $-1 < 0$ (задача 13). Значит, $1 > 0$ (поскольку $1 \neq 0$ в силу единственности 0 и 1).

Р 18. а) Неравенство $x^{-1} < 0$ в силу условия $x > 0$ влекло бы $xx^{-1} < 0$, т.е. $1 < 0$, что противоречит задаче 17. Но $x^{-1} \neq 0$, так как иначе

$$xx^{-1} = 0 \text{ и } xx^{-1} = 1, \text{ но } 0 \neq 1.$$

б) Если $0 < x$, $x < y$, то $0 < x$, $x \leq y$, откуда $0 < y$ (задача 11). Тогда $0 < x < y$ и значит,

$$xx^{-1} < yx^{-1} \Rightarrow y^{-1}xx^{-1} < y^{-1}yx^{-1}, \text{ т.е. } y^{-1} < x^{-1}.$$

Теперь вы, дорогие читатели, во всеоружии, чтобы доказать... Что? Ведь книга-то кончилась...

Не беда: зато не кончилась жизнь!.. И если верить пифагорейцам, то по прошествии некоторого времени я опять с этим куском мела в руках, буду решать вам эту задачу, а вы все, так же как теперь, будете сидеть передо мной.

Здоровья вам! Счастья! И до встречи!...

Приложение 1

Поступальник для абитуриентов (по Д. Самойлову и не только)

Наука сокращает...

А. Пушкин

*Тане Львовой захотелось
в медицинский институт.
Дядя нанял ей студента,
долговязого, как прут...*

Саша Черный

Поступать необходимо. Ведь «пока тянешь на себе ярмо школы, остается только молча скрежетать зубами». (Г. Манн, «Учитель Гнус».) Конечно, поступить трудно. Но возможно. Главное знать, что тебя ждут, что ты нужен... «Задача экзаменатора... вопреки распространенному воззрению школьника, состоит не в том, чтобы поскорее „срезать“ незадачливого поступающего, а в том, чтобы тщательно взвесить, учитывая все обстоятельства экзаменационной обстановки, перспективы его дальнейшей работы по избранной специальности... Приемные и экзаменационные комиссии *более всего озабочены* (курсив мой. — М. П.) тем, чтобы не потерять ни одного поступающего, достаточно подготовленного и способного серьезно работать...» (Академик А. Н. Колмогоров) И вооружиться напутствиями от сведущих людей... Но не быть и чрезмерно доверчивым...

Не верь сначала старой няне,
Потом учителю не верь,
Потом писателю в романе,
И самому себе — теперь.

Общая часть

1. Поступление — мать учения.
2. Учись до, а не потом.
3. Знания еще не образование.
4. Если твой отец должен позвонить — пусть позвонит; если должен подъехать — пусть подъедет, если должен сходить — пусть сидит дома.

5. Поступать по способностям глупо. Поступают по конкурсу.
6. Поступать по конкурсу еще глупее. Дружба украшает жизнь. Поступай по дружбе.
7. Помни: средний человек способен к высшему (образованию).

Выбор призвания

1. Решив учиться, подумай где. Лучше всего ближе к дому.
2. Если не можешь удержаться, поступай по увлечению. Наплачешься.
3. Заявленье — мать поступленья, если нет достойного отца.
4. Автобиография хороша краткостью. Меньше слов — меньше ошибок.
5. В приемной комиссии сидят люди, цель которых — не принимать. Принимают, если не принять неудобно. Создавай неудобства.
6. Знание — наименьшее неудобство. Знать мало, надо мочь.

Экзамены

1. Трепещи, но не бойся.
2. Наука не беспредельна. Главное — знать границы наук.
3. В границы наук входит программа и нечто сверх. Это нечто знает экзаменатор. Хорошо бы узнать, что он знает.
4. Тем не менее не бойся.
5. Нет умных вопросов, есть умные ответы.
6. Экзаменатор перестает быть подлецом и болваном, если он твой знакомый. Спаси его от глупости и подлости. Даже во время экзамена надо быть гуманным.
7. Шпаргалка — вопрос не нравственный, а технический. Техника решает многое. Но не все.
8. На устных экзаменах идти первым либо последним.
9. Соскучь экзаменатора обстоятельным ответом. Ему надоест.
10. Все же пусть папа снова позвонит или съездит. Не развалится.

Пока до вступительных экзаменов есть время, действуй!

Если же несмотря на все эти советы тебе не удалось поступить, не унывай.

Повтори вместе с поэтом:

С детства не был силен я в науке;
Не вступая с учеными в спор,
Я простер постаревшие руки
В нестареющий синий простор.

И будь счастлив назло бесчувственным амфибиям-экзаменаторам. Учти: плохой педагог лучше хорошего. Доказательство этого парадокса проводится в следующих пунктах.

1. Хорошим педагогом считается тот, кто может внушить ученикам хорошие понятия.
2. Хорошие понятия хорошим педагогом обычно внушаются на основе хороших примеров.
3. Человек усваивает добро лучше, если он видит перед собой примеры зла.
4. Хороший педагог не является примером зла.
5. Плохой педагог, сам являясь примером зла, внушает к себе жгучую ненависть.
6. Плохой педагог лучше обучает ненависти ко злу. Пользы от него больше, чем от хорошего.

Приложение 2

Слово о человеке

Книги по математике, как правило, пишутся *в назидание*. Моя книга родилась из *благодарности* и написана *в воспоминание* об удивительном, хотя и чудаковатом человеке, преподававшем математику 4 десятка лет и делавшем это настолько ненавязчиво и незаметно, что никто из его учеников никогда уже не мог забыть его уроков. И если бы я чувствовал себя достойным этого, то посвятил бы свой труд ему, Владимиру Мироновичу Сапожникову, учителю математики в 91-й московской школе.

«Вы живете своей жизнью, а я вашей», — шутил говаривал он, но в действительности дела обстояли именно так. И неслучайно мой знаменитый одноклассник, уроженец г. Химки, М. Л. Концевич, филдсовский лауреат 2000 года, ныне умножающий французскую науку, с благодарностью упомянул нашего учителя в звездном интервью по поводу вручения премии (которая для него не была ни первой, ни последней).

Пусть никому уже не удастся воскресить его голос, но многие поколения учеников, повзрослев, бережно сохраняют в памяти его mots: «Ты говоришь или молчишь?»... «Дело было так: была система координат...»... «Если бы я к Сидорову плохо относился, я поставил бы ему четыре, но я к нему отношусь хорошо, поэтому я поставлю три. Ему вообще надо два поставить»... «Цесаревский, твой папа директор, а ты ведешь себя, как завуч»... «Ты существуешь в природе? Ты процветаешь?»... Кажется, он никогда особенно не хвалил нас, но почему-то не забываются его слова: «Фрид, ты меня боишься? Так нельзя, учителя надо бояться...» Или: «Есть ученик простой. Да. А есть сложный ученик...» Высшим выражением недовольства было у него: «Закрой окно... Пока с этой стороны»... Или: «Ты наглый мальчик? Да?»... Или: «У тебя нет ни стыда, ни зависти...»

Помню, когда он шел по школьному коридору, все почтительно замирали, как при явлении царственной особы. В руке он нес пухлый портфель, набитый, видимо, книгами, но зачем он таскал с собой целую библиотеку, никто не знал. На уроке он извлекал оттуда какой-нибудь задачник и диктовал условие, а мы во все глаза пытались разобрать, что это за книга? кто автор? Он не был мазохистом и не затевал длительных допросов. Зачем ему портить себе кровь неутолимым желанием «хоть бы они ответили»? Когда у доски маялся мизерабль, учителю ведь тоже хочется, чтобы тот сделал правильно, но желание это утолить невозможно. Как у дворового пса, который долго смотрит на выставленный в витрине кусок мяса. Мironыч (так называли его все) поступал иначе. Мы решали, а он прохаживался по рядам. И когда у кого-то пробуждал-

ся интерес, кто-то продвигался весьма далеко, — вот тут-то он полуднамеком и разжигал настоящий азарт. Помню его неживой, вечно белый от мела указательный палец, медленно плывущий по строчкам и зависающий над изъясном в выкладках.

Он был великий артист. Старался не убить нас длинными вычислениями, за которыми так скучно следить, и явно исповедовал «принцип наименьшего действия». «Математики — люди ленивые, — говорил он. — Задача должна решаться в одну строчку — или это не задача. Я не утверждаю, что легко прийти к этой строчке сразу. Но мастера не ведут нудной осады, как гиены или шакалы, они, как матерые хищники, решают дело одним прыжком».

Разговор шел только об идеях. Подробности мы должны были доводить до ума сами. Едва ли он ждал, что все мы готовы забыть мир ради математики. Его смешно подворачивавшийся сзади пиджак говорил нам, что ремесло это не для званных, а лишь для избранных. Но делом его жизни было разбудить и малых сих для наслаждения искусством мысли.

Если учитель не наводит на ученика ужас, то он всего лишь неудачник, несчастный человек. Миронич не наводил ужаса, достаточно было самого предмета. Ведь на урок математики, даже если бы его вел Фернандель, люди все равно приходили бы с кислыми лицами. Как найти в математике человеческое, чисто человеческое?.. Он знал. Его алгебра (и особенно геометрия) была музыкальна, а мысли о жизни точны. Что делал в школе такой человек? Это так и осталось для нас загадкой... Ведь он преподавал математику, а не пытался научить; был посредником, видел свою задачу в том, чтобы сообщить хоть кому-то хоть что-то из бесконечно разнообразного мира идей. Рассказать то, что когда-то рассказали ему самому: передать эстафету. А научить — это уже другое даже ремесло, это гувернерство, наставничество, дисциплина, это решается с каждым подопечным индивидуально. Конечно, для этого можно использовать готовые пособия, но любой гувернер знает, что приходится многое убирать из них, добавлять своего, подлаживаться к конкретному случаю... Преподавать математику — большое счастье, учить ей — наказание Господне...

Конечно, в книге моей ничего этого нет — только уравнения. Но Учитель, я надеюсь, незримо присутствует в лучших местах (если таковые имеются), а в неудачных... Может быть, жизнь поможет мне их исправить? Ведь от него-то мне уже никогда не услышать: «Ты хорошо рассказал, как не надо рассказывать...»

Послесловие

Не для всех.

Г. Гессе. Степной волк

Да уж, слаонервным читать это не рекомендуется. Да и писать было бы ни к чему, но... Умолчать не можно. Как ни крути, «Гербарий» этот — акт покаяния, ибо репетиторство есть грех тяжкий. Правда, не индивидуальный грех только: нас много, и всех ожидает ад.

Что засушено в сём «Гербарии»? Веселость молодого репетитора, у которого не было отбоя от учеников? Считавшего себя Вергилием, Хароном — проводником неопытных душ? И похоронившего эту веселость?

Конечно, абитуриентская математика страшна, как смертный грех, но если ты отдал ей лучшие годы жизни, трудно избавиться от желания представить её как нечто ценное. Что делать, если в жизни достаточно хорошо удалось узнать только логарифмические уравнения? О них и рассказываю.

Сегодня всё в экзаменационной практике вызывает у меня отторжение. И жёсткая система оценок, и необходимость судить, рубить сплеча... Я мог бы, наверное, если бы знал, что всё это выдуманно, игра — как губернаторство Санчо Пансы... Тогда я, может быть, тоже был бы справедливым судьей. А так — мне противно... И всем верующим в экзамены, в их «объективность» и незаменимость — адресую следующий пассаж из биографии великого человека: «В 1749 г. Генри Кавендиш поступил в Кембриджский университет, который оставил в 1753 г., так и не получив ученой степени. Высказывалось предположение, что это обстоятельство было связано с болезненной застенчивостью Кавендиша и его страхом перед экзаменом». (С. Филонович, «Генри Кавендиш», «Квант». № 10 за 1981 г. С. 17.)

Чем можно раскрасить тот неприглядный факт, что ты был членом приемной комиссии? Пусть и Климовского землеобрабатывающего, но был же, решал судьбы людей, *вашил!*.. Конечно, это столь же позорный факт биографии, как членство в партии.

Повторю снова: «Гербарий» — всего лишь попытка покаяния, попытка принести хоть какую-то пользу. Едва ли толковую книгу для поступающих может написать лицо незаинтересованное, «независимый наблюдатель». Во всяком случае, среди известных мне лучших изделий такого рода нет ни одного, написанного людьми, которые когда-либо не принимали какие-либо экзамены. Независимые наблюдатели слишком презируют эту материю, чтобы браться

за перо. (Или же упрямо гонят деньги и им не до этого.) Так и получилось, что я полез и на *эту* галеру...

Каюсь, каюсь, но не написать книжки по математике было совершенно невозможно. В жизни преподавателя слишком много перерывов между занятиями, «окон» и проч., которые надо же чем-то заполнять. И вот, всегда было дело: что-то решать, просматривать, отбирать. Так оно и составилось постепенно, выткалось на задворках...

Но ведь писание книги — сложное занятие: не в смысле выплескивания всего, чем ты переполнен, а в смысле уважения к читателю: чтобы не разжевывать свою мысль, а останавливаться, когда читатель уже «все понял»; чтобы ему не приходилось пропускать... Но, с другой стороны, мой читатель должен быть вооружен перед предстоящими опасностями, поэтому хочется предостеречь его от всего... Так, борьбой противоположных устремлений, растет книга. И чем дольше над ней работаешь, тем тоньше она выходит...

Теперь, когда, по большому счету, уже поздно, я хотел бы попросить прощения у тех читателей, которым попадет в руки эта книжка и которые, тем самым, будут учиться математике «по Пантаеву». Нет, я, конечно, пытался сделать как лучше, но мог ли?.. дано ли мне было?.. На этот счет я не питаю иллюзий. И прошу прощения за то, что не смог удержаться от бумагомаранья. Но, честное слово, делалось это не для гонорара! Какое там! «Мне ни гроша не накопили строчки, краснодеревщики не слали мебель на дом...»

Если бы Сканави был жив... Какие задачи 1970 (год его смерти) — 2008 гг. включил бы он в свой незабвенный, конкурентов не имеющий Сборник-Изборник? Каждый горе-педагог, имя коим Легион, имеет ответ на этот вопрос, но не он (вопрос) породил настоящую книгу.

Есть задачи, кочующие из сборника в сборник. Каюсь, не смог удержаться, чтобы не включить Классику, что бы ни понималось под этим.

В силу определенных обстоятельств составитель работал в одиночку, ни с кем не советовался и не обсуждался, почти никому не показывал для проверки. Поэтому можно себе представить, сколько несообразностей, опечаток или просто ошибок поселилось в тексте. Несколько ценнейших замечаний внес А. В. Иванишук, которому я выражаю самую искреннюю благодарность.

Когда пишешь математическую книгу, чувствуешь себя умнее потенциального читателя. «Легко видеть, что...», «Очевидно...», «Имеем...». Невозможно обойтись без этих освященных традицией тропов. Простите же меня за то, что пришлось использовать этот неизбежный математический волапук...

Уважаемые репетиторы! Простите и вы — за то, что на всё решительно вы смотрите иначе и всё изложили бы по-другому. Изложите, друзья, и будьте счастливы, что сделали это!

Что бы я еще мог привести в свое оправдание? Поскольку педагогирование мое в основной степени было не преподаванием, а бизнесом, коммерцией — ибо легче понять, как зарабатывать деньги, чем — как научить, — простите, что я пытался преподавать по-настоящему на бумаге, не сумев должным образом

сделать это в жизни. Считайте сей труд алиментами, которые я выплачиваю квадратным уравнениям за многолетний мезальянс с ними. В конце концов, меня вдохновляли слова С. Довлатова: «Можно, рассуждая о гидатопироморфизме, быть при этом круглым дураком, и наоборот, разглагольствуя о жареных грибах, быть весьма умным человеком».

Прочитав книгу Ткачука, с удовольствием чувствуешь, что имел дело с человеком веселым. Так ведь?.. Но из чего он веселится? Материя-то грустная, мягко говоря. Хорошо тебе веселиться, если ты восторжествовал над тупостью экзаменаторов и легко решил всё, что они тебе дали. А если нет? И тебе вместо мехмата пришлось довольствоваться «керосинкой»? Таков удел большинства моих сверстников, окончивших 57-ю, 2-ю, 91-ю школы в конце 70-х. Конечно, их с радостью встретили мичиганские, иерусалимские и все остальные университеты, но... Ведь и сам В. В. давно уже отряхнул пыль родины со своих башмаков и не понес ее с собой в прекрасный новый свет...

Уравнения, неравенства... Не надоело ли решать их всю жизнь?

Понятный и естественный вопрос. Да-да, *scambe geretita*... Потолкуем о Ювенале?.. Нет, решение уравнений не превратилось в рутину, в «специальность», где всё делается «на автомате». Уравнения и неравенства — отзвук той настоящей математики, которой кто-то не смог посвятить свою жизнь...

Каждый претендующий быть автором, должен, наверное, знать ответ на вопрос: что есть в его книге такого, чего нет в других? И что отвечу я?

Как говорил Х. Л. Борхес, история литературы — это разная интонация при произнесении нескольких метафор. Вот и «Гербарий» мой — попытка произнести обычные слова учительского лексикона по-своему, с уклоном в покаяние.

Как давно это было: в 10 классе бродил я в субботу по букинистам, отыскивая старые книги по абитуриентской математике. Были у меня Моденов, Болтянский, Зайцев — Рызов — Сканава, которых я штудировал и всё в них воспринимал как откровение. Верил в могущественные *приемы*, как верит в них каждый, кто всерьез готовится к экзаменам: ищет сильные методы и склонен принимать за таковые любой, незнамый прежде...

Эти детские ощущения я и пытался по мере сил воспроизвести в книге...

Благодарности

Спасибо — всем!

Список использованной литературы

*Совершенно не обязательно полностью прочитать
книги, входящие в твой список литературы.*

У. Тэрстон¹⁾

1. «Квант». 1970 — 2008.
2. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1973.
3. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. 10 и 11 кл. М.: Просвещение. 1989 и 1991.
4. Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. 14-е изд. М.: МЦНМО, 2007.
5. Сергеев И. Н. Математика. 4-е изд. М.: КДУ; Владимир: ВКТ, 2008.
6. Егоров В. К., Зайцев В. В., Кордемский Б. А. и др. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М. И. Сканави. 4-е изд. М.: Высшая школа, 1980.
7. Гельфанд И. М., Шень А. Х. Алгебра. М.: Фазис, 1998.
8. Сукольник Я. Н. Математические задачи повышенной трудности. Киев, Радянська школа, 1985.
9. Горништейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. Киев, Евроиндекс, 1995.
10. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1975.
11. Кушнир И., Финкельштейн Л. 101 вопрос абитуриенту. Киев: Факт, 1997.
12. Куприн А. В., Пантаев М. Ю. Практикум по алгебре. М.: Информсвязьиздат, 1992.
13. Чирский В. Г., Шавгулидзе Е. Т. Уравнения элементарной математики. М.: Наука, 1992.
14. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М.: Изд-во МГУ, 1991.
15. Седракан Н. М., Аволян А. М. Неравенства. М.: Физматлит, 2002.
16. Сивашинский И. Х. Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям. М.: Наука, 1971.
17. Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И., Федосов Б. В. Задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1973.

¹⁾ Цит по: Манин Ю. И. Математика как метафора. С. 83.

18. *Табачников С. Л.* Многочлены. М.: Фазис, 1996.
19. *Тоом А., Гутенмахер В., Васильев Н., Раббот Ж.* Задачи устного экзамена по математике. М.: Издательство московского университета, 1970.
20. *Купцов Л. П., Резниченко С. В., Терешин Д. А.* Российские математические олимпиады школьников. Ростов-на-Дону: Феникс, 1996.
21. *Шарыгин И. Ф.* Математический винегрет. М.: Мир, 2002.
22. *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2007.
23. *Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л.* Тригонометрия. М.: МЦНМО, 2000.
24. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1973.
25. *Горништейн П. И., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.* Экзамен по математике и его подводные рифы. М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998.
26. *Бермант А. Ф., Люстерник Л. А.* Тригонометрия. М.: ГИТТЛ, 1956.
27. *Андронов И. К., Окунев А. К.* Основной курс тригонометрии, развиваемый на целесообразных задачах. М.: Гос. учебно-педагогическое изд-во мин. просвещения, 1960.
28. *Болянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. М.: Наука, 1967.
29. *Олехник С. Н., Потапов. М. К.* Сборник задач по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям. М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996.
30. *Рождественский В. В., Панкратьев Е. В., Мельников И. И., Вавилов В. В.* Математический тренинг. Арифметика, алгебра, тригонометрия и анализ. М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1997.
31. *Моденов П. С.* Сборник конкурсных задач по математике с анализом ошибок. М.: Советская наука, 1950.
32. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Завич Л. И.* Сборник задач по алгебре. 11-е изд. М.: Просвещение, 2005.
33. *Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Наука, 1988.

Представляем Вам следующие книги:

Теория поля и гравитация

- ✓ *Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. Гравитация.*
- ✓ *Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. Т. 1–4.*
- ✓ *Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. Бозонные теории.*
- ✓ *Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. Теории с фермионами. Некоммутативные теории.*
- ✓ *Владимиров Ю. С. Классическая теория гравитации.*
- ✓ *Визгин В. П. Единые теории поля в квантово-релятивистской революции.*
- ✓ *Румер Ю. Б. Исследования по пятимерной оптике.*
- ✓ *Румер Ю. Б. Спинорный анализ.*
- ✓ *Румер Ю. Б., Фет А. И. Теория групп и квантованные поля.*
- ✓ *Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля.*
- ✓ *Богущ А. А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий.*
- ✓ *Богущ А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей.*

Механика

- ✓ *Жуковский Н. Е. Аналитическая механика.*
- ✓ *Жуковский Н. Е. Кинематика, статика, динамика точки.*
- ✓ *Жуковский Н. Е. Механика системы. Динамика твердого тела.*
- ✓ *Напильгин С. А. Исследования по динамике негोलомонных систем.*
- ✓ *Палак Л. С. Вариационные принципы механики: Их развитие и применения в физике.*
- ✓ *Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости.*
- ✓ *Джашишвили В. Э., Панкратов В. М., Голиков А. В. Мультимедийный курс теоретической механики: Теория и компьютерный эксперимент.*
- ✓ *Арнольд В. И. Математические методы классической механики.*
- ✓ *Арнольд В. И. и др. Математические аспекты классической и небесной механики.*
- ✓ *Розенблат Г. М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела.*
- ✓ *Якоби К. Лекция по динамике.*
- ✓ *Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.*
- ✓ *Кузьмина Р. П. Математические модели небесной механики.*
- ✓ *Бакушев С. В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача.*
- ✓ *Котельников А. П. Витговое счисление и приложения его к геометрии и механике.*

Астрономия и астрофизика

- ✓ *Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии.*
- ✓ *Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии.*
- ✓ *Ефремов Ю. Н. Вглубь Вселенной. Звезды, галактики и мироздание.*
- ✓ *Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной. Кн. 1, 2.*
- ✓ *Френкель В. Я., Чернин А. Д. Георгий Гамов — гигант трех наук: От альфа-распада до Большого Взрыва.*
- ✓ *Бутаков Я. А. Зачем разуму космическая экспансия?: Диалоги о жизни во Вселенной, о внеземных цивилизациях и о будущем Земли и человечества.*



Представляем Вам следующие книги:



URSS

Оптика

- ✓ Раутиан С. Г. Введение в физическую оптику.
- ✓ Майкельсон А. А. Исследование по оптике.
- ✓ Саржевский А. М. Оптика. Полный курс.
- ✓ Майзель С. О. Трансформация лучистой энергии в сетчатке человеческого глаза.
- ✓ Майзель С. О. Основы учения о цветах.
- ✓ Шепелев А. В. Оптика. Подготовка к экзаменам, зачетам, коллоквиумам.
- ✓ Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред.
- ✓ Панов Е. А. Познание цвета: Равнозначность цвета в цифровых системах.
- ✓ Шутлов А. М. Методы оптической астрополяриметрии.
- ✓ Стратт (Рэлей) Дж. В. Волновая теория света.
- ✓ Гончаренко А. М., Карпенко В. А. Основы теории оптических волноводов.
- ✓ Русинов М. М. и др. Вычислительная оптика: Справочник.
- ✓ Русинов М. М. Композиция оптических систем.
- ✓ Русинов М. М. Техническая оптика.
- ✓ Русинов М. М. Несферические поверхности в оптике: Расчет, изготовление и контроль.
- ✓ Тарасов Л. В. Физика лазера.
- ✓ Тарасов Л. В. Четырнадцать лекций о лазерах.
- ✓ Тарасов Л. В. Физические основы квантовой электроники: Оптический диапазон.

Электродинамика

- ✓ Федоров В. Ф., Котов Ю. Б., Мозгов К. С., Семенова Т. А. Микроволновое излучение ядерного взрыва.
- ✓ Эйхенвальд А. А. Теоретическая физика: Электромагнитное поле.
- ✓ Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.
- ✓ Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме.
- ✓ Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму.
- ✓ Сачков И. Н. Электромагнетизм: Эффекты, история, парадигма.
- ✓ Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн.
- ✓ Дорфман Я. Г. Магнитные свойства и строение вещества.
- ✓ Френкель Я. И. Теория явлений атмосферного электричества.
- ✓ Мискинова Н. А., Швалкин Б. Н. Физическая электродинамика в задачах.
- ✓ Квасников И. А. Введение в теорию электропроводности и сверхпроводимости.
- ✓ Иванов С. В., Мартышко П. С. Избранные главы физики: Магнетизм, магнитный резонанс, фазовые переходы. Курс лекций.
- ✓ Зайцев Р. О. Диаграммные методы в теории сверхпроводимости и ферромагнетизма.
- ✓ Реухин Л. Н. Радиационно-стимулированные изменения диэлектрической дисперсии.

Учебники и задачки по физике

- ✓ Розенблат Г. М. Механика в задачах и решениях.
- ✓ Розенблат Г. М., Панишина А. В., Козлова З. П. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского. Кн. 1-3.
- ✓ Журавлев В. Ф., Розенблат Г. М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского: Системы с качеством. Негаулономные связи.
- ✓ Чушкин В. М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского. Кн. 1-2.

Представляем Вам следующие книги:

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»



- ✓ *Малинецкий Г. Г.* Пространство синергетики: Взгляд с высоты.
- ✓ *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация (динамическая теория информации).
- ✓ *Малинецкий Г. Г.* Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент.
- ✓ *Трубецков Д. И.* Наука о сложностях в лицах, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики: Пиршество духа и драма идей.
- ✓ *Трубецков Д. И.* Введение в синергетику. В 2 кн.
Кн. 1. Колебания и волны; Кн. 2. Хаос и структуры.
- ✓ *Абамов С. Г.* Статистическая физика сложных систем: От фракталов до скейлинга-поведения.
- ✓ *Урусов В. С.* Симметрия-диссимметрия в эволюции Мира: От рождения вселенной до разития жизни на Земле.
- ✓ *Мухин Р. Р.* Очерки по истории динамического хаоса: Исследования в СССР в 1950–1980-е годы.
- ✓ *Суздаев И. П.* Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов.
- ✓ *Солодова Е. А.* Новые модели в системе образования: Синергетический подход.
- ✓ *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа.
- ✓ *Полицын Г. С.* Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментариум, результаты.
- ✓ *Кащенко С. А., Григорьева Е. В.* Релаксационные колебания в лазерах.
- ✓ *Олескин А. В.* Сетевые структуры в биосистемах и человеческом обществе.
- ✓ *Климонтович Ю. Л.* Турбулентное движение и структура хаоса.
- ✓ *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны.
- ✓ *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания.
- ✓ *Данилов Ю. А.* Лекции по нелинейной динамике: Элементарное введение.
- ✓ *Безручко Б. П. и др.* Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях.
- ✓ *Олемской А. И.* Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория.
- ✓ *Анищенко В. С.* Знакомство с нелинейной динамикой.
- ✓ *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах.
- ✓ *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел.
- ✓ *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики: Синергетическое мировидение.
- ✓ *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики: Человек, конструирующий себя и свое будущее.
- ✓ *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Синергетика: Нелинейность времени и ландшафты коэволюции.
- ✓ *Арнольд В. И.* Теория катастроф.
- ✓ *Алексеев Ю. К., Сухоруков А. П.* Введение в теорию катастроф.
- ✓ *Быков В. И.* Моделирование критических явлений в химической кинетике.
- ✓ *Быков В. И., Цыбенкова С. Б.* Нелинейные модели химической кинетики.
- ✓ *Клячкин В. И.* Очерки по динамике стохастических систем.
- ✓ *Редько В. Г.* Эволюция, нейронные сети, интеллект: Модели и концепции эволюционной кибернетики.
- ✓ *Тюкин И. Ю., Терехов В. А.* Адаптация в нелинейных динамических системах.
- ✓ *Турчин П. В.* Историческая динамика: На пути к теоретической истории.

Представляем Вам следующие книги:

Серия «НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы»



URSS

- ✓ Перельман М. Е. А почему это так? Физика вокруг нас.
- ✓ Перельман М. Е. А почему это так? Физика в гостях у других наук.
- ✓ Фрова А. Почему происходит то, что происходит: Окружающий мир глазами ученого.
- ✓ Чернин А. Д. Вращение галактик.
- ✓ Чернин А. Д. Физика времени.
- ✓ Зимон А. Д. Что такое адгезия.
- ✓ Шапис А. Л. Вектор эволюции: Жизнь, эволюция, мышление с точки зрения программиста.
- ✓ Уле О. Почему и потому: Учебник физики в вопросах и ответах.
- ✓ Гартман З. Занимательная физика, или Физика во время прогулки.
- ✓ Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи. В 2 кн.

- ✓ Горобец Б. С. Советские физики шутят... Хотя бывало не до шуток.
- ✓ Бисноватый-Коган Г. С. Релятивистская астрофизика и физическая космология.
- ✓ Хван М. П. Неистовая Вселенная: от Большого взрыва до ускоренного расширения, от кварков до суперструн.
- ✓ Byrd Gene G., Chernin Arthur D., Valtonen Mauri J. Cosmology: Foundations and Frontiers.
- ✓ Архангельская И. Д., Чернин А. Д., Розенталь И. Л. Космология и физический вакуум.
- ✓ Головинский П. А. Математические модели: Теоретическая физика и анализ сложных систем. В 2 кн.
Кн. 1. От формализма классической механики до квантовой интерференции.
Кн. 2. От нелинейных колебаний до искусственных нейронов и сложных систем.
- ✓ Хала И., Наеватил Дж. Д. Радиоактивность, ионизирующее излучение и ядерная энергетика.
- ✓ Спиридонов О. П. Людвиг Больцман: Жизнь гения физики и трагедия творца.
- ✓ Тюлина И. А., Чиненова В. Н. История механики сквозь призму развития идей, принципов и гипотез.
- ✓ Иванов Б. Н. Законы физики.
- ✓ Иванов Б. Н. Мир физической гидродинамики: От проблем турбулентности до физики космоса.

Наши книги можно приобрести в магазинах:

Тел./факс:
+7 (499) 724-25-45
(многоканальный)

E-mail:
URSS@URSS.ru
http://URSS.ru

«НАУКУ — ВСЕМ!» (М. Профсоюзная, Нахимовский пр-т, 56. Тел. (499) 724-2545)
«Библио-Глобус» (М. Лубянка, ул. Мясницкая, 9. Тел. (495) 625-2457)
«Московский дом книги» (М. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
«Молодая гвардия» (М. Полянка, ул. Б. Полянка, 26. Тел. (495) 238-5001, (495) 780-3370)
«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
«Дом книги на Ладонской» (М. Бауманская, ул. Ладонская, 8, стр. 1. Тел. (495) 267-0302)
«Санкт-Петербургский Дом книги» (Невский пр., 26. Тел. (812) 448-2355)
«Мининый бум» (г. Киев, мининый рынок «Петровка», ряд 62, место 8 (лавильон «АнадеиКнига»). Тел. +38 (067) 273-3810)
Сеть магазинов «Дом книги» (г. Екатеринбург, ул. Антона Валека, 12. Тел. (343) 253-3010)

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- ✓ *Пантаев М. Ю.* Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа. В 2 т.
- ✓ *Воронов В. К., Подоплялов А. В., Сагдеев Р. З.* Физика на переломе тысячелетий. В 3 кн.
Кн. 1. Физика самоорганизующихся и упорядоченных систем. Новые объекты атомной и ядерной физики. Квантовая информация. Новейшие открытия в физике органического мира.
Кн. 2. Конденсированное состояние.
Кн. 3. Физические основы нанотехнологий.
- ✓ *Грин Б.* Скрытая реальность: Параллельные миры и глубинные законы Космоса.
- ✓ *Грин Б.* Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории.
- ✓ *Грин Б.* Ткань космоса: Пространство, время и текстура реальности.
- ✓ *Рэндалл Л.* Закрученные пассажи: Проникая в тайны скрытых размерностей пространства.
- ✓ *Покровский В. В.* Космос, Вселенная, теория всего почти без формул, или Как дошли до теории суперструн.
- ✓ *Перельман М. Е.* Наблюдения и озарения, или Как физики выявляют законы природы. В 2 кн.
- ✓ *Цаибих Б.* Начальный курс теории струн.
- ✓ *Вайнберг С.* Мечты об окончательной теории: Физика в поисках самых фундаментальных законов природы.
- ✓ *Пенроуз Р.* Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики.
- ✓ *Фейнман Р.* Фейнмановские лекции по физике. Тома 1–9; задачки.
- ✓ *Пер Бак* Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности.
- ✓ *Майнцер К.* Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез.
- ✓ *Городец Б. С.* Круг Ландау. В 3 кн.: Кн. 1. Жизнь гения.
Кн. 2. Физика войны и мира. Кн. 3. Круг Ландау и Лифшица.
- ✓ *Дмитриев А. С.* Золотая коллекция опытов по физике: Постигание законов физики в повседневной жизни.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел. +7 (499) 724–25–45 (многоканальный)
или *электронной почтой* URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в *интернет-магазине*: <http://URSS.ru>

**Научная и учебная
литература**

Михаил Юрьевич ПАНТАЕВ



Московский преподаватель математики. Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Область научных интересов — перспективы обучения математике нематематиков. Автор двухтомника «Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа» (М.: URSS) и пособия «Математический гербарий абитуриента: Алгебра во всем ее блеске и многообразии» (М.: URSS). Им также опубликованы многочисленные пособия для школьников и студентов; статьи, посвященные вопросу математического просвещения, и другие сочинения на актуальные темы.

Наше издательство предлагает следующие книги:



21222 ID 221691



Издательская группа
URSS

Каталог изданий
в Интернете:
<http://URSS.ru>

E-mail: URSS@URSS.ru

117335, Москва, Телефон / факс
Нахимовский (многоканальный)
проспект, 56 +7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги на сайте <http://URSS.ru>